

Учреждение Российской Академии наук
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

На правах рукописи

Меньшутин Антон Юрьевич

**О критических свойствах при росте
кластеров DLA**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в *Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской Академии Наук.*

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
Щур Л.Н.*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,
Иоселевич А.С.*

*доктор физико-математических наук
Зайцев С.И.*

Ведущая организация: *Институт космических исследований РАН,
г. Москва*

Защита состоится 26 декабря 2008 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при *Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН*, по адресу: 142432, Московская обл., Ногинский р-н., город Черноголовка, *Институт физики твердого тела РАН.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.*

Автореферат разослан «_____» _____ 2008 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук

Гриневич П.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Многие объекты, встречающиеся в природе, имеют форму, которая не описывается обычными геометрическими объектами [1]. Основное свойство таких объектов - самоподобие, т.е. похожесть объекта на самого себя при рассмотрении его на разных масштабах. Такие объекты называются фракталами. Существует большое число процессов, такие как рост кристаллов и дендритов, путь заряда при пробое диэлектрика, рост колоний бактерий, которые относятся к классу так называемых структур роста. Объекты, генерируемые такими процессами, оказываются очень похожими как внешне, так и по своим свойствам друг на друга [2]. Параметры таких объектов и условия их образования таковы, что основной вклад в перенос частиц дает диффузия. Основная модель, которая описывает образование таких объектов - это модель агрегации, ограниченной диффузией (DLA), предложенная Виттенем и Сандером в 1981 году [3]. Модель описывает правила движения частиц, последовательное выполнение которых позволяет смоделировать рост кластера. Модель роста двумерных агрегатов является алгоритмической, поэтому ее исследование аналитически сильно затруднено.

Существует ряд аналитических предсказаний и методов исследования таких моделей [4]. Однако, до конца не ясно, как модифицированные модели, изучающиеся этими методами, соотносятся с исходной задачей и друг с другом. Часть предсказаний этих теорий сложно проверить численно (например, мультифрактальный спектр), для проверки других теорий требуется существенно улучшить точность вычислений. Применяя более совершенные технические средства, а также разработав новые методы изучения таких объектов, мы рассчитываем ответить на часть

из этих вопросов.

Цель диссертационной работы

1. Разработка эффективного численного алгоритма, позволяющего моделировать рост кластеров, состоящих из большого числа частиц (до 50 млн.)
2. Исследование свойств мультискейлинга кластеров DLA и проверка предсказаний E. Somfai, R.C. Ball, N.E. Bowler, L.M. Sander [5] относительно этих свойств и наличия поправок к закону скейлинга.
3. Исследование флуктуаций и свойства слабого самоусреднения фрактальной размерности.
4. Разработка методов оценки фрактальной размерности кластеров, позволяющих повысить точность измерений без существенного увеличения размеров исследуемых кластеров.
5. Исследование кластеров, построенных с применением анизотропных локальных правил, применяемых при добавлении частиц к кластеру.

Основные результаты

1. Разработан эффективный численный алгоритм, позволяющий построить кластер размером до 50 млн. частиц за 3-4 часа на компьютере типа Pentium 4 3 ГГц с 2-мя Гб оперативной памяти, при этом для стабилизации роста не используются методы уменьшения шума.
2. По ансамблю из 100 кластеров, состоящих из 50 млн. частиц каждый, вычислена фрактальная размерность с использованием раз-

личных определений линейного размера R в соотношении скейлинга $N \propto R^D$. Проведено сравнение полученных результатов между собой и установлено, что в пределах ошибки измерений фрактальная размерность не зависит от выбора R . Также установлено, что квадрат ошибки определения фрактальной размерности убывает с ростом размера кластера как $1/N^{0.33}$. Т.е. можно сказать, что для фрактальной размерности наблюдается свойство слабого самоусреднения.

