

На правах рукописи

УДК 538.945 536.48

ПРОТОПОПОВ Иван Владимирович

**Квантовые флуктуации в системах
квазиклассических джозефсоновских контактов**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Фейгельман М.В.

Москва

2007

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| Глава 1. Когерентный транспорт в цепочке джозефсоновских ром- биков | 12 |
| 1.1. Модель и ее классические состояния | 12 |
| 1.2. Квантовые флуктуации ромбиков и сверхток | 16 |
| 1.3. Состояния с малым напряжением | 27 |
| 1.4. Обсуждение результатов | 31 |
| Глава 2. Цепочка ромбиков с беспорядком | 33 |
| 2.1. Постановка вопроса | 33 |
| 2.2. Эффективный гамильтониан цепочки ромбиков в присутствии бес- порядка | 36 |
| 2.3. Модуляция сверхтока емкостным затвором | 39 |
| 2.4. Влияние случайных зарядов на точку кроссовера | 43 |
| 2.5. Модуляция сверхтока емкостным затвором в цепочке с зарядовым беспорядком | 52 |
| 2.6. Влияние магнитного беспорядка на точку кроссовера | 54 |
| 2.7. Заключение | 57 |
| Глава 3. Дуальность сверхпроводник-изолятор в решетке джозеф- соновских проволочек | 59 |
| 3.1. Описание модели | 59 |
| 3.2. Классические состояния решетки | 62 |
| 3.3. Квантовые флуктуации и дуальное преобразование | 65 |
| 3.4. Дуальность функций отклика | 70 |
| 3.5. Квантовый переход сверхпроводник-изолятор | 72 |

| | |
|--|-----|
| 3.6. Сверхпроводящая плотность и фазовая диаграмма. | 75 |
| 3.7. Сильный зарядовый беспорядок | 81 |
| 3.8. Подведение итогов | 83 |
| Заключение | 85 |
| Приложение А. Чистая цепочка ромбиков | 87 |
| А.1. Конфигурации фаз в классических состояниях цепочки ромбиков . | 87 |
| А.2. Квазиклассический анализ $I(\tilde{\gamma})$ | 90 |
| Приложение Б. Действие для цепочки с беспорядком | 96 |
| Б.1. Связь коэффициентов q_n^k и $Q_n^{(m)}$ | 96 |
| Б.2. Операторы \hat{U}_n | 98 |
| Б.3. Вывод локального действия для цепочки с зарядовым беспорядком | 101 |
| Б.4. Действия на $4e$ - и $2e$ -траекториях | 103 |
| Б.5. Отклик $4e$ -сверхтока на внешний затвор при наличии зарядового беспорядка | 105 |
| Б.6. Вывод локального действия в присутствии магнитного беспорядка. | 106 |
| Приложение В. Сетка джозефсоновских проволочек | 107 |
| В.1. Дуальная джозефсоновская энергия в присутствии зарядовой фруст- рации | 107 |
| Литература | 109 |

Введение

Первые искусственные сетки джозефсоновских контактов были получены авторами работы [1] как часть проекта по разработке сверхпроводящих электронных устройств. Это достижение положило начало интенсивному изучению джозефсоновских сеток, интерес к которым не ослабевает на протяжении уже более чем четверти века.

Джозефсоновские сетки идеально подходят для исследования широкого круга явлений: классических и квантовых фазовых переходов, эффектов фрустрации, динамики вихрей. Первые системы этого типа строились на основе *классических* контактов с сопротивлением заметно меньше квантового сопротивления $R_Q = h/4e^2$ и джозефсоновской энергией E_J значительно превосходящей зарядовую энергию E_C . При выполнении этих условий квантовые флуктуации фазы сверхпроводящего параметра порядка несут незначительную роль и джозефсоновская сетка представляет собой экспериментальную реализацию классической XY-модели. В частности, в двумерной сетке имеет место переход типа Березинского-Костерлица-Таулеса [2, 3], экспериментально обнаруженный в [4]. При температуре выше $T_{ВКТ}$ флуктуации фазы разрушают глобальную фазовую когерентность и переводят сетку из сверхпроводящего состояния в металлическое.

К концу 1980-х годов развитие технологии изготовления мезоскопических структур привело к появлению джозефсоновских сеток с контактами субмикронного размера. При этом зарядовая энергия контактов сравнима с джозефсоновской, или даже превосходит ее. Соответственно в таких структурах важную роль играют квантовые флуктуации фазы сверхпроводящего параметра порядка, наиболее радикальным эффектом которых является существование квантового перехода сверхпроводник-изолятор по параметру E_J/E_C [5, 6] в двумерных решетках.

Несмотря на значительный прогресс в изучении квантовых сеток контактов, количественное описание таких систем сталкивается с серьезными трудностями,

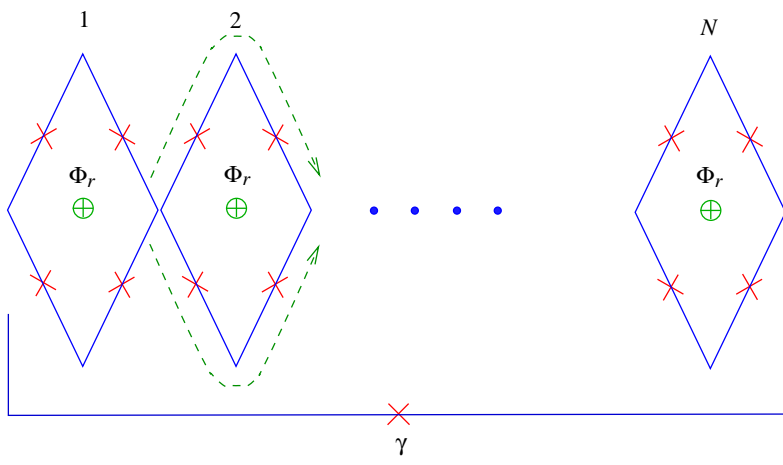


Рис. 1. Цепочка джозефсоновских ромбиков. Джозефсоновские контакты (четыре в каждом ромбике) отмечены крестиками. К концам цепочки приложена разность фаз γ . Пунктирными линиями показаны две траектории туннелирования куперовской пары в ромбике.

вызванными тем обстоятельством, что в точке перехода как правило джозефсоновская и зарядовая энергии порядка величины сверхпроводящей щели: $E_J \sim E_C \sim \Delta$. Соответственно, стандартный локальный по времени джозефсоновский гамильтониан, содержащий лишь сверхпроводящие фазы, не дает адекватного описания.

В настоящей диссертации изучаются квантовые флуктуации в системах квазиклассических контактов с $E_J \gg E_C$. Это условие приводит к малости фазовых флуктуаций в каждом отдельном контакте и дает возможность построения количественной теории. Подчеркнем однако, что, несмотря на квазиклассичность контактов, флуктуации во всей системе могут быть весьма сильными.

Мы рассмотрим две системы: одномерную цепочку ромбиков джозефсоновских контактов и двумерную сетку джозефсоновских проволочек на квадратной решетке.

Фрустрированная цепочка ромбиков, впервые описанная в работе [7], изображена на рис. 1. Она состоит из $N \gg 1$ ромбиков (каждый из которых — кольцо из четырех сверхпроводящих островков, соединенных четырьмя джозефсоновскими контактами), помещенных в поперечное магнитное поле. Магнитный поток через каждый ромбик Φ_r близок с половине сверхпроводящего кванта потока $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$.

Особые свойства описанной системы обусловлены тем обстоятельством, что при $\Phi_r = \Phi_0/2$ (максимально фрустрированная точка), каждый ромбик обладает двумя "классическими" (с определенными разностями фаз на контактах) состояниями, обладающими одинаковой энергией и отличающимися только направлением тока в ромбике. Соответственно, основное состояние классической, максимально фрустрированной цепочки многократно вырождено. Квантовые флуктуации в подобных системах интенсивно изучались в последние годы [8–14] (см. также экспериментальные работы [15–17]). Было установлено, что они могут приводить к формированию новых нетривиальных квантовых фаз [7, 18, 19]. В частности, в работе [7] Douçot и Vidal показали, что вблизи точки максимальной фрустрации в цепочке ромбиков существует "нематическая" жидкость Латтинжера, построенная из пар куперовских пар. Она характеризуется наличием квазидальнего порядка в корреляторах $\exp[2i(\phi_i - \phi_j)]$, где ϕ_i — фаза i -того островка в цепочке. При этом в обычном сверхпроводящем корреляторе $\exp[i(\phi_i - \phi_j)]$ квазидальнего порядка нет (см. по этому поводу также работу [20], содержащую результаты численного моделирования). В нематической фазе заряд по цепочке может переноситься только *парами* куперовских пар с зарядом $4e$. Отметим, что квантовые флуктуации стабилизируют нематическое состояние, в том смысле, что разрушающее его отклонение потока в ромбиках от половины кванта стремится к нулю с уменьшением квантовых флуктуаций.

Качественно это явление может также быть понято из следующих соображений. Внутри каждого ромбика имеются две траектории туннелирования куперовской пары с одного из "диагональных" островков на другой (см. рис. 1). При потоке в ромбике равном половине кванта, фазы набираемые куперовской парой на этих двух траекториях отличаются на π и полный матричный элемент туннелирования зануляется. В то же время, когерентный перенос пары куперовских пар не запрещается.

Для экспериментального обнаружения явления $4e$ -транспорта необходимо знать,

насколько он чувствителен к отклонению потоков в ромбиках от половины кванта. В работе [7] анализ системы производился в предположении, что емкость сверхпроводящих гранул C_0 доминирует над емкостью контактов C . В тоже время, в реальных цепочках имеет место обратная ситуация, прием $C/C_0 > 100$ [21]. В настоящей диссертации произведено детальное исследование свойств цепочки именно в этом, важном для эксперимента случае. В силу этого обстоятельства, везде ниже под зарядовой энергией мы понимаем величину $E_C = e^2/2C$.

На экспериментальном уровне, простейший способ обнаружения спаривания куперовских пар состоит в измерении соотношения ток-фаза для цепочки (например, если цепочка реализована в виде кольца, разность фаз γ на ее концах контролируется пропущенным в кольцо магнитным потоком $\gamma = 2\pi\Phi_c/\Phi_0$). Поскольку при $\Phi_r = \Phi_0/2$ ток в цепочке осуществляется зарядами $4e$, мы ожидаем, что в этом случае зависимость тока по цепочке от внешнего потока Φ_c является периодической с периодом $\Phi_0/2$. Ниже мы вычислим $\Phi_0/2$ -периодичный ток при $\delta\Phi \equiv |\Phi_r - \Phi_0/2| = 0$. Мы также покажем, что при малых $\delta\Phi$ ток состоит из двух компонент I_{4e} и I_{2e} с периодами $\Phi_0/2$ и Φ_0 соответственно. Первая компонента соответствует току пар куперовских пар, а вторая — току отдельных куперовских пар. При самых маленьких $\delta\Phi$ ток I_{4e} преобладает над I_{2e} . В дальнейшем мы будем называть этот случай $4e$ -режимом. При достаточно больших $\delta\Phi$ реализуется противоположная ситуация ($2e$ -режим). Ниже мы определим точку кроссовера $\delta\Phi_c$ между указанными двумя режимами.

Отметим сразу следующее обстоятельство. В этой диссертации мы рассматриваем модель цепочки, в которой емкость островков C_0 точно равна нулю. Строго говоря, бесконечная цепочка такого типа всегда находится в диэлектрическом состоянии и фазовые корреляционные функции экспоненциально спадают на больших расстояниях. Это означает, что для полного описания свойств реальной системы, емкость C_0 должна быть учтена, несмотря на свою малость по сравнению с C . Физически это происходит из-за того, что ненулевая емкость островков обес-

печивает обрезание взаимодействия зарядов в цепочке, которое в отсутствие C_0 линейно росло бы с расстоянием. В простейшей модели, когда емкостная матрица системы содержит только собственные емкости островков и взаимные емкости ближайших соседей, масштаб обрезания $\Lambda \sim \sqrt{C/C_0}$ (в единицах решетки). Однако в реальных системах из-за трехмерности электрического поля, емкости между островками, не являющимися ближайшими соседями, оказываются не малыми. В этих условиях, даже в двумерной решетке контактов $\Lambda \sim C/C_0$ и является весьма большой величиной [21]. Подчеркнем еще раз, что именно обрезание взаимодействия (и соответственно подавление флуктуаций) на масштабе Λ приводит к возможности существования квантовых фаз с квазидальним порядком. Тем не менее, на масштабах меньше Λ влияние емкости C_0 пренебрежимо мало.

В связи со всем выше перечисленным становится ясно, что результаты анализа цепочки ромбиков приведенного в этой диссертации, применимы к не очень большим конечным системам. В этом смысле описанная выше точка перехода между $2e$ - и $4e$ -режимами не соответствует какому-либо настоящему фазовому переходу, а представляет собой точку кроссовера. Кроссовер этот однако является весьма резким в большой системе (подробнее см. главу 1). С точки зрения бесконечных систем, результаты диссертации могут быть применены для описания корреляционных сверхпроводящих фаз на масштабах меньших Λ .

Вторым объектом исследования в настоящей диссертации является сетка джозефсоновских проволочек на квадратной решетке, изображенная на рисунке 2. Она отличается от обычной джозефсоновской сетки тем, что каждое ее ребро состоит из $N \gg 1$ джозефсоновских контактов. Везде ниже мы будем предполагать, что параметры системы удовлетворяют тем же основным требованиям, что и параметры цепочки ромбиков: $C \gg C_0$ и $E_J \gg E_C \equiv e^2/2C$. Нас будет интересовать точка квантового нультемпературного перехода сверхпроводник-изолятор в сетке проволочек, а также переходов из сверхпроводящего и изолирующего состояний в металлическую фазу.

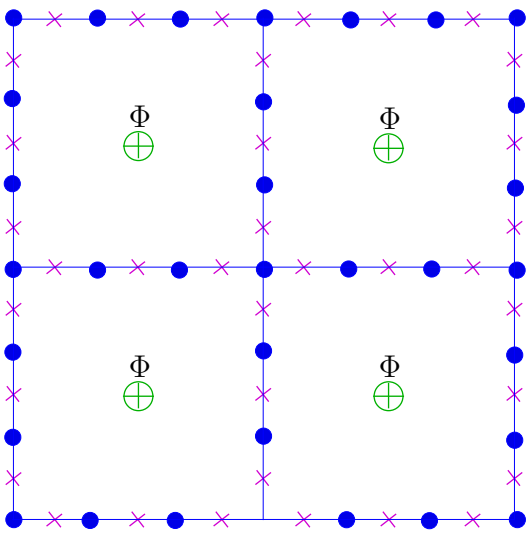


Рис. 2. *Сетка джозефсоновских проволочек.* Маленькие кружки изображают сверхпроводящие островки, соединенные джозефсоновскими контактами (крестики). Каждая ячейка решетки пронизана магнитным потоком Φ .

Квантовый фазовый переход сверхпроводник-изолятор в обычных сетках джозефсоновских контактов активно изучался в последние годы [5]. Теоретическое исследование этого вопроса в значительной мере основывается на дуальности между куперовскими парами и вихрями, существующими в сетке [22]. При этом подходе возникают однако две значительные трудности: а) для стандартного гамильтониана джозефсоновской решетки дуальное преобразование от куперовских пар к вихрям не может быть осуществлено точно и требует применения плохо контролируемых приближений (таких как приближение Виллэна [23, 24]); б) сравнение теории с экспериментом осложняется тем уже упоминавшимся обстоятельством, что в точке перехода $E_J \sim E_C \sim \Delta$ и описание системы в терминах локального по времени фазового гамильтониана вообще говоря незаконно; в) во всех реальных джозефсоновских сетках имеется случайная зарядовая фрустрация, вызванная заряженными примесями, локализованными в подложке или в диэлектрических прослойках контактов; об их влияние на переход сверхпроводник-изолятор известно очень мало.