3. С использованием ансамбля из 100 кластеров по 50 млн. частиц вычислен показатель мультискейлинга $D(x)$ при разных размерах кластера и проведено сравнение полученных результатов с предсказанными в работах [5]. Установлено, что поведение $D(x)$ с ростом размера кластера не соответствует предсказанному. Также установлено, что наличие мультискейлинга нельзя объяснить поправками к закону скейлинга в виде $R(N) = \hat{R}N^{1/D}(1 + \tilde{R}N^{-\nu})$, предложенным в работах [5].
4. Предложен метод пробных частиц переменного размера для вычисления фрактальной размерности кластера D . В этом методе фрактальная размерность вычисляется по зависимости R_{dep}^{hm} среднего радиуса прилипания частиц, вычисленного как среднее от r по гармонической мере. При этом для расчета гармонической меры используются пробные частицы размером $\delta = 0.1 - 100$, причем за единичный размер принимается радиус частиц, из которых составлен кластер. В результате фрактальная размерность оказывается величиной, зависящей от N и от δ . Вычисляя предел $D(N, \delta \rightarrow 0)$, можно найти фрактальную размерность как функцию числа частиц в кластере $\overline{D(N)}$. При этом данная зависимость оказывается

гладкой функцией, что позволяет находить фрактальную размерность кластера с большей точностью и сделать предположения о его асимптотических свойствах. Найдена универсальная скейлинговая функция $D(N, \delta/R_{dep})$, которая объясняет повышение точности при уменьшении размера пробных частиц. Использование пробных частиц с $\delta = 0.1$ равносильно использованию кластера размером в 10 раз больше по R_{dep} или в 4 раза больше по числу частиц.

5. С использованием метода антенн для генерации анизотропных кластеров построены ансамбли из 1000 кластеров по 50 млн. частиц каждый для числа антенн $N_{fp} = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Вычислена фрактальная размерность $D(N)$ для каждого ансамбля, с использованием метода пробных частиц переменного размера. Установлено, что при $N_{fp} = 3, 4$ фрактальная размерность является строго убывающей величиной. При $N_{fp} = 6, 7, 8$ фрактальная размерность кластеров близка к размерности безрешеточных ансамблей. Случай $N_{fp} = 5$ является переходным. При $N_{fp} > 5$ наблюдается критическое поведение, при этом, по-видимому, получающиеся объекты относятся к одному классу универсальности. При $N_{fp} < 5$ фрактальная размерность, по-видимому, стремится к своему предельному значению $3/2$ при $N \rightarrow \infty$. Данные выводы также подтверждаются сравнением кластеров с использованием зависимости плотности частиц от угла $P(\phi)$ и производных от нее величин.

Научная новизна и достоверность

Результаты диссертационной работы получены впервые, ее выводы обоснованы надежностью применявшихся при исследовании современных методов теоретической и вычислительной физики и подтверждаются

ся результатами апробации работы.

Научная и практическая ценность

Разработанный алгоритм позволяет исследовать кластеры, полученные в рамках модели DLA, с большей точностью и за меньшее время. Детали алгоритма подробно изложены в опубликованных работах, что позволяет использовать их другими авторами. Планируется публикация исходных текстов разработанного программного инструментария для исследования DLA. Сделана проверка предположения о наличии поправок к закону скейлинга, что означает необходимость разработки другого теоретического объяснения свойства мультискейлинга. Разработан новый метод измерения фрактальной размерности с использованием пробных частиц исчезающе малого размера, что позволило измерить фрактальную размерность с большей точностью. Проведено сравнение безрешеточных и псевдорешеточных кластеров и установлено принципиальное отличие в их свойствах при увеличении числа частиц в кластере в зависимости от типа решетки.

Апробация работы

Основные результаты данной работы докладывались и обсуждались на XLVI научной конференции МФТИ, 2003, на международной летней школе “Фундаментальные проблемы статистической физики XII”, Лёвин, Бельгия, 2005, на международной конференции по вычислительной физике, Лейпциг, Германия, ноябрь 2006, на международной конференции по вычислительной физике, Брюссель, Бельгия, 2007 и на семинарах в ИТФ им. Л.Д. Ландау.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано три печатных работы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка

литературы.

Краткое содержание работы

Введение

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава I. Алгоритм.

В этой главе изложены принципы численного алгоритма для генерации кластеров DLA. Т.к. проблема роста кластеров DLA исследуется численно, то разработка эффективного алгоритма является важной задачей, от успеха решения которой зависит вся остальная часть работы. Исходный алгоритм, предложенный в оригинальной работе Виттена и Сандера [3], состоит из следующих шагов:

1. На квадратной двумерной решетке в начале координат находится частица-зародыш (занятая клетка).
2. Вдали от кластера (от зародыша) рождается новая частица.
3. Новая частица блуждает случайным образом.
4. Если частица подходит вплотную к занятой клетке, то она прилипает.
5. Если частица уходит достаточно далеко от кластера, она уничтожается.
6. Повтор начиная с шага 3 до тех пор, пока частица не прилипнет или не погибнет, после чего запуск новой частицы (шаг 2).