Наиболее важным преимуществом предлагаемой в этой диссертации решетки проволок с точки зрения изучения перехода сверхпроводник-изолятор является то, что при $N \gg 1$ искомый переход имеет место в области параметров $E_J \gg E_C$ (при этом положение перехода существенно зависит от N , подробнее об этом в главе 3). Поэтому при его описании можно пренебречь квазичастичными эффектами (по крайней мере при достаточно низких температурах $T \ll \Delta$) и более того, трактовать флуктуации фазы в каждом отдельном контакте в квазиклассическом приближении. С точки зрения эксперимента, достоинством сетки проволок является тот факт, что исследование ее свойств можно производить при фиксированных параметрах контактов E_J и E_C , меняя только N .

Как мы видим физические свойства цепочки ромбиков и сетки проволок весьма различны. Имеются однако три обстоятельства, объединяющих эти системы и обуславливающие схожесть их теоретического описания: а) квазиклассичность контактов; б) сделанное нами предположение о форме емкостной матрицы систем; в) тот факт, что в обоих обсуждаемых случаях из-за наличия большого числа N соединенных параллельно контактов типичная разность ΔE между энергиями двух классических состояний системы (разность двух локальных минимумов полной джозефсоновской энергии) имеет порядок E_J/N . Как легко проверить, в рассматриваемом пределе, когда емкостная матрица системы содержит только емкости контактов, спектр спиновых волн в решетке является бездисперсионным и обладает щелью $\omega_p = \sqrt{8E_J E_C}$. В дальнейшем, мы будем предполагать выполненным условие $E_J/E_C \ll N^2$. При этом ΔE оказывается значительно меньше частоты $\omega_p = \sqrt{8E_J E_C}$. Это означает что наиболее "мягкими" (и соответственно важными) флуктуациями в системе являются квантовые проскоки фазы, смешивающие различные классические состояния. В действительности исследованию именно этого типа флуктуаций и посвящена данная диссертация. Отметим, что условие $E_J/E_C \ll N^2$ является в действительности весьма мягким: как будет очевидно из дальнейшего, его невыполнение заведомо означает малость

флуктуационных эффектов. Важность проскоков фазы для подобных систем была осознана Матвеевым, Ларкиным и Глазманом в работе [25].

Опишем теперь структуру диссертации.

Глава 1, посвященная изучению спаривания куперовских пар в чистой (без беспорядка) цепочке джозефсоновских ромбиков, построена следующим образом: в разделе 1.1 мы определим модель и классифицируем ее классические состояния; в разделе 1.2 мы получим эффективный гамильтониан, управляющий квантовыми проскоками фазы, вычислим сверхпроводящий ток как функцию отклонения потока $\delta\Phi$ и найдем критическое отклонение $\delta\Phi^c$, переводящее цепочку из $4e$ -режима в $2e$ -режим; в разделе 1.3 мы рассмотрим цепочку при заданном внешнем токе $I > I_c$ и определим напряжение $V(I)$ через вероятность некогерентных квантовых проскоков фазы; обсуждение и предложения для эксперимента будут представлены в разделе 1.4.

В главе 2 рассмотрено влияние замороженного беспорядка на когерентный транспорт в цепочке ромбиков. В разделе 2.1 мы сформулируем задачу и опишем возможные типы беспорядка. Раздел 2.2 будет посвящен выводу эффективного квантового гамильтониана в присутствии беспорядка. В разделе 2.3 мы обсудим модуляцию сверхтока в чистой цепочке искусственным емкостным затвором. В разделе 2.4 мы исследуем влияние на цепочку ромбиков замороженной случайной зарядовой фрустрации. Раздел 2.5 будет посвящен изучению воздействия емкостного затвора на цепочку со случайной зарядовой фрустрацией. В разделе 2.6 мы исследуем эффект спаривания куперовских пар в цепочке со слабо неоднородным потоком в ромбиках. Наконец в разделе 2.7 мы подведем итог исследования цепочки ромбиков, проведенного в первых двух главах диссертации.

Глава 3 посвящена изучению флуктуационных явлений в сетке джозефсоновских проволочек. В разделе 3.1 мы дадим точное описание используемой модели и необходимые для дальнейшего обозначения. В разделе 3.2 мы классифицируем классические состояния сетки. Раздел 3.3 будет посвящен построению дуально-

го преобразования, переводящего гамильтониан сетки проволок в стандартный гамильтониан джозефсоновской сетки. В разделе 3.4 мы обсудим трансформации функций отклика системы (сверхпроводящая плотность и диэлектрическая проницаемость) при дуальном преобразовании. В разделе 3.5 мы найдем точку квантового фазового перехода сверхпроводник-изолятор при максимальной магнитной фрустрации системы (поток на ячейку $\Phi = \Phi_0/2$) и в ее отсутствии. В разделе 3.6 мы вычислим сверхпроводящую плотность и диэлектрическую проницаемость сетки проволок (при $\Phi = 0$ и $\Phi = \Phi_0/2$) и найдем фазовую диаграмму системы на плоскости $(T, E_J/E_C)$. Раздел 3.7 будет посвящен краткому описанию свойств системы, сильно фрустрированной зарядами в подложке.

В **Заключении** мы сформулируем основные результаты диссертации.

Детали некоторых громоздких вычислений представлены в приложениях А, Б и В.

Когерентный транспорт в цепочке джозефсоновских ромбиков

1.1. Модель и ее классические состояния

В данной главе рассматривается спаривание куперовских пар в цепочке джозефсоновских ромбиков, рассмотренной впервые в работе [7]. Это явление обсуждалось во **Введении** на качественном уровне. Ниже будет построена теория, позволяющая дать ему количественное описание. Основой наших теоретических построений будет служить классификация классических состояний цепочки ромбиков, обсуждаемая в настоящем разделе.

Введем сначала необходимые обозначения. Рисунок 1.1 демонстрирует используемую нами систему нумерации контактов в цепочке. Разность фаз сверхпроводящего параметра порядка на m -том контакте в n -том ромбике мы обозначаем $\theta_n^{(m)}$; $\theta_n^{(m)}$ отсчитываются по часовой стрелке внутри каждого ромбика. Приложенный к концам цепочки фазовый сдвиг обозначается символом γ .

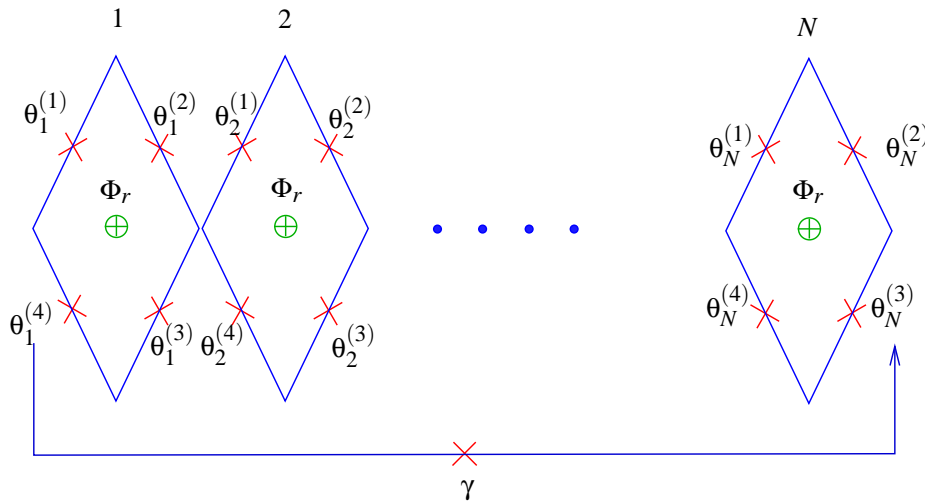


Рис. 1.1. Нумерация контактов в цепочке ромбиков.

Все контакты в цепочке считаются одинаковыми. Как уже было отмечено во **Введении**, мы предполагаем, что емкости островков C_0 пренебрежимо малы по сравнению с емкостями контактов C , а джозефсоновская и зарядовые энергии контактов удовлетворяют соотношению $E_J \gg E_C$.

Поток магнитного поля через каждый ромбик цепочки обозначается Φ_r и считается близким к половине кванта потока, так что $\delta\Phi \equiv |\Phi_r - \Phi_0/2| \ll 1$. Ниже мы часто будем использовать ассоциированную с потоком Φ_r фазу

$$\varphi = 2\pi \frac{\Phi_r}{\Phi_0}, \quad \delta \equiv \varphi - \pi \ll 1 \quad (1.1)$$

Цепочка описывается следующим действием в мнимом времени

$$S_E = \int dt \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 \left\{ \frac{1}{16E_C} \left(\frac{d\theta_n^{(m)}}{dt} \right)^2 - E_J \cos \theta_n^{(m)} \right\}. \quad (1.2)$$

Принимая во внимание, что поток через каждый ромбик равен Φ_r , а разность фаз приложенная к цепочке в целом равна $-\gamma$, мы получаем следующие дополнительные условия на фазы $\theta_n^{(m)}$

$$\sum_{m=1}^4 \theta_n^{(m)} = \varphi, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(-\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)} \right) = \gamma. \quad (1.4)$$

Сильная джозефсоновская связь между островками (условие $E_J \gg E_C$) позволяет использовать квазиклассическое приближение для определения энергетического спектра системы. При $E_C = 0$ фазы $\theta_n^{(m)}$ являются классическими переменными и состояния системы могут быть найдены минимизацией суммы джозефсоновских энергий ромбиков в действии (1.2). Пусть $\theta_n = -\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)}$, θ_n имеет смысл разности фаз параметра порядка вдоль диагонали n -го ромбика. Минимизацию джозефсоновской энергии удобно производить в два этапа. Прежде всего минимизируется энергия отдельного ромбика при фиксированном потоке через

ромбик и фиксированной разности фаз θ_n . После минимизации энергия цепочки принимает вид (при $\delta \ll 1$):

$$E = -2\sqrt{2}E_J \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4}\delta\sigma_n^z\right) \cos\left(\frac{\theta_n}{2} - \beta_n\right), \quad (1.5)$$

$$\sin\beta_n = \pm \frac{\sigma_n^z}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\delta}{4}\sigma_n^z\right), \quad \cos\beta_n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\delta}{4}\sigma_n^z\right). \quad (1.6)$$

Знаки плюс и минус в уравнении (1.6) относятся к случаю положительной (соответственно отрицательной) величины $\cos\frac{\theta}{2}$. Здесь мы ввели важное обозначение $\sigma_n^z = \text{sign}\sin\theta_n$. Как уже поминалось, при $\delta = 0$ каждый ромбик, рассматриваемый отдельно, имеет два классических основных состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ с одинаковыми энергиями [7]. Эти состояния отличаются только направлением сверхпроводящего тока, циркулирующего в ромбике. В одном них $\theta_n = \pi/2$, а в другом — $\theta_n = -\pi/2$. В случае цепочки, двоичная переменная σ_n^z определяет знак сверхтока в ромбике и то, к какому из состояний $|\pm\rangle$ близко данное состояние.

Теперь необходимо минимизировать энергию (1.5) по отношению к фазам θ_n при дополнительном ограничении (1.4). При малых δ и больших N мы получаем

$$E_{m,\sigma} \approx \frac{E_J\sqrt{2}}{4N} (\tilde{\gamma} - \pi N/2 - \pi S^z - 2\pi m)^2 - \sqrt{2}\delta S^z E_J + \text{Const}. \quad (1.7)$$

Здесь m — произвольное целое число, задающее ток, текущий по цепочке (ср. приложение А.1 и работу [25]). Кроме того

$$S_n^z = \frac{1}{2}\sigma_n^z, \quad S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^z, \quad \tilde{\gamma} = \gamma + \frac{N\varphi}{2}. \quad (1.8)$$

С физической точки зрения, первый член выражения (1.7) возникает из-за малых (порядка $1/N$) деформаций разностей фаз в цепочке, подстраивающихся под заданную γ , в то время как второй член описывает расщепление классических состояний каждого из ромбиков при отклонении от максимально фрустрированной точки.

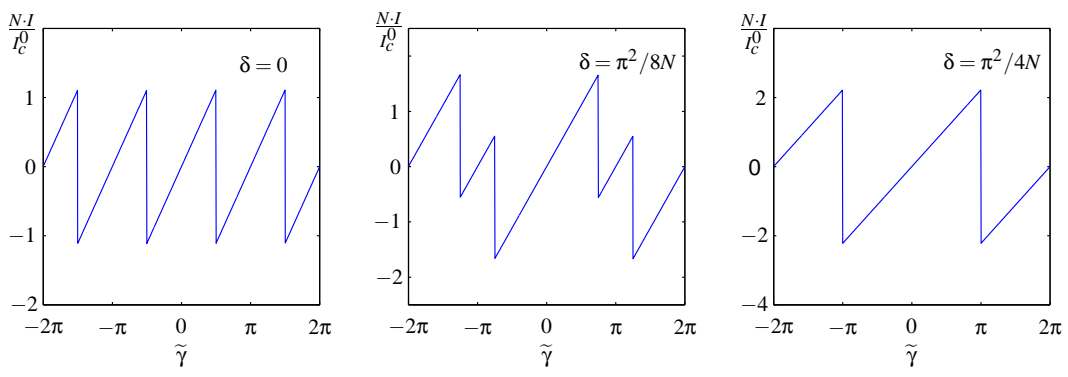


Рис. 1.2. Соотношение ток-фаза в классической цепочке. Три рисунка соответствуют трем разным $\delta = 0, \pi^2/(8N), \pi^2/(4N)$. По вертикальной оси отложен нормированный ток $N \cdot I/I_c^0$, где I_c^0 — критический ток одного контакта.

Отметим, что согласно (1.4) первоначально введенная разность фаз γ между конечными островками цепочки отсчитывалась по нижнему ряду контактов на рис. 1.1. Как легко видеть, $\tilde{\gamma}$ представляет собой разность фаз, отсчитанную вдоль середины цепочки и согласованную в этом смысле с ее симметрией. Именно эта величина будет фигурировать во всех дальнейших вычислениях.

Ниже (особенно в главе 2) нам понадобится знать не только энергии классических состояний (1.7), но и сами конфигурации разностей фаз $\theta_n^{(m)}$ в этих состояниях. Соответствующие выражения однако весьма громоздки и потому вынесены в приложение А.1.

В выражениях (1.7, 1.8) S_n^z можно рассматривать как z -проекцию спина $\frac{1}{2}$, описывающего двукратное вырождение классических состояний n -го ромбика. При этом S^z соответствует z -проекции полного спина \mathbf{S} , описывающего всю цепочку ромбиков. Классические состояния характеризуются проекцией спина σ_n^z для каждого ромбика и принимающая целые значения переменной m . Мы будем обозначать эти состояния $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ или $|m, \sigma \rangle$. Физически, классическое состояние цепочки задается полным током I вдоль цепи и направлениями локальных токов текущих в каждом ромбике.

На основании соотношения (1.7) можно определить ток-фазовую характери-

стику системы $I(\tilde{\gamma})$ в классическом режиме. В отсутствии квантовых флуктуаций, энергия основного состояния цепочки $E(\tilde{\gamma})$ определяется простой минимизацией (1.7) по m и S^z . Как легко установить, при $\delta > \pi^2/(4N)$ зависимость $I(\tilde{\gamma})$ представляет собой простую пилообразную линию с периодом 2π (рис. 1.1). При $\delta < \pi^2/(4N)$ на пиле появляется дополнительный зубец, растущий с уменьшением δ . В самой максимально фрустрированной точке $I(\tilde{\gamma})$ снова становится чисто пилообразной, но уже с периодом π . Мы видим, что при $\Phi_r = \Phi_0/2$ характеристика ток-фаза классической цепочки обладает аномальным периодом π , являющимся следствием спаривания куперовских пар. Однако область потоков Φ_r , в которой это явление может наблюдаться при увеличении числа ромбиков убывает как $1/N$ (ср. [7]).

Отличная от нуля кулоновская энергия E_C приводит к квантовым проскокам фазы в джозефсоновских контактах; эти процессы смешивают различные классические состояния, приводя к формированию полностью квантового основного состояния системы. В следующих разделах этой главы мы получим эффективный гамильтониан, действующий в пространстве классических состояний, найдем энергию основного состояния $E(\tilde{\gamma})$ и соответствующий сверхпроводящий ток в присутствии квантовых флуктуаций.

1.2. Квантовые флуктуации ромбиков и сверхток

В этом разделе мы рассматриваем квантовые флуктуации фаз $\theta_n^{(m)}$ при конечных E_C . Согласно (1.7), цепочка ромбиков обладает уже отмеченным во **Введении** общим свойством систем, обсуждаемых в этой диссертации: разность энергий двух ее классических состояний имеет порядок $\Delta E \sim E_J/N$. При выполнении условия $E_J/E_C \ll N^2$, ΔE оказывается значительно меньше частоты $\omega_p = \sqrt{8E_J E_C}$, ассоциированной с малыми колебаниями фаз. Соответственно, наиболее важным типом квантовых флуктуаций в системе являются проскоки фазы, перебрасываю-

щие цепочку из одного классического состояния в другое. Несмотря на близость энергий, различные классические состояния лежат далеко друг от друга в конфигурационном пространстве и разделены барьерами порядка E_J (см. приложение А.1). Поэтому при $E_J/E_C \gg 1$ матричный элемент, соответствующий *отдельному* проскоку фазы, мал.

Каждый проскок фазы представляет собой инстантон, начинающийся при $\tau = -\infty$ в одном из минимумов (1.7) джозефсоновской энергии системы и оканчивающийся в *ближайшем* минимуме при $\tau = +\infty$. Для их классификации удобно ввести следующее определение: мы будем говорить, что данный инстантон соответствует проскоку фазы в l -том контакте k -ного ромбика (проскоку фазы $\theta_k^{(l)}$), если на данной инстантонной траектории из всех разностей фаз $\theta_n^{(m)}$ наибольшее изменение претерпевает разность фаз $\theta_k^{(l)}$.

Из анализа расположения классических состояний в конфигурационном пространстве, проведенного в приложении А.1, следует, что в терминах переменных $\{\sigma_n^z\}$ и m имеются два типа инстантонов. Инстантоны первого типа меняют на единицу проекцию полного спина S^z , оставляя неизменной переменную m . Каждая траектория первого типа соответствует проскоку одной из фаз $\theta_k^{(1)}$ или $\theta_k^{(2)}$. Для определенности будем говорить ниже о проскоке фазы в первом контакте k -того ромбика, сопровождающемся *увеличением* S^z на единицу (процесс с *уменьшением* S^z получается просто обращением времени). Такой инстантон переводит систему из состояния $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ с $\sigma_k^z = -1$ в состояние $|m, \{\sigma_n^z + 2\delta_{nk}\}\rangle$. При этом фаза $\theta_k^{(1)}$ возрастает (при больших N) на $3\pi/2$, фазы $\theta_k^{(2)}$, $\theta_k^{(3)}$ и $\theta_k^{(4)}$ убывают на $\pi/2$, а все фазы $\theta_n^{(m)}$ с $n \neq k$ меняются на величину порядка $1/N$.

Инстантоны второго типа меняют S^z и m на единицу в противоположных направлениях, т.е. обеспечивают переход системы из состояния $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ в состояние $|m-1, \{\sigma_n^z + 2\delta_{nk}\}\rangle$ и обратно. Им соответствует проскок одной из фаз $\theta_k^{(3)}$ или $\theta_k^{(4)}$. При проскоке в третьем контакте $\theta_k^{(3)}$ возрастает на $2\pi/3$, а фазы $\theta_k^{(1)}$, $\theta_k^{(2)}$ и $\theta_k^{(4)}$ убывают на $\pi/2$.

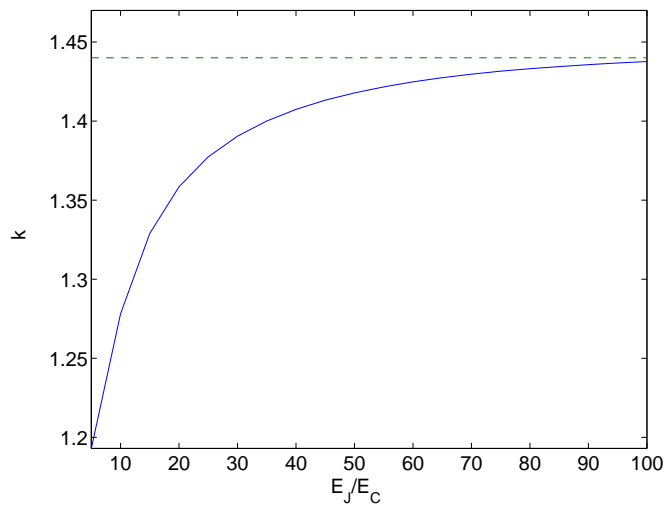


Рис. 1.3. Коэффициент k как функция E_J/E_C .

В силу симметрии системы, матричные элементы, соответствующие всем описанным выше процессам, одинаковы. Мы будем обозначать их через v . Как мы видим, при больших N каждый инстантон хорошо локализован в одном ромбике. При этом v мало отличается от амплитуды "переворота спина" в изолированного ромбике при $\Phi_r \approx \Phi_0/2$. В этом приближении мы можем использовать результат работы [19]:

$$v \approx k (E_J^3 E_C)^{1/4} \exp \left(-1.61 \sqrt{\frac{E_J}{E_C}} \right). \quad (1.9)$$

где k — численный коэффициент порядка единицы. Сравнение квазиклассического результата (1.9) результатами прямого численного расчета (Л.Б. Иоффе, частное сообщение) низлежащих уровней отдельного фрустрированного ромбика показывает, что коэффициент k растет от 1.3 до 1.44 при изменении отношения E_J/E_C от 10 до бесконечности (Рис. 1.3).

Поскольку матричный элемент v мал, влияние процессов проскока фазы на энергию основного состояния системы может быть рассмотрено в приближении сильной связи с помощью нижеследующего гамильтониана, учитывающего все

$$\begin{aligned}
 \widehat{H} |m, \{\sigma_n^z\}\rangle &= E_{m,\sigma} |m, \{\sigma_n^z\}\rangle + 2v \sum_{k=1}^N |m, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle \\
 &+ 2v \sum_{k=1, \sigma_k^z=1}^N |m+1, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle \\
 &+ 2v \sum_{k=1, \sigma_k^z=-1}^N |m-1, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Для анализа гамильтониана (1.10) удобно произвести преобразование Фурье по переменной m в соответствии с

$$|x, \sigma\rangle = \sum_m \exp \left\{ 2i \left(2m - \frac{\tilde{\gamma}}{\pi} + S^z + \frac{N}{2} \right) x \right\} |m, \sigma\rangle, \quad S^z = \sum_{n=1}^N s_n^z. \quad (1.11)$$

Отметим, что не все векторы нового базиса (1.11) независимы. Из (1.11) легко видеть, что $|x + \pi/2, \sigma\rangle = e^{-i\tilde{\gamma} + i\pi S^z + i\pi N/2} |x, \sigma\rangle$. Поэтому, рассматривая произвольное состояние системы $|\psi\rangle = \sum_{x,\sigma} \psi(x, \sigma) |x, \sigma\rangle$, необходимо наложить на волновую функцию $\psi(x, \sigma)$ граничное условие

$$e^{i\pi \widehat{S}^z + i\pi N/2} \psi(x + \pi/2, \sigma) = e^{i\tilde{\gamma}} \psi(x, \sigma). \quad (1.12)$$

Здесь мы ввели оператор \widehat{S}^z , действующий на спиновые переменные в соответствии со стандартными правилами.

Получающееся после преобразования Фурье уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\tilde{E} - 2w \cos 2x \cdot \widehat{S}^x + 2h \widehat{S}^z) \psi = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\tilde{E} = \frac{16NE}{\sqrt{2}E_J\pi^2}, \quad w = \frac{64Nv}{\sqrt{2}E_J\pi^2}, \quad h = \frac{8N\delta}{\pi^2}. \quad (1.14)$$

Заметим, что группа симметрии гамильтониана, соответствующего уравнению (1.13), включает преобразования $U_n = e^{i\pi n(\widehat{S}^z + N/2)} \widehat{T}_{\pi n/2}$. Здесь \widehat{T}_a — оператор

трансляции на расстояние a вдоль оси x . Уравнение (1.12) показывает, что параметр $\tilde{\gamma}$ характеризует различные неприводимые представления группы симметрии.

Уравнения (1.13,1.12) могут быть полностью исследованы в случае максимальной фрустрации, когда поток через каждый ромбик равен $\Phi_0/2$. В такой системе $h = 0$, и гамильтониан коммутирует с S^x . Однако, переменные x и S^x не могут быть напрямую разделены из-за граничного условия (1.12). Поэтому мы ищем волновую функцию в виде

$$\psi(x, \sigma) = e^{i\tilde{\gamma}} |S^x\rangle \phi(x) + e^{i\pi\hat{S}^z + i\pi N/2} |S^x\rangle \phi(x + \pi/2) \quad (1.15)$$

После подстановки (1.15) в (1.13) для $\phi(x)$ получается стандартное уравнение Матье:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (b - 2q \cos 2x)\phi = 0, \quad (1.16)$$

где $q = wS^x$. Граничное условие (1.12) теперь принимает вид:

$$\phi(x + \pi) = e^{2i\tilde{\gamma}} \phi(x). \quad (1.17)$$

Основное состояние системы, определяемой уравнениями (1.16, 1.17), соответствует максимальной абсолютной величине проекции спина S_x , равной $N/2$. Другими словами, в основном состоянии все ромбики цепочки находятся либо в симметричной, либо в антисимметричной суперпозиции своих (вырожденных) классических состояний. Таким образом имеются два вырожденных собственных состояния

$$|0_{\tilde{\gamma}}^{\pm}\rangle = \phi_{\tilde{\gamma}}(x)|S^x = N/2\rangle \quad \text{and} \quad |0_{\tilde{\gamma}}^{\mp}\rangle = \phi_{\tilde{\gamma}}(x + \pi/2)|S^x = -N/2\rangle = \hat{U}_1|0_{\tilde{\gamma}}^{\pm}\rangle, \quad (1.18)$$

с одинаковой энергией E_0 . Это вырождение является прямым следствием того, что при $h = 0$ (полностью фрустрированная цепочка) гамильтониан имеет два интеграла движения S^x и U_1 , которые не коммутируют друг с другом (поэтому двукратно вырождены все состояния, а не только основное). Состояния $|0_{\tilde{\gamma}}^{\pm}\rangle$ со-

ставляют базис, в котором оператор \hat{S}^x дигонален. Возвращаясь к исходной задаче, определяемой уравнениями (1.12,1.13) мы видим (в соответствии с (1.15)), что правильное (единственное) собственное состояние, подчиняющееся условию (1.12), представляет собой определенную линейную комбинацию состояний $|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle$ и $|0_{\tilde{\gamma}}^-\rangle$:

$$|G_{\tilde{\gamma}}\rangle = \frac{e^{i\tilde{\gamma}}|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle + |0_{\tilde{\gamma}}^-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.19)$$

диагонализующую оператор U_1 . Состояние $|G_{\tilde{\gamma}}\rangle$ аналогично состояниям $|G\rangle$ из работы [19], ср. уравнение (5) в [19].

Из граничного условия (1.17) следует, что сдвиг фазы $\tilde{\gamma}$ на π не меняет граничной задачи, определяемой уравнениями (1.16, 1.17). Поэтому энергия основного состояния системы, а вместе с ней и сверхпроводящий ток, является периодической функцией потока Φ_c с периодом $\Phi_0/2$.

При $Nw \sim N^2v/E_J \ll 1$ флуктуации ромбиков слабы, потенциал в (1.16) мал и его воздействие наиболее существенно, когда $4\Phi_c/\Phi_0$ является целым числом и уровни $E_{m,\sigma}$ вырождены. В этой ситуации применимо обычное приближение слабой связи и для сверхпроводящего тока в кольце мы получаем

$$I(\tilde{\gamma}) = \frac{2e}{\hbar} \frac{dE}{d\gamma} = \text{sign } \tilde{\gamma} \frac{\sqrt{2}I_c^0\pi}{4N} \left(1 - \frac{2|\tilde{\gamma}|}{\pi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - 2|\tilde{\gamma}|/\pi)^2 + (q/2)^2}} - 1\right). \quad (1.20)$$

Ток $I(\tilde{\gamma})$ описывается уравнением (1.20) при $-\pi/2 < \tilde{\gamma} < \pi/2$ является периодической функцией $\tilde{\gamma}$ с периодом π . Таким образом в режиме слабых флуктуаций зависимость $I(\tilde{\gamma})$ демонстрирует характерное "пилообразное" поведение, слегка сглаженное флуктуациями.

Противоположный предел $Nw \gg 1$ соответствует режиму сильных флуктуаций. В этом случае собственное значение \tilde{E} экспоненциально слабо зависит от фазы $\tilde{\gamma}$ [26]:

$$\tilde{E} = -2q + 16\sqrt{\frac{2}{\pi}}q^{3/4}e^{-4\sqrt{q}}(1 - \cos 2\tilde{\gamma}) \quad (1.21)$$

и для сверхтока в основном состоянии мы находим

$$I(\tilde{\gamma}) = 32 \cdot 2^{3/8} I_c^0 (v/E_J)^{3/4} \sqrt{N} \exp \left\{ -\frac{16 \cdot 2^{1/4}}{\pi} N \sqrt{\frac{v}{E_J}} \right\} \sin 2\tilde{\gamma}. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22), совместно с (1.9), представляет собой один из основных результатов данной работы: оно определяет амплитуду $4e$ -сверхтока в режиме полной фрустрации.

Обратимся теперь к исследованию ситуации общего положения, описываемой уравнениями (1.13) и (1.12). Как было упомянуто ранее, когда магнитный поток через отдельный ромбик слегка отличается от половины кванта потока, сверхпроводящий ток через кольцо имеет две компоненты I_{4e} и I_{2e} . В режиме сильных флуктуаций оба эти тока экспоненциально малы. При этом главный экспоненциальный множитель в выражениях для них можно найти на основе уравнения (1.13) используя квазиклассическое приближение.

Заметим, что уравнение (1.13) соответствует частице массы 1 со спином S , движущейся в одномерном потенциале

$$U(x, \vec{S}) = w \cos 2x \cdot S^x - hS^z, \quad (1.23)$$

причем энергия частицы $E^0 = \tilde{E}/2$. Таким образом, обозначая через θ и ϕ углы, определяющие направление спина, мы можем представить соответствующую амплитуду перехода в мнимом времени в виде функционального интеграла [27]

$$\langle \theta_2, \phi_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | \theta_1, \phi_1, x_1 \rangle = \int_{\theta_1, \phi_1, x_1}^{\theta_2, \phi_2, x_2} \mathcal{D}\Omega \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(iS(1 - \cos \theta) \dot{\phi} + \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x, \vec{S}) \right) \right\} \quad (1.24)$$

Для наших целей удобнее переписать выписанное выше выражение в иной форме,

также полученной в [27]:

$$\begin{aligned} & \left\langle \vec{S}_2, x_2 \left| e^{-T\hat{H}} \right| \vec{S}_1, x_1 \right\rangle = \\ & \int_{\vec{S}_1, x_1}^{\vec{S}_2, x_2} \mathcal{D}\vec{S} \mathcal{D}x \delta(\vec{S}^2 - S^2) \exp \left\{ - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(i \frac{S^x \dot{S}^y - \dot{S}^x S^y}{S + S^z} + \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x, \vec{S}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Мы проанализируем выражение (1.25) в пределе достаточно больших δ , когда $h \gg w$. При этом поле h в (1.23) фиксирует направление спина \vec{S} , так что S^x и S^y всегда малы. Поэтому действие в функциональном интеграле (1.24) может быть линеаризовано по отношению к S^x и S^y . После линеаризации переменная S^y может быть исключена с помощью уравнений движения. Замена переменных $S^x \rightarrow \sqrt{S\hbar}y$, $\tau \rightarrow \tau/h$ приводит к функциональному интегралу

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \int_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \mathcal{D}x \mathcal{D}y \exp(-S_E) \quad (1.26)$$

где действие

$$S_E = \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + U_{eff}(x, y) \}, \quad (1.27)$$

$$U_{eff}(x, y) = (y + d \cos 2x)^2 + d^2 \sin^2 2x, \quad d = \sqrt{\frac{w^2 S}{h^3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J}. \quad (1.28)$$

Соответствующие уравнения движения

$$\ddot{x} + 2dy \sin 2x = 0, \quad (1.29)$$

$$\ddot{y} - y - d \cos 2x = 0. \quad (1.30)$$

Используя квазиклассическое приближение, необходимо прежде всего определить классические минимумы потенциала (1.28). В рассматриваемом пределе $h \gg w$ мы находим, что имеются две группы минимумов потенциала U_{eff} (мы будем называть их четными и нечетными)

$$x = \pi n, \quad y = -d, \quad (1.31)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad y = d, \quad (1.32)$$

где n — произвольное целое. Все эти минимумы соответствуют одному и тому же значению $U_{eff} = 0$. Таким образом необходимо рассматривать два типа траекторий туннелирования. Траектории первого типа соединяют минимумы из одной группы, т.е. "четный-четный" или "нечетный-нечетный". Изменение переменной x на такой траектории равно $\pm\pi$, в то время как значения y в начале и конце траектории совпадают. Траектории второго типа соединяют минимумы противоположной четности. Изменение x на траектории второго типа равно $\pm\frac{\pi}{2}$. Из соотношений (1.11,1.13,1.12) нетрудно видеть, что изменение Δx переменной x вдоль траектории туннелирования находится во взаимно однозначном соответствии с элементарным зарядом, переносимым по цепочке ромбиков: $q_0 = \frac{4e}{\pi}\Delta x$. В соответствии с этим траектории первого типа ответственны за $4e$ -сверхток, в то время как траектории второго типа приводят к обычному $2e$ сверхпроводящему току. Амплитуды компонент сверхтока с экспоненциальной точностью определяются классическим действием на соответствующих траекториях (непосредственный вывод приведен в приложении А.2)

$$I(\gamma) = I_{2e} \sin \tilde{\gamma} + I_{4e} \sin(2\tilde{\gamma}), \quad (1.33)$$

где

$$I_{4e} = A_{4e} \exp(-S_E^{4e}), \quad I_{2e} = A_{2e} \exp(-S_E^{2e}), \quad (1.34)$$

и S_E^{4e} и S_E^{2e} — величина действия на траекториях первого и второго типов соответственно. В режиме сильных флуктуаций $Nw \gg 1$ оба действия S_E^{4e} и S_E^{2e} велики и, таким образом, сверхпроводящий ток определяется в основном процессами туннелирования с наименьшим действием.