Объекты, построенные таким способом, проявляют фрактальные свойства и называются кластерами. По внешнему виду (и по ряду свойств) они похожи на кристаллы, затвердевающие из расплава или из солей, а также на колонии бактерий и другие объекты, встречающиеся в природе. Алгоритм для построения кластеров, предложенный Виттенем и Сандером, стал первым, позволяющим моделировать рост таких объектов. Однако в форме, изложенной выше, данный алгоритм требует доопределения, а именно, не заданы области, где происходит рождение и уничтожение частиц. Чаще всего их задают окружностями радиуса R_b и R_d , причем $R_d \gg R_b$. Основная проблема, возникающая при использовании решетки для роста кластера, заключается во влиянии самой решетки на свойства кластера. По-видимому, из-за того, что вероятность случайного блуждания на двумерной решетке есть функция с симметрией 4-го порядка, то и кластеры, получающиеся при использовании данного метода тоже проявляют симметрию 4-го порядка [6].

Наиболее логичный шаг состоит в отказе от использования решетки и переходу к безрешеточной модели, в которой частицы представляются окружностями. При этом случайное блуждание моделируется как шаг конечной длины в случайном направлении. Частицы, начинающие движение вдали от кластера, подходят к нему равномерно, т.е. вероятность первого пересечения окружности, описывающей кластер, есть функция, не зависящая от угла. Это позволяет использовать в качестве окружности рождения R_b , окружность, описывающую кластер, т.е. минимальную из возможных. Вторая важная модификация, базирующаяся на равномерности распределения случайного блуждания, заключается в возможности увеличения длины шага, если частица находится вдали от кластера. Если расстояние от частицы до кластера равно Δr , то можно вместо единичного шага взять шаг, незначительно меньший Δr . Третья, самая

важная модификация, следует из того факта, что на плоскости вероятность ухода частицы на бесконечность равна 0, т.е. любая частица рано или поздно коснется кластера. Это означает, что R_d должно быть бесконечно велико. Но при этом частицы, отошедшие далеко от кластера, могут затратить много времени на возврат обратно, даже при использовании шагов большой длины. Использование же конечной величины R_d , такой что $R_d \gg R_b$, приводит к искажению вероятностей роста кластера. В своем алгоритме мы используем аналитически вычисленную вероятность возврата из точки $r > R_b$ на окружность R_b . Если частица находится в точке $(0, r)$, то вероятность ее возврата в точку $(R_b \cos \phi, R_b \sin \phi)$

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x \cos \phi + 1},$$

где $x = r/R_b$. Используя эту зависимость и генерируя случайные числа с таким распределением, мы находим новую координату для частиц, вышедших за окружность возврата R_r .

Для того, чтобы хранить в памяти координаты частиц, из которых состоит кластер, мы используем комбинированную схему из алгоритмов, предложенных Боллом [6] и Микеном [7]. При этом частицы хранятся внутри ячеек размером 32, и в каждой ячейке записан размер свободной зоны вокруг нее. Данный алгоритм позволяет построить 1 кластер из 50 млн. частиц за 3 часа на компьютере с процессором Pentium 4 и 2 Гб оперативной памяти. Типичный кластер, построенный по этому алгоритму, показан на рисунке 1.

Глава II. Фрактальная размерность, слабое самоусреднение и мультискейлинг в модели DLA.

В отличие от традиционных объектов евклидовой геометрии, форма которых описывается двумя величинами - длиной и шириной (на плоскости), форма фрактального объекта задается рекурсивным алгоритмом