Чтобы сравнить действия S_E^{4e} и S_E^{2e} , заметим, что система (1.29) и (1.30) имеет две характерные частоты. Первая из них $\omega_s = 1$ характеризует "спиновую" подсистему, в то время как вторая $\omega_x \sim d$, характеризует "x"-подсистему. Следовательно при $d \ll 1$, т.е. при достаточно большом отклонении потока δ , "спиновая

переменная" y является быстрой и может быть исключена в адиабатическом приближении. Это приводит к действию.

$$S_E = h \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{d^2}{4} \cos 4x \right\}, \quad (1.35)$$

$$S_E^{4e} \approx 2hd \quad \text{и} \quad S_E^{2e} \approx hd, \quad \text{при} \quad d \ll 1 \quad (1.36)$$

Доминирующим процессом является таким образом обычный $2e$ -транспорт. Сравним действие (1.35) с действием, соответствующим уравнению Шредингера (1.16)

$$S_E^0 = \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} + q \cos 2x \right\} \quad (1.37)$$

и используя (1.21), мы получаем амплитуду сверхпроводящего тока

$$I_{2e} \approx 32 \cdot 2^{1/4} I_c^0 \sqrt{N} \left(\frac{v}{E_J \sqrt{\delta}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{Nv}{E_J \sqrt{\delta}} \right\} \quad \text{при} \quad \frac{1}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J} \ll 1 \quad (1.38)$$

При малых отклонениях потока δ параметр $d \gg 1$ и спиновая переменная y является относительно медленной и практически не меняется на траектории первого типа. При этом доминируют $4e$ -траектории. Считая y постоянным, мы получаем

$$S_E^{4e} = h \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - d^2 \cos 2x \right\} = 4hd \quad (1.39)$$

Принимая во внимание также первый порядок теории возмущений по малой величине $1/d \ll 1$, находим $S_E^{4e} = h(4d - 1)$. Сравнение действия (1.39) with (1.37) с (1.21) позволяет определить также и предэкспоненциальный фактор в выражении для тока

$$I_{4e} \approx 128 \cdot 2^{1/4} I_c^0 \sqrt{N} \left(\frac{v}{E_J \sqrt{\delta}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{32\sqrt{2}}{\pi} \frac{Nv}{E_J \sqrt{\delta}} + \frac{8N\delta}{\pi^2} \right\} \quad \text{при} \quad \frac{1}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J} \gg 1 \quad (1.40)$$

Отметим, что при δ , определенном из уравнения $h = w$ (точка, в которой линейное приближение, использованное для описания спиновой подсистемы перестает работать), $4e$ -ток, определенный в (1.40), совпадает с точным результатом (1.22) для $\delta = 0$. В промежуточной области $d \sim 1$ мы анализируем уравнения

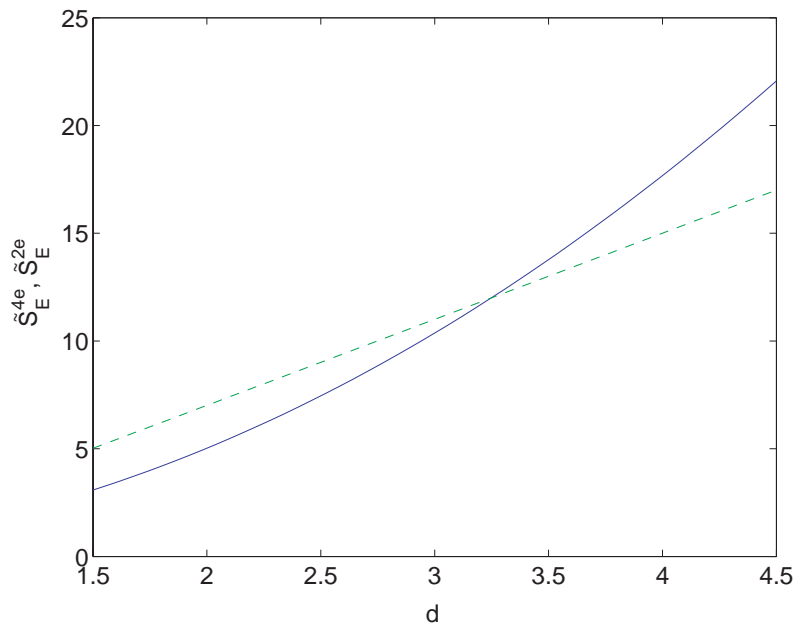


Рис. 1.4. Действие на 2e- и 4e-траекториях. Результаты численного расчета функций $\tilde{S}_E^{2e}(d)$ (сплошная линия) и $\tilde{S}_E^{4e}(d)$ (пунктирная линия).

(1.27), (1.29) и (1.30) численно. Величины S_E^{4e} и S_E^{2e} могут быть представлены в виде $S_E^{4e} = h\tilde{S}_E^{4e}(d)$, $S_E^{2e} = h\tilde{S}_E^{2e}(d)$. Функции $\tilde{S}_E^{4e}(d)$ и $\tilde{S}_E^{2e}(d)$, зависящие от единственного параметра d , рассчитываются численно. Результат представлен на рис. 1.4. Действия на траекториях обоих типов сравниваются при $d = d_0 \approx 3.2$, причем $\tilde{S}_E^{4e}(d_0) = \tilde{S}_E^{2e}(d_0) \approx 11.9$. Таким образом кроссовер между 4e-режимом и 2e-режимом происходит в точке

$$\delta\Phi = \delta\Phi^c = \left(\frac{v^2}{4\pi d_0^2 E_J^2} \right)^{1/3} \Phi_0 \approx 0.2 \left(\frac{v}{E_J} \right)^{2/3} \Phi_0 \quad (1.41)$$

Изменяя поток Φ_r в некоторой окрестности точки кроссовера (1.41), можно зарегистрировать обе компоненты тока I_{2e} и I_{4e} , однако (поскольку действия S_E^{4e} и S_E^{2e} пропорциональны числу ромбиков) их относительная величина очень чувствительна к отклонению $\Phi_r - \Phi_r^c$, аналогично сосуществованию фаз вблизи точки фазового перехода первого рода.

1.3. Состояния с малым напряжением

В предыдущем разделе мы получили оценки (1.20,1.22,1.38,1.40) для равновесного сверхпроводящего тока $I(\gamma)$ в кольце из $N \gg 1$ ромбиков с заданным *поток*ом через него. Отметим, что максимальное значение этого тока мало по сравнению с критическим током одного перехода I_c^0 даже в случае слабых квантовых флуктуаций, ср. уравнение (1.20). Причиной этого является тот факт, что до сих пор мы рассматривали полностью равновесный джозефсоновский ток, который должен быть 2π -периодической функцией фазы γ . В связи с этим в длинной цепочке разность фаз на каждом ромбике пропорциональна $1/N$, что приводит к $I_c \sim I_c^0/N$ в пределе слабых флуктуаций $Nw \ll 1$ (в области сильных флуктуаций I_c экспоненциально мало по N). Ясно однако, что при заданном внешнем *токе* через цепочку, $I \ll I_c^0$, цепочка будет находиться в некотором "почти сверхпроводящем" состоянии с очень малым напряжением, вызванным редкими проскоками фазы. Ниже мы рассматриваем режим относительно больших токов (точное условие приведено ниже), когда процессы туннелирования в различных ромбиках некогерентны. При этом среднее напряжение V на цепочке может быть оценено просто как N раз напряжение на отдельном ромбике. Ниже мы оцениваем вероятность проскока фазы в отдельном ромбике в единицу времени при фиксированном транспортном токе $I \ll I_c^0$ через ромбик и получаем вольт-амперную характеристику цепочки $V(I)$.

Вводя переменные $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)}$, $\chi_1 = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$, $\chi_2 = \theta^{(3)} - \theta^{(4)}$, мы можем переписать действие в мнимом времени для отдельного ромбика, несущего внешний ток I , в виде

$$S_E = \int d\tau \left\{ \frac{1}{32E_C} \left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 \right) + V(\theta, \chi_1, \chi_2) \right\}, \quad (1.42)$$

$$V(\theta, \chi_1, \chi_2) = -E_J \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\chi_1}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} + \frac{I}{I_c^0} \theta \right). \quad (1.43)$$

Здесь предположено, что магнитный поток через ромбик равен половине кванта потока.

Для того чтобы найти классические состояния ромбика, мы исключаем χ_1 и χ_2 из (1.43) и находим

$$V(\theta) = -E_J \left(2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| + \frac{I}{I_c^0} \theta \right). \quad (1.44)$$

Потенциал (1.44) имеет набор локальных минимумов: $\theta_{min} = \theta_0 + \pi m$, где θ_0 определяется уравнением

$$\sin \frac{\theta_0}{2} - \cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{I}{I_c^0}. \quad (1.45)$$

При надлежащем выборе фаз χ_1 и χ_2 каждая θ_{min} соответствует классическому состоянию, локализованному возле этого минимума. Из-за процессов квантового туннелирования все эти состояния являются метастабильными и имеют конечное время распада τ .

В квазиклассическом приближении (применимом при $E_J \gg E_C$) время распада τ определяется окрестностью классической траектории, начинающейся в одном из минимумов потенциальной энергии (1.43), проходящей вблизи другого и возвращающейся затем к первому минимуму [28, 29]. Ради конкретности мы будем говорить о скорости распада классического состояния с $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$ и $\theta = \theta_0$. Распад этого состояния идет по двум возможным траекториям (при $I > 0$). Одна из них проходит возле $\theta = \theta_0$, $\chi_1 = 2\pi$ и $\chi_2 = 0$, в то время как вторая — возле $\theta = \theta_0$, $\chi_1 = -2\pi$ и $\chi_2 = 0$. Обе эти траектории дают одинаковый вклад в вероятность распада.

Обозначим через $q = (\theta, \chi_1, \chi_2)^T$ — трехмерный вектор-столбец в координатном пространстве ромбика. Введем в рассмотрение также $q_0(\tau) = (\theta_0, 0, 0)^T$ — траекторию, соответствующую системе, покоящейся в минимуме потенциала (1.43), и $q_b(\tau)$ — траекторию, по которой происходит распад. Эта траектория может быть определена интегрированием классических уравнений движения при надлежащих

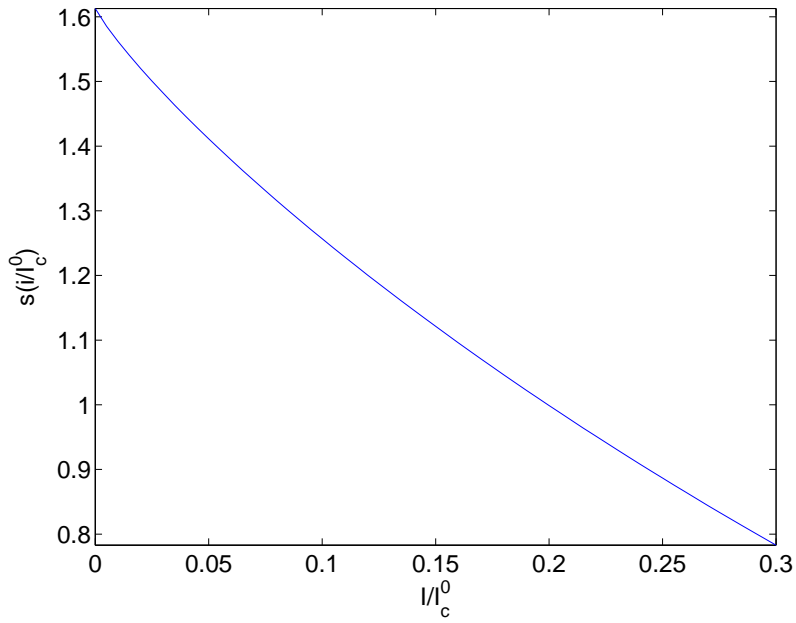


Рис. 1.5. Результаты численного расчета $s(I/I_c^0)$.

граничных условиях. Тогда вероятность распада в единицу времени метастабильного состояния определяется выражением [28, 29]

$$1/\tau = 2 \left(\frac{S_E[q_b]}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-S_E[q_b]} \left| \text{Det}' \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta q^2} \right)_{q=q_b} \right|^{-1/2} \left| \text{Det} \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta q^2} \right)_{q=q_0} \right|^{1/2} \quad (1.46)$$

где Det' означает, что нулевое собственное значение должно быть опущено при вычислении детерминанта.

После замены временного масштаба в соответствии с $\tau \rightarrow \tau/\sqrt{E_J E_C}$, действие на траектории может быть записано в виде $S_E[q_b] = 2\sqrt{E_J/E_C} s(I/I_c^0)$ и для обратного времени распада мы имеем

$$\frac{1}{\tau} \approx 2 \frac{(E_J^3 E_C)^{1/4}}{\hbar} K(I/I_c^0) \exp \left(-2\sqrt{\frac{E_J}{E_C}} s(I/I_c^0) \right). \quad (1.47)$$

Здесь $K(I/I_c^0)$ — численный коэффициент порядка единицы. Функция $s(I/I_c^0)$, зависящая от единственного параметра I/I_c^0 может быть рассчитана численно решением уравнений Лагранжа для действия (1.42) с соответствующими граничными условиями. Результат представлен на Рис. 1.5. Предположим, что ток I не очень мал, так что разность энергий $\delta V = \pi E_J I/I_c^0$ между двумя ближайши-

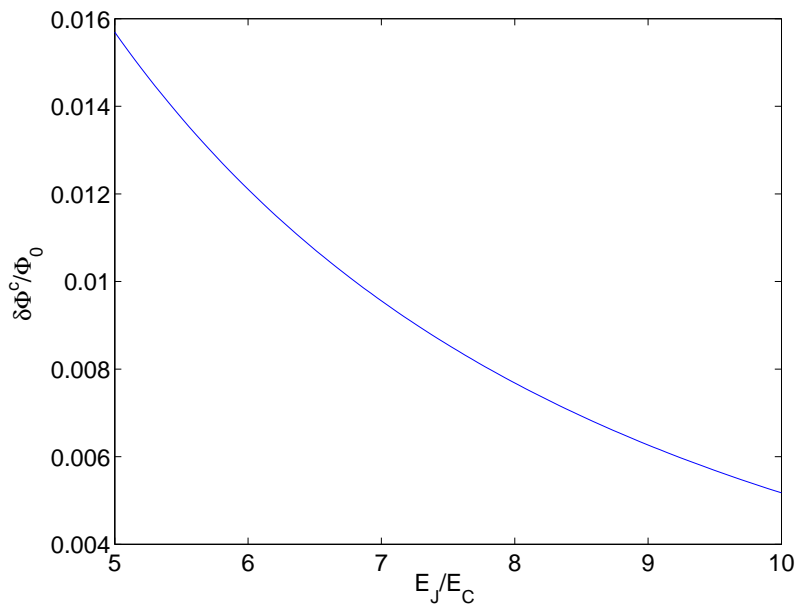


Рис. 1.6. Критическое отклонение $\delta\Phi^c$ в зависимости от отношения E_J/E_C .