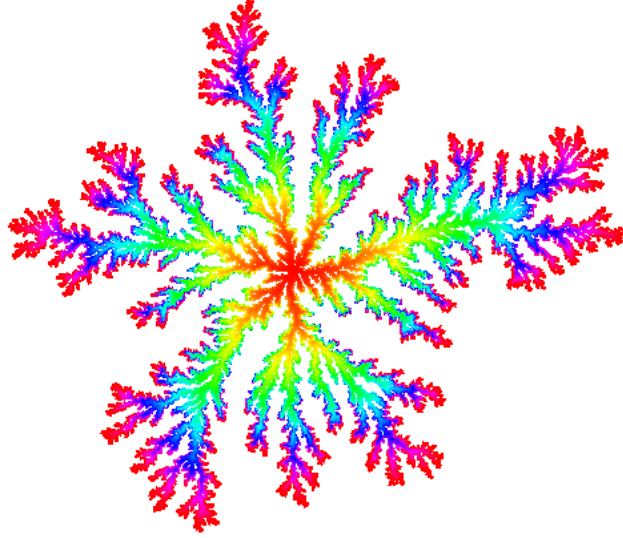


Рис. 1. Кластер DLA, состоящий из 50 млн. частиц. Цветом показан возраст частиц, его построения. Геометрической величиной, характеризующей фрактальные объекты, является фрактальная размерность, при этом отличительным свойством таких объектов является свойство самоподобия. Применительно к структурам роста это означает, что соблюдается соотношение скейлинга $N \propto R^D$, где N - масса объекта (число частиц), а R - его геометрический размер. Величина $D < d$, где d - размерность пространства, называется фрактальной размерностью и является обобщенной характеристикой структуры фрактала. При изучении DLA за величину R можно принять размер кластера, состоящего из N частиц. Также можно изучать зависимость числа частиц, лежащих внутри окружности радиуса R , от ее размеров. Два основных метода, использующихся для вычисления R , заключаются в использовании различных средних величин. Если имеется K ансамблей кластеров, и $r_i(N)$ - положение N -ой частицы в i -том ансамбле, то среднее по ансамблю $\langle r(N) \rangle = \sum_{i=1}^K r_i(N)/K$ называется радиусом осаждения R_{dep} . Также используются величины R_2 , радиус инерции R_{gyr} , средняя глубина проникновения ξ . В дополнение к сред-

	по ансамблю	D	по мере	D
R_{dep}	$\langle r \rangle$	1.70942(46)	$\langle \int r dq \rangle$	1.70922(97)
R_2	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$	1.71003(45)	$\langle \sqrt{\int r^2 dq} \rangle$	1.7087(11)
R_{gyr}	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle r^2 \rangle_k}$	1.71008(96)	—	—
R_{eff}	—	—	$\langle \exp(\int \ln r dq) \rangle$	1.70944(87)
ξ	$\sqrt{R_2^2 - R_{\text{dep}}^2}$	1.74(3)	—	1.69(7)

Таблица 1. Оценка фрактальной размерности D различными способами: усреднением по гармонической мере и по ансамблю с использованием разных величин. В скобках указана погрешность значений, как поправка к последним знакам.

ним по ансамблю можно провести усреднение по поверхности кластера с весом, равным вероятности роста в данной точке поверхности. Такие средние называются средними по гармонической мере и обычно обозначаются как $\int r dq$. Определения различных величин и результаты расчета фрактальной размерности приведены в таблице 1. В пределах ошибок измерений результаты совпадают, т.е. фрактальная размерность кластера не зависит от выбора величины R . Это противоречит данным, что ξ имеет другой закон скейлинга вида $\xi \propto R_g / \sqrt{\ln M}$ в работе [8], т.к., по-видимому, эффекты, вызванные конечными размерами кластеров, оказываются значительны при числе частиц в кластере менее 10^5 . Далее в Главе 2 проводится анализ поведения ошибки измерения D с ростом размера кластера. Для обычных термодинамических систем флуктуация некой физической величины A убывает с ростом размеров системы как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Мы исследуем поведение квадрата этой величины

$$\mathcal{F}_D = (\langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2) / \langle D \rangle^2.$$

В диссертации обнаружено, что квадрат ошибки \mathcal{F}_D ведет себя как $1/N^\gamma$, где $\gamma = 0.33$. Т.е. для увеличения точности измерений на порядок пона-

добится увеличение размеров кластера в 1 млн. раз.

В работах [5] для вычисления фрактальной размерности кластера используется также положение центра масс. При этом соответствующая ему фрактальная размерность оказывается точно такой же, как и при использовании других величин. Исследуя положение центра масс отдельно взятых кластеров и среднего по ансамблю, мы обнаружили, что его положение совершает случайное блуждание около центра. При этом размерность такого блуждания оказывается близка к 0.5, т.е. его движение соответствует движению броуновской частицы. Это подтверждается и анализом направления движения.

В работах [5] сделано утверждение, подтвержденное авторами экспериментально, о наличии поправок к закону скейлинга в виде $R(N) = \hat{R}N^{1/D}(1 + \tilde{R}N^{-\nu})$. Проведя измерения по большему ансамблю и без использования методов уменьшения шума, мы проверили это предположение. Оказалось, что ошибка измерения коэффициента \tilde{R} превышает его измеренное значение. Поэтому вывод о наличии поправок к закону скейлинга в виде, предложенном выше, нами не подтвержден.

Следующая часть этой главы посвящена изучению явления мультискейлинга [9]. Плотность частиц на расстоянии r от центра для кластера с радиусом инерции R_{gyr} представляется в виде $g(r, R_{gyr}) = c(x)R_{gyr}^{D(x)-d}$, где $x = r/R_{gyr}$. На основе предположения о наличии поправок к скейлингу авторы предсказывают, что уже при $N = 10^7$ мультискейлинг не должен наблюдаться, т.е. $D(x) = const$. Проведя измерения, мы построили зависимость $D(x)$ для разных размеров кластеров. Обнаружено, что при увеличении размеров кластера $D(x)$ не выходит на константу, как было предположено авторами. Далее приводятся предположения относительно происхождения мультискейлинга и проводится изучение вероятности роста кластера $P(r, N)$ на расстоянии r от центра и ее влияния

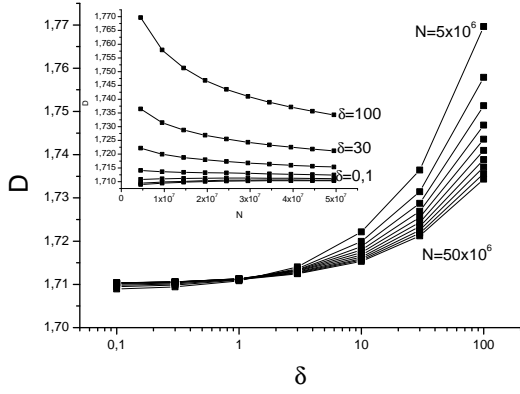


Рис. 2. Фрактальная размерность, вычисленная по R_{dep}^{hm} как функция δ и N .

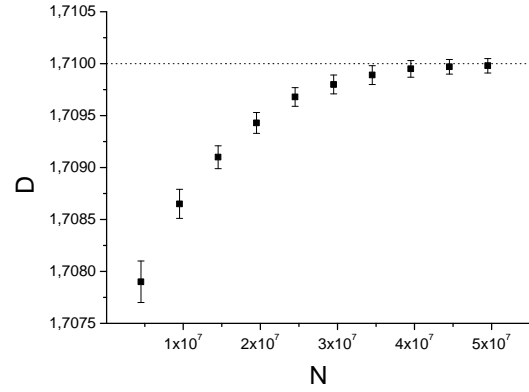


Рис. 3. Фрактальная размерность $\overline{D(N)}$ в пределе $\delta \rightarrow 0$.

на мультискейлинг.

Глава III. Метод пробных частиц переменного размера.

В предыдущей главе показано, что зависимость $D(N)$ не является монотонной, при этом для уменьшения ошибки измерений D на порядок требуется увеличение числа частиц в кластере в 1 млн раз, что не представляется возможным. Все это делает затруднительным предсказание свойств кластеров в пределе $N \rightarrow \infty$.

В этой главе описывается разработанный в диссертации метод, позволяющий построить гладкую монотонную зависимость $D(N)$, не прибегая к существенному увеличению размеров кластера. Для расчета средних по гармонической мере используется метод пробных частиц: частица двигается по обычным правилам до тех пор, пока не коснется кластера в точке r_i . При большом числе пробных частиц M , среднее $\frac{1}{M} \sum r_i$ стремится к искомой величине R_{dep}^{hm} . Во всех работах, использующих этот метод, размер пробной частицы выбирается совпадающим с размером частиц $\delta_0 = 1$, из которых построен кластер. При увеличении размеров пробных частицы $\delta > \delta_0$ они будут касаться только концов ветвей, при уменьшении размера ($\delta < \delta_0$) частицы будут глубже проникать в глубь

структуры кластера. При этом происходит изменение гармонической меры и величина R_{dep}^{hm} становится зависящей от δ , а с ней и фрактальная размерность кластера. Набор кривых $D(N, \delta)$ для разных значений N и δ показан на рисунке 2. С увеличением δ фрактальная размерность увеличивается, при этом с увеличением размера кластера зависимость от δ уменьшается. В пределе бесконечно малого размера пробных частиц зависимость $\overline{D(N)}$ становится гладкой функцией и имеет четко выраженное асимптотическое поведение при больших N (рис. 3).