ми минимумами потенциала (1.43) намного превосходит введенную выше квантовую амплитуду проскока фазы ν , т.е. примем, что $I \gg I_1 = I_c^0 \nu / \pi E_J$. В таком случае переходы внутри каждого ромбика между состояниями, соответствующими различным минимумам потенциала (1.43) некогерентны. Полное напряжение на цепочке может быть выражено через время распада τ соотношением $V = N\hbar\bar{\theta}/2e \approx \pi N\hbar/2e\tau$, так как при каждом прыжке системы из одного минимума в другой фаза θ меняется на π . Таким образом, окончательно мы находим вольт-амперную характеристику цепочки $V(I)$:

$$V(I) = \frac{\pi N E_J}{e} \left(\frac{E_C}{E_J} \right)^{1/4} K(I/I_c^0) \exp \left(-2\sqrt{\frac{E_J}{E_C}} s(I/I_c^0) \right) \quad (1.48)$$

Уравнение (1.48) описывает цепочку ромбиков с случае, когда внешний ток I достаточно велик: $I > I_c$, $I \gg I_1$. При соблюдении этого условия когерентность в системе разрушена. Этот предел противоположен рассмотренному в предыдущем разделе, где величина равновесного джозефсоновского тока определялась когерентными квантовыми флуктуациями всех ромбиков.

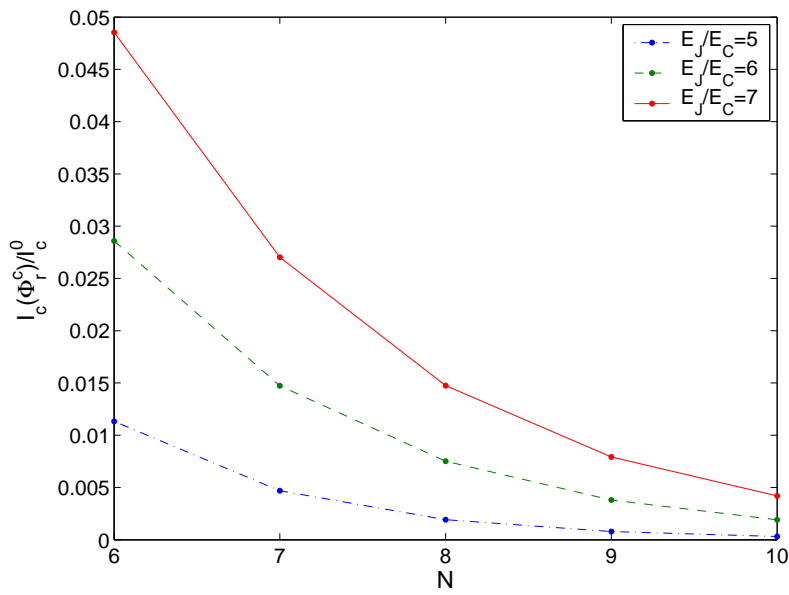


Рис. 1.7. Критический ток I_c в точке кроссовера в зависимости от N при различных E_J/E_C .

1.4. Обсуждение результатов

В данной главе приведено детальное вычисление сверхпроводящего тока в длинной цепочке фрустрированных ромбиков. Мы показали, что сверхток, переносимый квантами заряда $4e$ доминирует над $2e$ -сверхтоком в малой окрестности точки максимальной фрустрации $\Phi_r = \Phi_0/2$. Согласно (1.41), в режиме сильных флуктуаций критическое отклонение $\delta\Phi^c$ от этой точки, возвращающее систему к обычному $2e$ -сверхтоку, зависит от единственного параметра E_J/E_C . Эта зависимость представлена на Рис. 1.6. Мы видим, что $\delta\Phi^c$ быстро уменьшается с увеличением отношения E_J/E_C . Чтобы экспериментально обнаружить $4e$ -сверхток, необходимо контролировать поток Φ_r , проходящий через каждый ромбик, с точностью, превышающей $\delta\Phi^c$. Таким образом, отношение E_J/E_C не должно быть слишком большим.

В соответствии с (1.14), параметр $q = Nw/2$, управляющий силой флуктуаций в точке максимальной фрустрации, пропорционален N^2v/E_J , где v определяется уравнением (1.9). В режиме сильных флуктуаций (большие q) $4e$ - и $2e$ -сверхтоки экспоненциально малы, см. (1.34). Действия S_E^{4e} и S_E^{2e} в уравнении (1.34) пропорци-

ональны числу ромбиков N : $S_E^{2e} \sim N\delta\tilde{S}_E^{2e}$ и $S_E^{4e} \sim N\delta\tilde{S}_E^{4e}$. При достаточно больших N небольшие вариации величин $\delta\tilde{S}_E^{4e}$ и $\delta\tilde{S}_E^{2e}$ возле точки кроссовера Φ_r^c приводят к сильным изменениям соотношения между $2e$ - и $4e$ -сверхтоками. Поэтому следует ожидать, что кроссовер между $2e$ - и $4e$ -режимами будет резким при больших N и $N^2v/E_J \geq 1$. С другой стороны, сверхтоки I_{4e} и I_{2e} , подавленные квантовыми флуктуациями, должны быть не слишком малы, чтобы быть измеримыми. Качественная зависимость критического тока цепочки I_c в точке кроссовера от числа ромбиков при различных E_J/E_C представлена на Рис. (1.7). При расчете кривых, изображенных на Рис. 1.7, предэкспоненциальный множитель в выражении для критического тока был оценен как среднее геометрическое префакторов в (1.38) и (1.40). Оптимальный для эксперимента набор параметров представляется следующим: $5 \leq E_J/E_C \leq 7$, и $N \in (6, 10)$. В соответствии с Рис. 1.6 и Рис. 1.7, при этом $\delta\Phi^c/\Phi_0 \in (0.01 - 0.015)$ и $I_c \sim 10^{-2} - 10^{-3}I_c^0$.

Цепочка ромбиков с беспорядком

2.1. Постановка вопроса

Когерентный транспорт в чистой цепочке из $N \gg 1$ ромбиков был подробно рассмотрен в первой главе настоящей диссертации. Как было показано, задача о вычислении сверхтока в длинной цепочке с доминирующей емкостью контактов, может быть сведена к решению уравнения Шредингера, описывающего частицу с большим спином $S = N/2$ в периодическом магнитном поле $\sim \cos 2x$. На основе этого уравнения было вычислено критическое отклонение $\delta\Phi^c$ потока в ромбике от половины кванта, разрушающее $4e$ -корреляции. В квантовом режиме $\delta\Phi^c$ не зависит от числа ромбиков в цепочке и определяется выражением

$$(\delta\Phi^c)_{reg} \approx 0.2 \left(\frac{v}{E_J} \right)^{2/3} \Phi_0 \quad (2.1)$$

Как уже отмечалось, в полностью классической цепочке $\delta\Phi^c \sim 1/N$. Таким образом, квантовые флуктуации стабилизируют $4e$ -корреляции.

Во всякой реальной системе присутствуют однако как минимум два вида беспорядка: а) разброс потоков в ромбиках; б) случайные заряды в подложке (зарядовый беспорядок). Данная глава посвящена анализу влияния замороженного беспорядка этих двух типов на когерентный транспорт в цепочке ромбиков.

Источником первого вида беспорядка (в дальнейшем именуемого "магнитным") является неизбежный разброс площадей ромбиков. Экспериментально площади ромбиков можно контролировать с точностью выше одного процента. При этом флуктуации потока в ромбиках оказываются меньше критического отклонения $\delta\Phi^c$. Можно ожидать, что такой малый магнитный беспорядок не оказывает существенного влияния на спаривание куперовских пар. Количественно этот результат будет обоснован ниже.

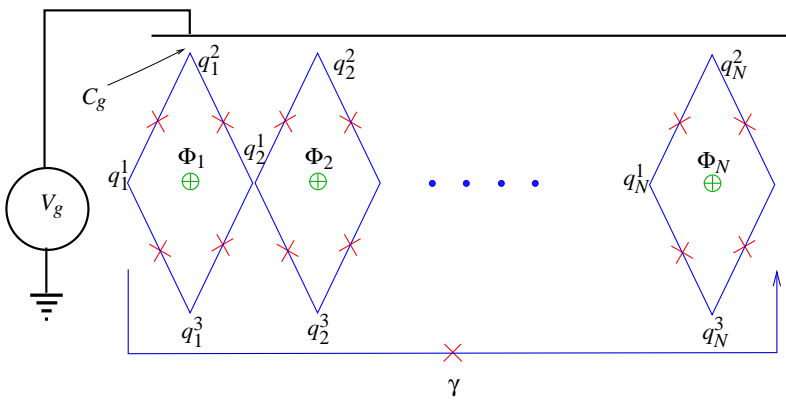


Рис. 2.1. Беспорядков в цепочке ромбиков. Индуцированные на островках заряды (параметры зарядовой фрустрации) обозначены q_n^k . На рисунке также показан емкостной затвор, связанный емкостной связью с одним рядом сверхпроводящих островков (см. раздел 2.3).

Вопрос о воздействии зарядового беспорядка на свойства системы гораздо менее тривиален. Источником этого беспорядка являются заряженные примеси, находящиеся в подложке или в диэлектрических прослойках джозефсоновских контактов. Такие примеси индуцируют на сверхпроводящих островках цепочки случайные заряды $2e q_n^k$ (здесь n — номер ромбика, а k — номер островка внутри ромбика, см. рис 2.1; с целью сделать переменные q_n^k безразмерными в качестве множителя явно выделен заряд куперовской пары $2e$). Соответственно, кулоновская энергия цепочки при наличии зарядового беспорядка имеет вид

$$H_C = \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{k_1, k_2=1}^3 \frac{1}{2} [C^{-1}]_{k_2 n_2}^{k_1 n_1} (Q_{n_1}^{k_1} - 2e q_{n_1}^{k_1}) (Q_{n_2}^{k_2} - 2e q_{n_2}^{k_2}) \quad (2.2)$$

Здесь Q_n^k — заряды сверхпроводящих островков (канонически сопряженные фазам), а $C_{k_2 n_2}^{k_1 n_1}$ — емкостная матрица системы.

Из-за зарядов q_n^k лагранжиан системы в мнимом времени приобретает добавку, являющуюся полной производной по времени

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - i \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 q_n^k \frac{d\phi_n^k}{dt} \quad (2.3)$$

Здесь \mathcal{L}_0 — лагранжиан чистой цепочки, определяемый соотношением (1.2).

В квазиклассическом приближении выписанная выше добавка к лагранжеану не меняет классические состояния системы, но модифицирует амплитуды перехода между ними: переход цепочки из одного классического состояния в другое по заданной траектории сопровождается теперь набором фазы (эффект Аронова-Кэшера [30]), причем полная амплитуда перехода является когерентной суммой амплитуд перехода по всем возможным путям. Таким образом, присутствие зарядов q_n^k приводит к уменьшению полного матричного элемента проскока фазы, ослаблению квантовых флуктуаций и, следовательно, к сужению области $4e$ -транспорта. Более того, реализация случайных зарядов общего вида с $q_n^2 \neq q_n^3$ разрушает симметрию между двумя путями туннелирования куперовской пары внутри ромбика, ответственную за блокировку обычного $2e$ -сверхтока при полной фрустрации. Соответственно, даже при потоке на ромбик равном точно половине кванта при наличии случайных зарядов в системе существует $2e$ -сверхток. Несмотря на это, как будет показано ниже, для типичных реализаций беспорядка $2e$ -компонента сверхтока мала по сравнению с $4e$ -компонентой вблизи точки максимальной фрустрации.

Необходимо отметить следующее обстоятельство: простое усреднение амплитуды проскока фазы по реализациям беспорядка обращает ее в ноль и приводит к принципиально неверному ответу (ср. [25]). Поэтому для количественного изучения свойств цепочки ромбиков со случайными зарядами необходим аккуратный анализ *типичных* реализаций беспорядка. Ниже описан метод, позволяющий вычислять амплитуды $2e$ - и $4e$ -компонент сверхток при произвольной реализации беспорядка и строить описание системы в виде функций распределения различных наблюдаемых величин.

2.2. Эффективный гамильтониан цепочки ромбиков в присутствии беспорядка

В этом разделе представлен вывод уравнения Шредингера, описывающего разупорядоченную цепочку. В основном он повторяет вывод проделанный в разделе 1.2 для случая чистой цепочки и основывается на тех же предположениях: а) контакты в цепочке являются квазиклассическими ($E_J \gg E_C$); б) число ромбиков в цепочке велико ($N \gg 1$); в) емкости сверхпроводящих островков пренебрежимо малы по сравнению с емкостями контактов ($C \gg C_0$).

Магнитный беспорядок модифицирует энергии классических состояний системы. При его наличии вместо (1.7) мы имеем

$$E_{m,\sigma} \approx \frac{E_J \sqrt{2}}{4N} (\tilde{\gamma} - \pi N/2 - \pi S^z - 2\pi m)^2 - \sqrt{2} \sum_{n=1}^N \delta_n S_n^z E_J + \text{Const}, \quad (2.4)$$

$$\delta_n = 2\pi \left(\frac{\Phi_n}{\Phi_0} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.5)$$

Здесь Φ_n — поток через n -ный ромбик, а остальные обозначения в точности совпадают с обозначениями главы 1.

Как уже упоминалось выше, зарядовый беспорядок не влияет на классические состояния системы, однако меняет матричные элементы переходов между ними. Для выписывания гамильтониана системы в приближении сильной связи удобно переписать добавку к действию в уравнении (2.3) в терминах разностей фаз на контактах

$$S = S_0 - i \int dt \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 Q_n^{(m)} \frac{d\theta_n^{(m)}}{dt} \quad (2.6)$$

Здесь $\theta_n^{(m)}$ — разность фаз на m -том контакте в n -ном ромбике (рис. 1.1). Точная связь параметров $Q_n^{(m)}$, фигурирующих в уравнении (2.6), с зарядами q_n^k зависит от того, рассматривается ли действительно замкнутая цепочка или же цепочка, соединенная с внешней электрической цепью. Детально этот вопрос обсуждается

в приложении Б.1. Конечные результаты, однако, мало чувствительны к точным граничным условиям, наложенным на цепочку. Для определенности ниже всюду будет рассматриваться наиболее реалистичный случай цепочки, являющейся частью сверхпроводящей цепи, и будут использоваться соответствующие выражения из приложения Б.1.

Как было установлено в главе 1, при больших N проскок фазы в первом контакте n -го ромбика, при котором разность фаз $\theta_n^{(1)}$ возрастает на $3\pi/2$, а разности фаз $\theta_n^{(2)}$, $\theta_n^{(2)}$ и $\theta_n^{(3)}$ убывают на $\pi/2$, переводит состояние $|m, \sigma\rangle$ в состояние $\hat{\sigma}_n^+ |m, \sigma\rangle$. Здесь, как и ранее, $\hat{\sigma}_n^+ = (\hat{\sigma}_n^x + i\hat{\sigma}_n^y)/2$, а $\hat{\sigma}_n^x$ и $\hat{\sigma}_n^y$ — матрицы Паули, действующие на спиновую переменную, описывающую n -ый ромбик. Все остальные фазы в цепочке меняются при этом на величину порядка $1/N$. Аккуратный анализ всех разностей фаз на основе формул приложения А.1, позволяет установить (с учетом (2.6)), что при проскоке фазы $\theta_n^{(1)}$ волновая функция системы приобретает фазовый множитель

$$\exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} - Q_n^{(3)} - Q_n^{(4)} \right) \right\} \quad (2.7)$$

Здесь p — некоторая комбинация параметров $Q_n^{(m)}$. Первое слагаемое в фигурных скобках в выражении (2.7) вызвано малой подвижкой всех фаз системы и не зависит от того, в каком из контактов происходит проскок фазы. Второе же слагаемое связано с "большим" изменением фаз $\theta_n^{(1)}$, $\theta_n^{(2)}$, $\theta_n^{(2)}$ и $\theta_n^{(3)}$.