В диссертации рассмотрен метод нахождения предела $D(N, \delta \rightarrow 0)$ с использованием различных эмпирических законов. В считать, что фрактальная размерность кластера определяется не только тем, как происходит рост концов ветвей, но и его внутренней структурой, мы сделали предположение, что при уменьшении размера пробной частицы δ относительно размера кластера R_{dep} , эффективный размер кластера можно считать больше исходного. Чтобы продемонстрировать это, мы построили зависимость $D(N, \delta)$ с параметром δ , отмасштабированным на размер кластера $R_{dep} \propto N^{1/D}$. На рисунке 4 показан набор точек, соответствующий набору кривых $D(N, y), y = \delta/R_{dep}$ для разных значений N . Все точки достаточно хорошо ложатся на одну кривую. Отсюда следует, что использование пробных частиц меньшего по сравнению с δ_0 размера равносильно использованию больших по размеру кластеров. Это также означает более быструю сходимость различных параметров к их асимптотическим значениям.

Далее в главе изучается точное число частиц, лежащих на поверхности, число частиц кластера, тронутых пробными, и проводится анализ возможности и целесообразности измерения средних по гармонической мере с использованием всей доступной поверхности кластера. Оказывается, что практически все частицы лежат на поверхности (доступна для

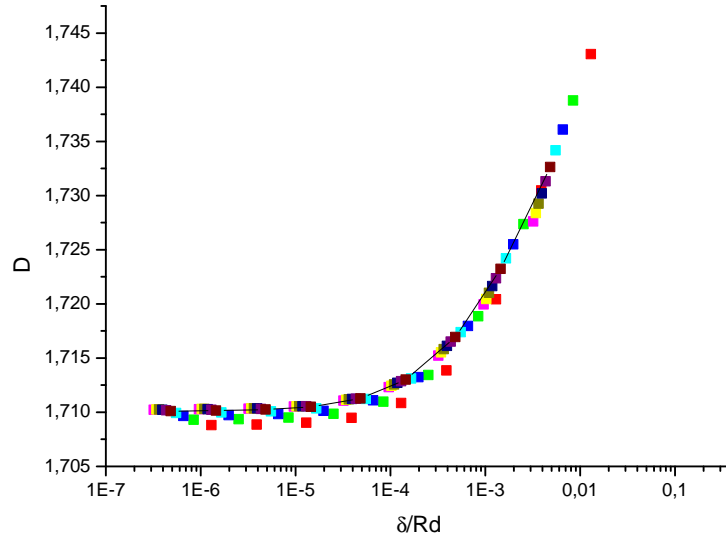


Рис. 4. Фрактальная размерность кластера, вычисленная при разных значениях δ и N , в зависимости от безразмерного параметра δ/R_{dep} . Разные цвета соответствуют различным значениям N .

пробной частицы размером δ_0). При этом для измерения гармонической меры вдоль всей поверхности кластера, а также мультифрактального спектра, требуется чрезвычайно большое число пробных частиц, не достижимое в реальном эксперименте.

Глава IV. Анизотропные кластеры и их свойства.

Кластеры, выращенные на решетке, представляют не меньший интерес, чем безрешеточные. В ряде работ, посвященных исследованию таких кластеров, изучаются универсальные свойства таких кластеров и делаются противоречивые утверждения о них. Так, в работе [11] автор утверждает, что размерность кластера не зависит от типа используемой решетки. Позже это утверждение было опровергнуто в работах Туркевича и Шера [12] и в работах других авторов. Как было сказано в Главе I, сделать эффективный алгоритм, полностью соответствующий движению частиц на решетке с различной симметрией, сложно из-за то-

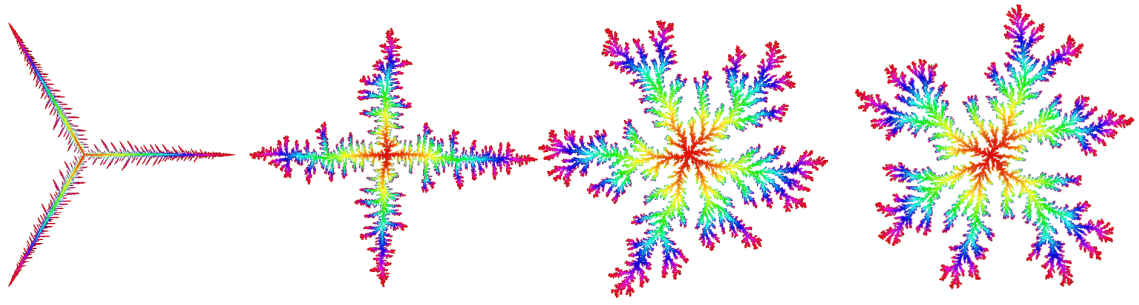


Рис. 5. Анизотропные кластеры, построенные с числом осей анизотропии $N_{fp} = 3, 4, 5, 6$.

го, что невозможно применить ни один из способов ускорения их движения. Микен [10] предложил использовать безрешеточный алгоритм, дополненный анизотропными правилами, применяющимися только при добавлении частиц к кластеру. Одна из разновидностей этого метода называется методом антенн - каждая частица кластера имеет N_{fp} антенн, при этом у всех частиц эти антенны ориентированы одинаковым образом. При касании кластера новая частица сдвигается к ближайшей антенне. Мы используем этот метод для построения кластеров с числом антенн равным 3,4,5,6,7 и 8. В пределе $N_{fp} \rightarrow \infty$ кластеры должны полностью совпадать с безрешеточными. Для изучения свойств таких кластеров мы используем метод измерения фрактальной размерности в пределе пробных частиц бесконечно малого размера и ансамбли из 1000 кластеров по 50 млн. частиц каждого типа. Изображения первого кластера из каждого ансамбля для $N_{fp} = 3, 4, 5, 6$ приведены на рисунке 5. У кластеров с тремя осями анизотропии наблюдается три главных ветви, расположенных вдоль этих же осей. Флуктуации направлений роста практически не наблюдаются, различия между разными кластерами из ансамбля несущественны. Несмотря на наличие большого свободного пространства между ветвями, частицы преимущественно осаждаются только на концах ветвей. У кластеров с числом осей, равным четырем,

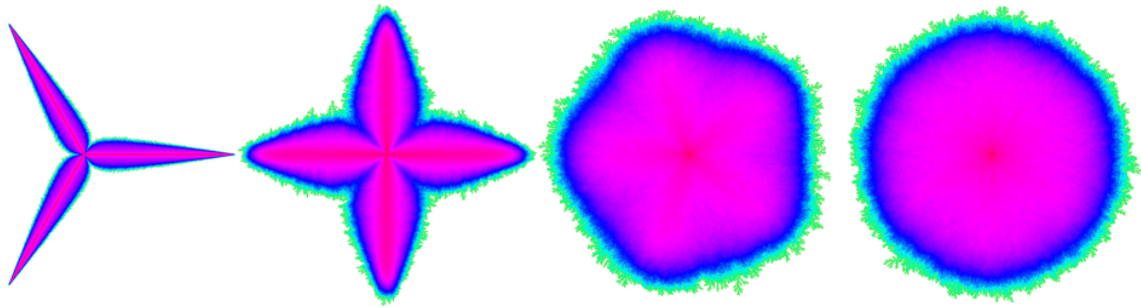


Рис. 6. Средняя плотность частиц на единицу поверхности для ансамбля анизотропных кластеров, построенных с числом осей анизотропии $N_{fp} = 3, 4, 5, 6$.

происходит утолщение ветвей, их число также совпадает с числом осей анизотропии. При увеличении N_{fp} визуальный анализ отдельного кластера становится затруднительным из-за роста флуктуаций. Для изучения их свойств мы построили среднюю плотность частиц на единицу площади (рис. 6) и среднюю плотность частиц по углу $P(\phi)$. Кластеры с $N_{fp} = 3, 4$ отличаются друг от друга по всем параметрам: число ветвей, зависимость $P(\phi)$. Их фрактальная размерность убывает логарифмически с размером кластера. Минимально возможное значение размерности равно 1 (при этом объекты перестают быть фракталами). Существуют предположения, что минимальное значение D составляет $3/2$ (см., например, [13, 14]). Полученные нами данные (рис. 7) не позволяет ни подтвердить, ни опровергнуть эти теории. При $N_{fp} > 5$ все отличия в свойствах кластеров исчезают, фрактальная размерность в пределах ошибки становится одинаковой (рис. 8). По-видимому, они принадлежат к одному классу универсальности.