На основании (2.7) мы приходим к заключению что проскоку фазы $\theta_n^{(1)}$ в приближении сильной связи отвечает член в гамильтониане системы вида

$$\hat{V}_1 = v \exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} - Q_n^{(3)} - Q_n^{(4)} \right) \right\} \hat{\sigma}_n^+ |m, \sigma\rangle \quad (2.8)$$

Здесь v дается формулой (1.9) главы 1.

Аналогичное рассмотрение позволяет найти добавки в гамильтониан, описывающие проскоки фазы в остальных контактах и записать полный гамильтониан

$$\begin{aligned}
\hat{H}|m, \sigma \rangle = & E_{m\sigma}|m, \sigma \rangle + v \sum_{n=1}^N \exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} - Q_n^{(3)} - Q_n^{(4)} \right) \right\} \hat{\sigma}_n^+ |m, \sigma \rangle \\
& + v \sum_{n=1}^N \exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(2)} - Q_n^{(1)} - Q_n^{(3)} - Q_n^{(4)} \right) \right\} \hat{\sigma}_n^+ |m, \sigma \rangle \\
& + v \sum_{n=1}^N \exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(3)} - Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} - Q_n^{(4)} \right) \right\} \hat{\sigma}_n^+ |m-1, \sigma \rangle \\
& + v \sum_{n=1}^N \exp \left\{ ip + \frac{i\pi}{2} \left(3Q_n^{(4)} - Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} - Q_n^{(3)} \right) \right\} \hat{\sigma}_n^+ |m-1, \sigma \rangle + h.c. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Величина p может быть устранена из гамильтониана (2.9) переопределением операторов σ_n и σ_n^+ , что и предполагается в дальнейшем сделанным.

После преобразования Фурье по переменной m в соответствии с

$$|x, \sigma \rangle = \sum_m \exp \left\{ 2i \left(2m - \frac{\tilde{\gamma}}{\pi} + S^z + \frac{N}{2} \right) x \right\} |m, \sigma \rangle, \quad (2.10)$$

мы приходим к искомому уравнению Шредингера, описывающему цепочку ромбиков с беспорядком

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\tilde{E} - 2w \sum_{n=1}^N a_n \hat{S}_n^x \cos(2x - \pi \kappa_n) \right. \\
\left. - 2w \sum_{n=1}^N b_n \hat{S}_n^y \sin(2x - \pi \kappa_n) + 2 \sum_n h_n \hat{S}_n^z \right) \psi = 0, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Параметры \tilde{E} и w здесь имеют тот же смысл, что и в главе 1 и даются прежними выражениями

$$\tilde{E} = \frac{16NE}{\sqrt{2}E_J\pi^2}, \quad w = \frac{64Nv}{\sqrt{2}E_J\pi^2}. \quad (2.12)$$

Параметры $h_n = 8N\delta_n/\pi^2$ описывают флуктуирующее от ромбика к ромбику отклонение потока от половины кванта. Наконец, коэффициенты a_n , b_n и κ_n описывают зарядовый беспорядок. Используя явные выражения для параметров $Q_n^{(m)}$

в терминах зарядов q_n^k , найденные в приложении Б.1, получаем:

$$a_n = \frac{\cos \pi q_n^2 + \cos \pi q_n^3}{2}, \quad b_n = \frac{\cos \pi q_n^2 - \cos \pi q_n^3}{2}$$

$$\kappa_n = \frac{q_n^2 + q_n^3}{2} - \sum_{k=1}^n (q_k^1 + q_k^2 + q_k^3) \quad (2.13)$$

Уравнение (2.11) должно решаться с граничным условием, фиксирующим разность фаз $\tilde{\gamma}$, приложенную к цепочке

$$e^{i\pi\hat{S}^z + i\pi N/2} \psi(x + \pi/2, \sigma) = e^{i\tilde{\gamma}} \psi(x, \sigma). \quad (2.14)$$

Как легко проверить, соотношения (2.11) и (2.14) обеспечивают неизменность свойств системы при изменении любого из параметров q_n^k на 1 (что соответствует изменению физического индуцированного заряда на $2e$). Таким образом, выведенный эффективный гамильтониан обладает той же симметрией, что и исходный микроскопический.

Уравнения (2.11) и (2.14) составляют основной результат этого раздела диссертации. Ниже на их основе будет определено влияние замороженного беспорядка на точку перехода между $4e$ - и $2e$ -режимами. Отметим, что присутствие беспорядка значительно усложняет задачу вычисления сверхтока в цепочке: в отличие от (1.13), гамильтониан (2.11) не коммутирует с полным спином цепочки. Этот факт значительно увеличивает число существенных степеней свободы системы и ведет к формированию сложного, зависящего от реализации беспорядка основного состояния.

2.3. Модуляция сверхтока емкостным затвором

Прежде чем приступить к анализу свойств разупорядоченной системы, полезно рассмотреть достаточно простую задачу о влиянии на эффект спаривания контролируемого емкостного затвора. В этом разделе мы будем предполагать, что

к максимально фрустрированной цепочке ромбиков подведены два затвора, один из которых связан емкостью \tilde{C}_g со всеми сверхпроводящими островками одновременно, в то время как другой затвор связан со всеми островками в одном ряду цепочки через емкость C_g (рис. 2.1). Соответствующие напряжения на затворах \tilde{V}_g и V_g выбираются таким образом, что полный индуцированный в цепочке заряд $\sum_{k,n} q_n^k = 3N\tilde{C}_g\tilde{V}_g + NC_gV_g$ равен нулю. Как будет показано ниже, сверхток в цепочке весьма чувствителен к напряжению V_g . Поскольку V_g входит в задачу исключительно через фазы набираемые системой на туннельных траекториях, эта зависимость сверхтока от напряжения на затворе является сугубо квантовым эффектом и может быть использована для экспериментальной демонстрации квантовой природы состояния цепочки вблизи максимально фрустрированной точки.

Рассматриваемая система описывается уравнениями (2.11, 2.14) с $h_n = 0$. Коэффициенты a_n , b_n и κ_n выражаются через потенциал V_g согласно (2.13)

$$a_n = \frac{\cos \frac{2\pi}{3} \frac{C_g V_g}{2e} + \cos \frac{\pi}{3} \frac{C_g V_g}{2e}}{2} \equiv a, \quad b_n = \frac{\cos \frac{2\pi}{3} \frac{C_g V_g}{2e} - \cos \frac{\pi}{3} \frac{C_g V_g}{2e}}{2} \equiv b, \\ \kappa_n = \frac{1}{6} \frac{C_g V_g}{2e} \quad (2.15)$$

Поскольку κ_n не зависит от номера ромбика n , ее можно устранить простым сдвигом переменной x , что и предполагается в дальнейшем сделанным.

Как и ранее, мы интересуемся в первую очередь свойствами цепочки ромбиков в квантовом режиме, когда сверхток сильно подавлен квантовыми флуктуациями разностей фаз $\theta_n^{(m)}$. Кроме того, благодаря специальному выбору приложенных потенциалов V_g и \tilde{V}_g , гамильтониан цепочки в рассматриваемом случае коммутирует с оператором квадрата полного спина системы. Это позволяет применить к уравнению (2.11) тот же квазиклассический метод, который был использован в главе 1 при определении критического отклонения $\delta\Phi^c$. Как легко установить, в режиме сильных флуктуаций, основное состояние соответствует максимальной возможной величине спина цепочки $S = N/2$. Вводя в рассмотрение интеграл по

спиновым когерентным состояниям [27] и производя замену переменной интегрирования τ согласно $\tau \rightarrow \tau/w$, мы приходим к действию

$$S_E = \frac{N}{2} \int d\tau \left(-i \cos \theta \dot{\phi} + \frac{w \dot{x}^2}{N} + \sin \theta (a \cos 2x \cos \phi + b \sin 2x \sin \phi) \right) \quad (2.16)$$

Здесь углы θ и ϕ параметризуют спиновые когерентные состояния.

Потенциальная энергия в действии (2.16) имеет две группы минимумов (ниже мы предполагаем, что коэффициенты a и b удовлетворяют неравенствам $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$, остальные случаи могут быть рассмотрены по симметрии):

$$x = \pi n, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \pi \quad (2.17)$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = 0, \quad (2.18)$$

где n — произвольное целое число. Рассуждения, полностью идентичные проведенным в главе 1 позволяют установить, что туннелирование между минимумами из одной группы ответственно за $4e$ -сверхток, в то время как амплитуда туннелирования частицы между минимумами из разных групп пропорциональна амплитуде $2e$ -сверхтока, т.е. имеют место соотношения (1.33, 1.34).

Действие (2.16) содержит малый параметр $w/N \sim v/E_J \ll 1$. Благодаря этому, соответствующие уравнения движения могут быть решены аналитически. Для величин S_{4e} и S_{2e} получаются аналитические выражения S_{4e} и S_{2e} .

$$\begin{aligned} S_{4e} &= \frac{2^{1/4} 16N}{\pi} \sqrt{\frac{v}{E_J} \max(|a|, |b|)} \\ &= \frac{16N}{2^{1/4} \pi} \sqrt{\frac{v}{E_J} \max(|\cos 2\kappa + \cos \kappa|, |\cos 2\kappa - \cos \kappa|)} \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2e} &= N \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{|a^2 - b^2|}}{\min(|a|, |b|)} = N \operatorname{arcsch} \frac{2 \sqrt{|\cos 2\kappa \cos \kappa|}}{\min(|\cos 2\kappa + \cos \kappa|, |\cos 2\kappa - \cos \kappa|)} \\ &\quad \kappa = \frac{\pi C_g V_g}{3 \cdot 2e} \quad (2.20) \end{aligned}$$

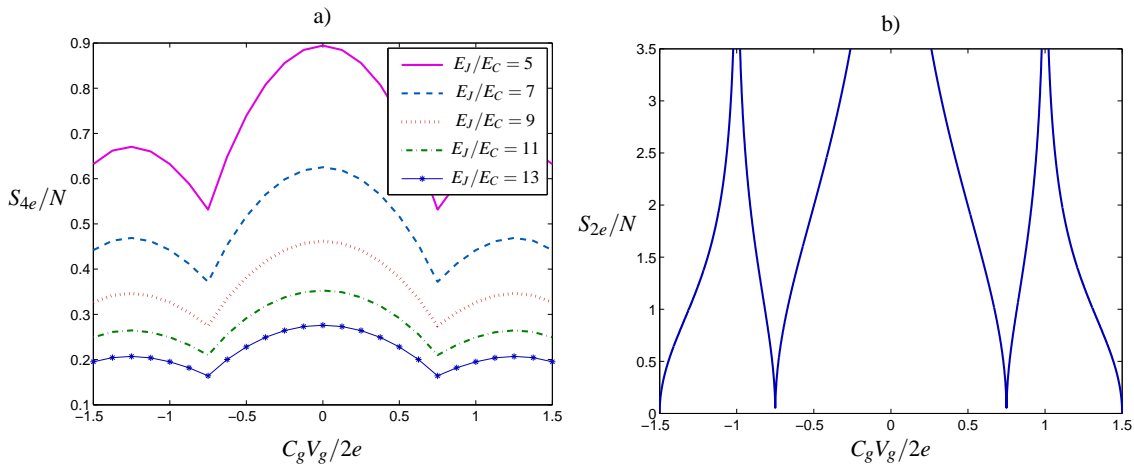


Рис. 2.2. Модуляция $4e$ - and $2e$ -сверхтока внешним емкостным затвором в чистой максимально фрустрированной цепочке. Рисунки а) и б) демонстрируют действия S_{4e} и S_{2e} контролирующие величины компонент сверхтока. При потоке через ромбик равном половине кванта, S_{4e} сильно зависит от отношения E_J/E_C , в то время как S_{2e} при больших E_J/E_C в основном определяется симметрией гамильтониана, как разъяснено в основном тексте.

Выписанное выше выражение для действия на $4e$ -траектории применимо не слишком близко к точке $a = b$.

Из уравнения (2.19) видно, что S_{4e} в основном определяется наибольшим из коэффициентов a и b и существенно зависит от отношения E_J/E_C . С другой стороны, для максимально фрустрированной цепочки, которая здесь рассматривается, действие на $2e$ -траектории не зависит от E_J/E_C в пределе $E_J/E_C \rightarrow \infty$. Главным фактором влияющим на S_{2e} является симметрия гамильтониана: при b (или a) равном нулю $2e$ -транспорт запрещен по симметрии и $S_{2e} = \infty$; включение ненулевого b нарушает симметрию и приводит к появлению $2e$ -сверхтока. Зависимость S_{4e} и S_{2e} от $C_g V_g$ определяемая уравнениями (2.19, 2.20) показана на рисунке 2.2.

Необходимо подчеркнуть два важных обстоятельства: а) $2e$ -сверхток доминирует над током пар куперовских пар только в малых окрестностях точек $C_g V_g/2e = 3/4, 3/2$ и т.д., в которых достигается равенство $a = b$; б) в рассматриваемой цепочке без беспорядка изменение $4e$ -действия при приложении напря-

жения на затвор отрицательно и пропорционально числу ромбиков, т.е. внешний потенциал V_g приводит к значительному росту $4e$ -сверхтока.

2.4. Влияние случайных зарядов на точку кроссовера

В этом разделе изучается влияние случайных зарядов на эффект спаривания в цепочке ромбиков. При этом предполагается отсутствие в системе магнитного беспорядка так что в уравнении (2.11) все $h_n = h$. Как уже отмечалось, даже в максимально фрустрированной точке $h = 0$ при наличии случайных зарядов, симметрия уравнения Шредингера (2.11) вообще говоря *не* запрещает $2e$ -сверхток. Причина этого кроется в том обстоятельстве, что несимметричные реализации случайных зарядов с $q_n^{(2)} \neq q_n^{(3)}$ (и потому $b_n \neq 0$) разрушают симметрию между двумя траекториями туннелирования куперовской пары внутри ромбика. Конечно, случайные заряды сохраняют классические состояния системы и в полностью классической максимально фрустрированной цепочке $2e$ -компонента сверхтока отсутствует, однако в полном квантовом гамильтониане задачи соответствующая симметрия отсутствует. Можно однако надеяться, что для типичных реализаций случайных зарядов и $\Phi_r = \Phi_0/2$ $2e$ -сверхток мал по сравнению с $4e$ -током. Действительно, если хотя бы в одном ромбике $b_n = 0$ (или $a_n = 0$), то $2e$ -транспорт в цепочке полностью блокирован. К сожалению, количественный анализ *максимально фрустрированной* цепочки ромбиков с зарядовым беспорядком оказывается затруднительным, поэтому ниже развивается теория, описывающая систему при достаточно больших отклонениях потока в ромбиках от половины кванта в том смысле, что в уравнении (2.11) $h \gg w$. Напомним, что в чистой цепочке с большим отношением E_J/E_C кроссовер между $4e$ - и $2e$ -происходит именно в этой области параметров. Как оказывается, аналогичная ситуация имеет место и в разупорядоченной цепочке.