В главе проводится анализ и сравнение полученных результатов с работами других авторов и с теоретическими предсказаниями. Так, фрактальная размерность кластеров не совпадает с предсказанной в работах Туркевича и Шера, причем наблюдаемая зависимость D от N_{fp} противоположна предсказанной ими. Проводится критический анализ предпо-

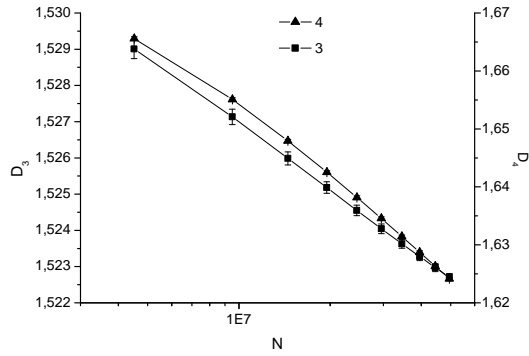


Рис. 7. Фрактальная размерность кла-
стеров с числом антенн 3 и 4.

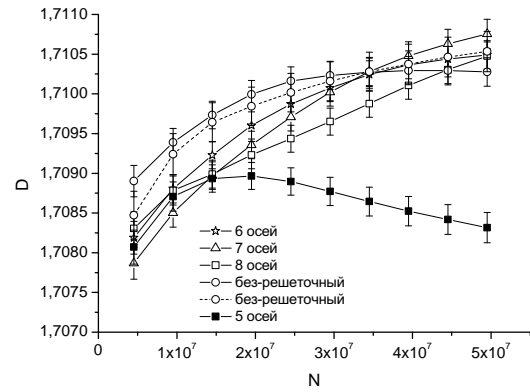


Рис. 8. Фрактальная размерность без-
решеточных кластеров и кластеров с
числом антенн 5-8.

ложения о независимости свойства кластеров от внутренней структуры, а также указываются возможные методы проверки этих предположений с использованием разработанных в диссертации методик генерации кластеров и их анализа.

Заключение

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. A.Yu. Menshutin, L.N. Shchur, *Test of multiscaling in DLA model using an off-lattice killing-free algorithm*, Phys. Rev. E **73** (2006) 011407.
2. A.Yu. Menshutin, L.N. Shchur, V.M. Vinokur, *Probing surface characteristics of diffusion-limited-aggregation clusters with particles of variable size*, Phys. Rev. E **75** (2007) 010401 (R).
3. A.Yu. Menshutin, L.N. Shchur, V.M. Vinokur, *Finite size effect of harmonic measure estimation in a DLA model: Variable size of probe particles*, Physica A, **387** (2008) 6299.

Литература

- [1] Мандельброт Б.Б., Фрактальная геометрия природы, Институт компьютерных исследований, Москва, 2002.
- [2] A. Bunde, S. Havlin (Eds.), *Fractals and Disordered Systems*, Springer, Berlin, 1996.
- [3] T.A. Witten and L.M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1400.
- [4] T.C. Halsey, *Phys. Today* **53** (2000) 36.
- [5] R.C. Ball, N.E. Bowler, L.M. Sander, E. Somfai, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 026109, E. Somfai, R.C. Ball, N.E. Bowler, L.M. Sander, *Physica A* **325** (2003) 19.
- [6] R.C. Ball and R.M. Brady, *J. Phys. A* **18** (1985) L809.
- [7] P. Meakin, *J. Phys. A* **18** (1985) L661.
- [8] P. Ossadnik, *Physica A* **176** (1991) 454.
- [9] C. Amitrano, A. Coniglio, P. Meakin and M. Zannetti, *Phys. Rev. B* **44** (1991) 4974.
- [10] P. Meakin, *Phys. Rev. A* **33** (1986) 3371.
- [11] P. Meakin, *Phys. Rev. A* **27** (1983) 1495.
- [12] L.A. Turkevich and H. Scher, *Phys. Rev. Lett* **55** (1985) 1026.
- [13] R.C. Ball, R.M. Brady, G. Rossi and B.R. Thomson, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1406.
- [14] M.N. Popescu, H.G.E. Hentschel and F. Family, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 061403.