Трудность рассматриваемой задачи состоит в том, что квазиклассическое при-

ближение, использованное в главе 1 для нахождения сверхтока в режиме сильных флуктуаций, не может быть применено здесь напрямую из-за большого числа спиновых степеней свободы. Чтобы избавиться от них, рассмотрим статистическую сумму системы, описываемой уравнениями (2.11, 2.14) с $h_n = h$. Она может быть представлена в виде

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) \exp \left(- \int_0^\beta \frac{\dot{x}^2}{2} \right) \prod_{n=1}^N \text{Tr} \left[\widehat{U}_n(\beta) \right] \quad (2.21)$$

где β — обратная температура, $\beta \rightarrow \infty$. Операторы \widehat{U}_n действуют каждый в пространстве состояний спина $\frac{1}{2}$ и являются функционалами от $x(\tau)$ определенными согласно уравнениям

$$\frac{d\widehat{U}_n}{d\tau} = - \left(w f_n(\tau) \widehat{S}^x + w g_n(\tau) \widehat{S}^y - h \widehat{S}^z \right) \widehat{U}_n \quad (2.22)$$

$$f_n(\tau) = a_n \cos(2x(\tau) - \pi \kappa_n), \quad g_n(\tau) = b_n \sin(2x(\tau) - \pi \kappa_n) \quad (2.23)$$

Уравнение (2.22) может быть решено в явном виде в области параметров $h \gg w$. В результате решения, подробно описанного в приложении Б.2, получается аналитическое выражение для следа оператора \widehat{U}_n

$$\begin{aligned} \text{Tr} \widehat{U}_n(\beta) = & \exp \left(\frac{\beta h}{2} + \frac{w^2}{4h^2} (f_n(0) - i g_n(0)) (f_n(\beta) + i g_n(\beta)) \right. \\ & \left. + \frac{w^2}{8} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (f_{n1} f_{n2} + g_{n1} g_{n2}) D(\tau_1 - \tau_2) + i \frac{w^2}{4} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 f_{n1} g_{n2} \widetilde{D}(\tau_1 - \tau_2) \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь

$$f_{ni} = f_n(\tau_i), \quad g_{ni} = g_n(\tau_i), \quad i = 1, 2, \quad (2.25)$$

$$D(\tau_1 - \tau_2) = e^{-h|\tau_1 - \tau_2|}, \quad \widetilde{D}(\tau_1 - \tau_2) = e^{-h|\tau_1 - \tau_2|} \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \quad (2.26)$$

Подстановка (2.24) в (2.21) дает *нелокальное* эффективное действие для переменной x .

Два свойства выражения (2.24) очень важны для дальнейшего. Во-первых $\ln \text{Tr } U_n(\beta)$ является билинейным функционалом от $\sin x(\tau)$ и $\cos x(\tau)$. Во-вторых, ядра $D(\tau)$ и $\tilde{D}(\tau)$ не зависят от номера ромбика. При этом $D(\tau)$ пропорционально функции Грина гармонического осциллятора в мнимом времени

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - h^2 \right) D(\tau_1 - \tau_2) = -2h\delta(\tau_1 - \tau_2), \quad (2.27)$$

а $\tilde{D}(\tau)$ пропорционально производной от $D(\tau)$.

В силу вышеперечисленных свойств (2.24) в функциональном интеграле по x оказывается возможным произвести преобразование Хабборда-Стратоновича и сделать действие локальным ценой введения двух дополнительных переменных y и z . Эта процедура подробно описана в приложении Б.3. В результате для статсуммы мы получаем

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) \mathcal{D}y(\tau) \mathcal{D}z(\tau) e^{-S[x(\tau), y(\tau), z(\tau)]} \quad (2.28)$$

$$S = h \int \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \sqrt{\frac{A_+ d^2}{N}} y \cos 2x \right. \\ \left. + \sqrt{d^2 \left(\frac{A_-}{N} - \frac{C^2}{NA_+} \right)} z \sin 2x + i \frac{Cd}{\sqrt{NA_+}} \dot{y} \sin 2x - \frac{d^2 C^2}{2NA_+} \sin^2 2x \right) d\tau \quad (2.29)$$

Здесь

$$d = \sqrt{\frac{w^2 N}{2h^3}} = \frac{\sqrt{2\pi} v}{\delta^{3/2} E_J}, \quad (2.30)$$

$$A_{\pm} = A_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + A_3^2}, \quad C = \sum_{n=1}^N a_n b_n, \quad A_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2), \\ A_2 = \sum_{n=1}^N (a_n^2 - b_n^2) \cos 2\pi \kappa_n, \quad A_3 = \sum_{n=1}^N (a_n^2 - b_n^2) \sin 2\pi \kappa_n \quad (2.31)$$

С технической точки зрения получение выражений (2.28, 2.29) является самым важным шагом вычислений. После нахождения представления для статсуммы да-

ваемого (2.28, 2.29) можно почти дословно применить рассуждения, использовавшиеся в главе 1, и получить (в пределе сильных флуктуаций) амплитуды $2e$ - и $4e$ -сверхтоков.

Важнейшим свойством выписанного выше действия является то, что случайный потенциал в нем задается набором всего трех случайных параметров A_+ , A_- и C . Более того, будучи суммами большого числа независимых случайных слагаемых, A_+ , A_- и C обладают гауссовой статистикой, описывающей все типичные реализации беспорядка. Поскольку свойства системы периодичны по параметрам q_n^k с периодом 1, сильный зарядовый беспорядок может моделироваться равномерным распределением q_n^k на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. При этом статистика потенциала задается корреляторами (выписаны только ненулевые корреляторы):

$$\begin{aligned} \langle A_1 \rangle &= \frac{N}{4}, & \langle A_1^2 \rangle &= \frac{N^2}{16} + \frac{N}{64}, \\ \langle A_2^2 \rangle &= \langle A_3^2 \rangle = \frac{N}{8}, & \langle C^2 \rangle &= \frac{N}{64} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Описанное выше свойство действия (2.29) позволяет находить интересующие нас величины при фиксированной реализации беспорядка и лишь затем производить усреднение по параметрам, описывающим случайный потенциал. Этой стратегии мы и будем придерживаться ниже. Основным объектом исследования будет при этом точка кроссовера между $2e$ - и $4e$ -режимами. Сначала будет найден критерий, позволяющий определить по заданным параметрам E_J/E_C , $\delta\Phi_r$, A_{\pm} и C находится ли система в $2e$ - или $4e$ -режиме. Затем будет дано статистическое описание точки кроссовера.

Как и прежде, в режиме сильных флуктуации амплитуды компонент сверхтока контролируются соответствующими величинами S_{4e} и S_{2e} . Для их нахождения, заметим прежде всего, что для типичных реализаций беспорядка $A_{\pm} \sim N$, в то время как $C \sim \sqrt{N}$. Поэтому в действии (2.29) все члены, содержащие C , малы по параметру $1/\sqrt{N}$ и могут быть опущены.

Действия S_{4e} и S_{2e} , зависящие от E_J/E_C , $\delta\Phi_r$ и коэффициентов A_{\pm} могут быть

найденны численно. В пределе

$$A_+ d^2/N \gg 1, \quad A_+ - A_- \ll A_+ \quad (2.33)$$

возможен также аналитический расчет, детали которого представлены в приложении Б.4. В результате получаем

$$S_{2e} = h \sqrt{\frac{d^2 (A_+ - A_-)}{N} \left(1 + 2 \frac{(A_+ + A_-) d^2}{N} \right)} \quad (2.34)$$

$$S_{4e} = 4h \sqrt{\frac{A_+ d^2}{N}}, \quad d = \frac{\sqrt{2\pi} v}{\delta^{3/2} E_J}, \quad h = \frac{8N\delta}{\pi^2}. \quad (2.35)$$

По определению линией кроссовера между 2e- и 4e-режимами мы называем те точки в пространстве параметров системы, где $S_{4e} = S_{2e}$. Уравнения (2.34, 2.35) дают возможность найти асимптотическое поведение линии кроссовера в пределе, задаваемом соотношениями (2.33). Для этого удобно ввести новые переменные u и v согласно

$$u = d^2 \frac{(A_+ - A_-)}{N}, \quad v = \frac{d^2 (A_+ + A_-)}{2N} \quad (2.36)$$

Заметим, что по определению $v > u/2$. В этих координатах при $v \gg 1$ линия кроссовера задается уравнением

$$|u| = u(v) \approx \frac{4v}{v-2} \rightarrow 4, \quad v \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

Та же линия кроссовера может быть извлечена из численного нахождения экстремалей действия (2.29). Результат изображен сплошной линией на рисунке 2.3. Пунктирная линия на этом рисунке изображает линию кроссовера в приближении (2.37).

С помощью полученных результатов, для любой данной конфигурации случайных зарядов (характеризуемой параметрами A_+ и A_-) в принципе можно определить, находится ли цепочка в режиме с доминирующим 4e-сверхтоком или нет. Конечно, экспериментальное определение A_{\pm} не представляется возможным. Поэтому необходимо выработать статистическое описание цепочки. Основой

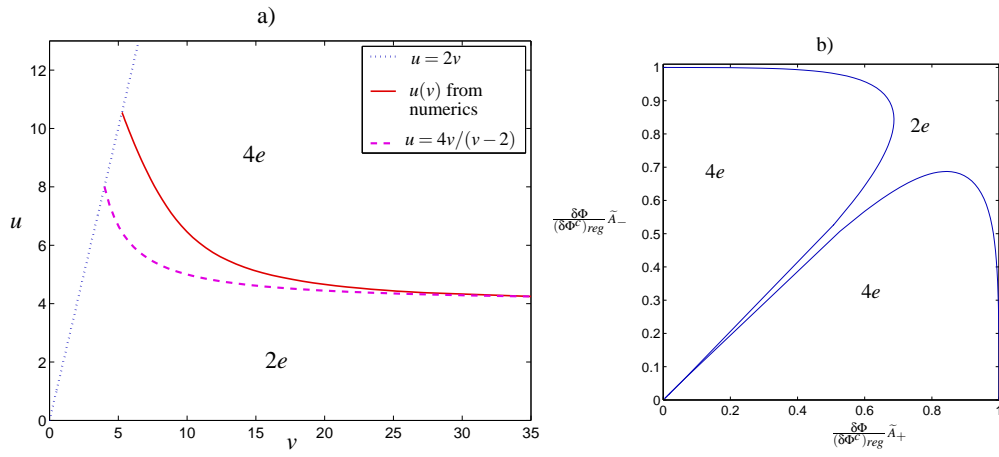


Рис. 2.3. Фазовая диаграмма цепочки с зарядовым беспорядком. Сплошные линии на обоих рисунках изображают линию кроссовера между $2e$ - и $4e$ -режимами. Отметим, что эти линии не соответствуют какому-либо фазовому переходу. Однако обсуждаемый здесь кроссовер является очень резким при большом числе ромбиков в цепочке, так как действия S_{4e} и S_{2e} пропорциональны степеням N : $S_{4e} \sim N$ и $S_{2e} \sim N^{3/4}$. Рисунок а) демонстрирует линию кроссовера в переменных u и v , определенных согласно (2.36). Сплошная линия при этом изображает численные данные, в то время как пунктирная линия соответствует асимптотическому выражению (2.37). Рисунок б) изображает фазовую диаграмму в более естественных но менее удобных для вычисления переменных. Здесь введены параметры $\tilde{A}_+ = \left(\frac{NA_+}{A_+^2 + A_-^2}\right)^{1/3}$ и $\tilde{A}_- = \left(\frac{NA_-}{A_+^2 + A_-^2}\right)^{1/3}$ описывающие реализацию беспорядка, а $(\delta\Phi^c)_{reg}$ — критическое отклонение от максимально фрустрированной точки для чистой цепочки с тем же отношением E_J/E_C .

для такого описания может служить вероятность $\mathcal{P}_{4e}(E_J/E_C, N, \delta)$ обнаружить в системе доминирующий $4e$ -сверхток, являющаяся функцией уже только контролируемых параметров.

Из (2.32) следует совместное распределение величин u и v

$$P(u, v) = \frac{32\sqrt{2}N^{3/2}}{\sqrt{\pi}d^6} u \exp\left(-\frac{4Nu^2}{d^4} - \frac{32N(v-v_0)^2}{d^4}\right) \quad (2.38)$$

Здесь $v_0 = d^2/4$.

Интересующая нас вероятность \mathcal{P}_{4e} может быть представлена в виде

$$\mathcal{P}_{4e}(E_J/E_C, N, \delta) = 1 - \int_0^{+\infty} dv \int_0^{u(v)} du P(u, v) \quad (2.39)$$

Максимум распределения (2.38) находится в точке $v = d^2/4$. При достаточно больших d мы можем заменить $u(v)$ в уравнении (2.39) ее предельным значением 4. После этого получаем

$$\mathcal{P}_{4e}(E_J/E_C, N, \delta) = 1 - \frac{8N}{d^4} \int_0^4 du u \exp\left(-\frac{4Nu^2}{d^4}\right) = \exp\left(-\frac{64N}{d^4}\right) \quad (2.40)$$

Для придания точного смысла критическому $\delta\Phi^c$ в системе с замороженным беспорядком мы можем ввести в рассмотрение параметр $1/2 \leq \kappa < 1$ и *определить* критическое отклонение $\delta\Phi^c$ как такое отклонение, при котором вероятность (2.40) равна κ . Из уравнения (2.40) получаем

$$\frac{\delta\Phi_c}{\Phi_0} = \frac{[\ln \frac{1}{\kappa}]^{1/6}}{2^{5/3}\pi^{1/3}} \frac{1}{N^{1/6}} \left(\frac{v}{E_J}\right)^{2/3} \quad (2.41)$$

Легко видеть, что определенное таким способом $\delta\Phi_c$ очень слабо зависит от параметра κ : численный множитель в (2.41) изменяется от 0.2 до 0.15 при изменении κ от 0.5 до 0.9. Таким образом, $\delta\Phi_c$ корректно определено.

Уравнения (2.40) и (2.41) составляют основной результат главы 2: они дают вероятность найти цепочку ромбиков в режиме с доминирующим $4e$ -сверхтоком и критическое отклонение от точки максимальной фрустрации, разрушающее $4e$ -сверхток.

Сравнение (2.41) и (2.1) показывает, что для любого экспериментально осмысленного числа ромбиков N критическое отклонение $\delta\Phi^c$ для цепочки со случайными зарядами мало отличается от аналогичной величины для чистой цепочки. Необходимо однако иметь в виду пределы применимости полученных выше результатов. Для прояснения этого вопроса на рисунке 2.4 представлены несколько

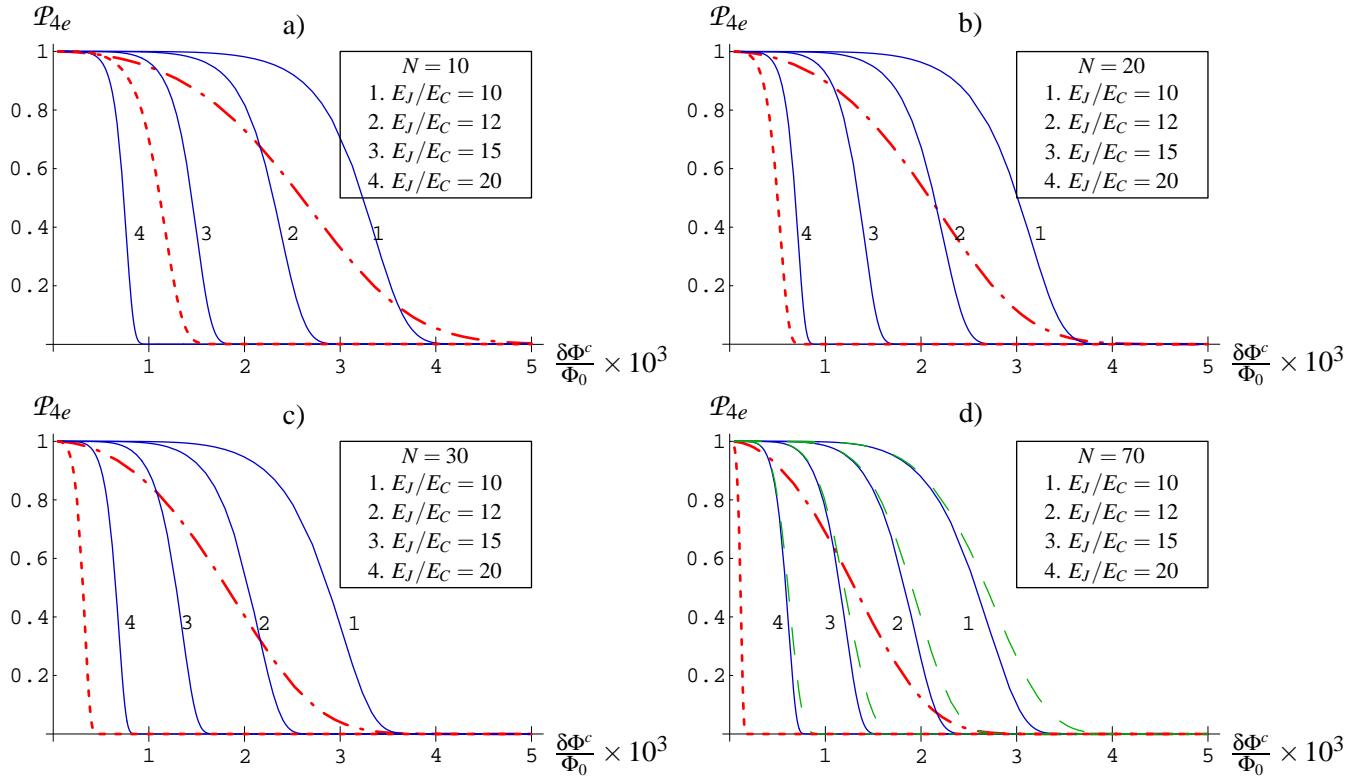


Рис. 2.4. Вероятность \mathcal{P}_{4e} как функция отклонения от точки максимальной фрустрации. Рисунки а), б), в), г), соответствуют $N = 10, 20, 30, 70$. Сплошные линии 1, 2, 3, 4 соответствуют различным $E_J/E_C = 10, 12, 15, 20$. Они были получены с использованием уравнения (2.39) с границей $u(v)$, найденной в численном расчете. Пунктирные линии на рисунке г) показаны для сравнения: они были получены с помощью уравнения (2.40), примененного при $d^2 \gg 1$. На каждом из рисунков линия из точек и штрих-пунктирная линия выделяют область применимости построенной теории (см. основной текст).

графиков для вероятности $\mathcal{P}_{4e}(\delta\Phi, E_J/E_C, N)$ при различных E_J/E_C и N . На том же рисунке отмечены границы применимости результатов. Они определяются следующим образом. Во-первых, в основе анализа системы лежало предположение о том, что поток в ромбиках достаточно сильно отличается от половины кванта, так что $h \gg w$. Выбирая $h = w$ в качестве критерия границы применимости этого приближения, мы находим штрих-пунктирные линии на рисунке 2.4. Строго говоря, надежны только те участки сплошных кривых, которые лежат *ниже* соответствующих штрих-пунктирных линий. Во-вторых, мы должны обеспечить применимость квазиклассического приближения (иначе говоря, флуктуации в цепочке должны быть сильными, а сверхток — экспоненциально малым). Это условие выполняется *выше* пунктирных линии на рисунке 2.4. При больших N это ограничение является весьма слабым. Наконец, полученные результаты ненадежны при очень маленьких, или очень близких к 1 вероятностях \mathcal{P}_{4e} , так как в их основе лежит предположение о гауссовой статистике величин A_{\pm} , не описывающей редкие события.

Качественно представленные выше результаты могут быть интерпретированы следующим образом: при больших E_J/E_C фазовые флуктуации в отдельном ромбике слабы и это делает случайные заряды неэффективными, хотя в длинной цепочке сверхток остается экспоненциально малым. Из проведенного анализа следует, что можно с высокой вероятностью гарантировать существование доминирующего, подавленного квантовыми флуктуациями $4e$ -сверхтока в длинной ($N \sim 20$) цепочке с большим $E_J/E_C \sim 20$. Критическое отклонение от точки максимальной фрустрации для такой цепочки $\delta\Phi^c/\Phi_0 \sim 10^{-3}$. Сравнение этого результата с критическим отклонением аналогичной чистой цепочки $(\delta\Phi^c)_{reg}/\Phi_0 \approx 1.2 \times 10^{-3}$ показывает, что в этой области параметров влияние зарядового беспорядка на эффект спаривания мало. С другой стороны, в чистом случае было возможно получить критическое отклонение порядка 10^{-2} выбирая $E_J/E_C \sim 7$. К сожалению, описанная теория не может использоваться здесь на количественном уровне.

2.5. Модуляция сверхтока емкостным затвором в цепочке с зарядовым беспорядком

Представляет интерес выяснение вопроса о влиянии затвора, аналогичного описанному в разделе 2.3 на сверхток в цепочке со случайными зарядами. Мы рассмотрим эту задачу в рамках того же приближения, которое использовалось ранее: мы считаем, что отклонение потока в ромбиках от половины кванта достаточно велико в том смысле, что $h \gg w$. Из предшествующего анализа и уравнения (2.35) мы знаем, что действие на $4e$ -траектории контролируется параметром $A_+(V_g)$. Его значение определяется соотношениями (2.31) и (2.13) за тем небольшим изменением, что в (2.13) необходимо прибавить к зарядам q_n^2 величину $\frac{2}{3} \frac{C_g V_g}{2e}$, а из зарядов q_n^1 и q_n^3 вычесть $\frac{1}{3} \frac{C_g V_g}{2e}$. Мы можем написать далее

$$A_+(V_g) = A_+(0) + \delta A_+(V_g) \quad (2.42)$$

Здесь $A_+(0)$ — значение A_+ при $V_g = 0$ и той же реализации беспорядка. Учитывая, что для типичных реализаций $|\delta A_+| \ll A_+(0)$, из уравнения (2.35) находим отклик $4e$ -действия на приложенный внешний потенциал

$$\delta S_{4e}(V_g) \equiv S_{4e}(V_g) - S_{4e}(0) = \frac{2hd}{\sqrt{N A_+(0)}} \delta A_+(V_g) \quad (2.43)$$

Очевидно, среднее значения δA_+ по реализациям беспорядка равно нулю. С другой стороны

$$\langle A_+ \rangle \sim N, \quad \langle (\delta A_+)^2 \rangle \sim N \quad (2.44)$$

и флуктуации $A_+(0)$ также порядка \sqrt{N} . Поэтому характерный величина δS_{4e} в присутствии зарядового беспорядка определяется мезоскопическими флуктуациями коэффициента A_+ и в главном порядке по $1/N$ дается формулой

$$|\delta S_{4e}| \sim \sqrt{\langle (\delta S_{4e})^2 \rangle} \sim \frac{2hd}{\sqrt{N \langle A_+(0) \rangle}} \sqrt{\langle (\delta A_+)^2 \rangle} \quad (2.45)$$

В пределе сильного зарядового беспорядка (моделируемого равномерным распре-

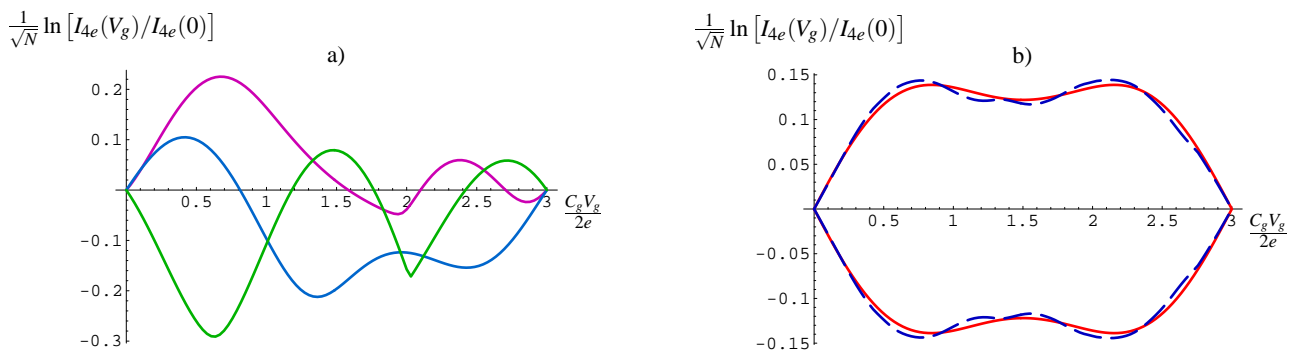


Рис. 2.5. Логарифм сверхтока как функция напряжения на затворе. Три сплошных линии на рисунке а) демонстрируют зависимость логарифма сверхтока в цепочке ромбиков $\frac{1}{\sqrt{N}} \ln [I_{4e}(V_g)/I_{4e}(0)] = -\frac{1}{\sqrt{N}} \delta S_{4e}(V_g)$ от напряжения на затворе V_g для трех случайно выбранных реализаций зарядового беспорядка. Сплошная линии на рисунке б) показывает характерное значение $\delta S_{4e} \sim \pm \sqrt{\langle (\delta S_{4e})^2 \rangle}$ согласно уравнению (2.46). Пунктирная линия изображает ту же величину, но полученную путем усреднения $(\delta S_{4e})^2$ по 50 реализациям беспорядка. При построении графиков было принято, что отношение $E_J/E_C = 8$, а $\delta\Phi$ было положено равным критическому отклонению в чистом случае (уравнение 2.1).

делением случайных зарядов q_n^k на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) величины $\langle A_+(0) \rangle$ и $\langle (\delta A_+)^2 \rangle$ могут быть найдены аналитически. Подробно эта процедура описана в приложении Б.5. Окончательный результата дается выражением (использованы также уравнения (1.14, 2.30))

$$|\delta S_{4e}(V_g)| \sim \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\Phi_0}{\delta\Phi} \right)^{1/2} \frac{v}{E_J} \sqrt{N} \left(5 - \xi - \pi F \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \zeta^2 \right) \right)^{1/2} \quad (2.46)$$

$$\xi = \cos \frac{\pi C_g V_g}{6e} \cos \frac{\pi C_g V_g}{2e}, \quad \zeta = \cos \frac{\pi C_g V_g}{6e} \cos \frac{\pi C_g V_g}{3e}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция.

Воизбежание недоразумения отметим, что расходимость этого выражения на малых отклонениях $\delta\Phi$ является следствием сделанных приближений, основанных на предположении $h \gg w$, что эквивалентно

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi_0} \gg \frac{4}{\sqrt{2}\pi} \frac{v}{E_J} \quad (2.47)$$

Фактически, наибольшее возможное значение коэффициента перед \sqrt{N} в уравнении (2.46) порядка $\sqrt{v/E_J}$ (ср. (2.19)).

Имеются два важных отличия выражения (2.46) от аналогичного результата для чистой цепочки: а) мы видим, что изменение действия пропорционально теперь \sqrt{N} в отличие от N для чистого случая; б) изменение действия может быть теперь как положительным так и отрицательным, т.е. приложение потенциала на затвор может теперь привести к *уменьшению* $4e$ -сверхтока, так же как и к его росту. Знак эффекта зависит от реализации беспорядка. Логарифм сверхтока, как функция потенциала затвора для трех случайно выбранных реализаций беспорядка показан на рисунке 2.5.

Из приведенного выше анализа следует, что в цепочке с беспорядком модуляция тока потенциалом затвора случайна и значительно слабее, чем в чистом случае. Тем не менее, при числе ромбиков в цепочке $N = 8 - 10$, типичное изменение тока, вызванное приложением затвора, составляет порядка 30% от величины самого тока. Таким образом, даже в присутствии зарядового беспорядка этот эффект может быть использован для демонстрации квантовой когерентности процессов проскока фазы.

2.6. Влияние магнитного беспорядка на точку кроссовера

В этом разделе мы рассмотрим воздействие разброса потоков в ромбиках на эффект спаривания. Как и в предыдущих разделах, нашей отправной точкой служит статсумма системы, для которой мы используем представление (2.21). При этом

$$\frac{d\hat{U}_n}{d\tau} = - \left(w \cos 2x(\tau) \hat{S}^x - h_n \hat{S}^z \right) \hat{U}_n, \quad (2.48)$$

$$h_n = \frac{16N}{\pi} \left(\frac{\Phi_r^n}{\Phi_0} - \frac{1}{2} \right)$$

Мы предполагаем ниже, что потоки Φ_r^n равномерно распределены на отрез-

ке $(\Phi_r - \Delta\Phi, \Phi_r + \Delta\Phi)$, т.е. распределение вероятностей для величин h_n дается выражением

$$P(h) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma}, & |h - h_0| < \sigma \\ 0, & |h - h_0| > \sigma \end{cases}. \quad (2.49)$$

Здесь

$$h_0 = \frac{16N(\Phi_r - \Phi_0/2)}{\pi\Phi_0}, \quad \sigma = \frac{16N\Delta\Phi}{\pi\Phi_0}. \quad (2.50)$$

В действительности, точная форма распределения не существенна для наших дальнейших целей: ниже мы предполагаем, что $\sigma \ll h_0$, и используем теорию возмущений по малому параметру σ/h_0 . Нас интересует критическое отклонение от максимально фрустрированной точки $\Phi_r = \Phi_0/2$, разрушающее $4e$ -сверхток. Поэтому ниже мы также предполагаем, что $h_0 \gg w$. Аналогично тому, как это делалось при анализе зарядового беспорядка, мы можем избавиться в статсумме от спиновых переменных и с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича получить представление для статсуммы в виде функционального интеграла с локальным действием (приложение Б.6)

$$S = h_0 \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \left(1 + \frac{\sigma^2}{h_0^2}\right) \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + d y \cos 2x + \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\sigma}{h_0} yz \right) \quad (2.51)$$

Ниже мы фиксируем величину относительной дисперсии потоков σ/h_0 и ищем h_0 (пропорциональное среднему потоку в ромбиках), переводящее цепочку из $4e$ -режима в $2e$ -режим.

Как и ранее, нам требуется определить действия S_{2e} и S_{4e} . Из уравнения (2.51) следует, что поправки к этим величинам, вызванные ненулевой величиной σ , второго порядка малости по (σ/h_0) и малы при малых дисперсиях. Для получения количественных оценок можно использовать численное решение соответствующих уравнений движения. На рисунке 2.6 представлена полученная таким способом зависимость критического отклонения от относительной дисперсии.

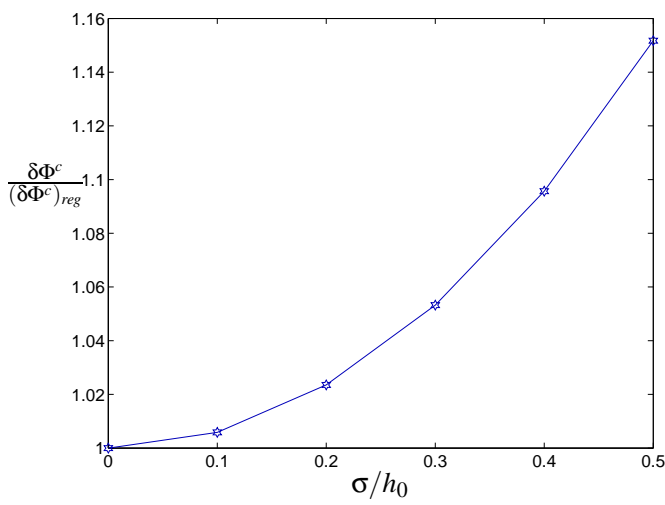


Рис. 2.6. Критическое отклонение от максимальной фрустрации в цепочке с магнитным беспорядком. Вдоль горизонтальной оси отложена *относительная* дисперсия потока в ромбиках. Вертикальная ось изображает критическое отклонение, нормированное на аналогичную величину для чистой цепочки с тем же E_J/E_C .

Может показаться удивительным, что магнитный беспорядок увеличивает критическое отклонение (определенное по среднему потоку в ромбиках) по сравнению с чистым случаем. Однако, этот результат является вполне осмысленным, так как поток, равный точно половине кванта в одном ромбике полностью блокирует $2e$ сверхток в цепочке. Допуская разброс потоков в ромбиках, мы позволяем некоторым из них оказаться ближе к точке максимальной фрустрации, чем "средний" ромбик. Этот факт и вызывает подавление $2e$ -сверхтока.

Таким образом мы приходим к выводу, что магнитный беспорядок не оказывает влияния на эффект спаривания, по крайней мере до тех пор, пока разброс потоков в ромбиках $\Delta\Phi$ не превосходит критического отклонения $\delta\Phi_{reg}^c$ для чистой цепочки

2.7. Заключение

В этом разделе мы подведем краткий итог первых двух глав диссертации. В них мы детально проанализировали явление спаривания куперовских пар в фрустрированной цепочке джозефсоновских ромбиков.

В первой главе мы определили амплитуды $4e$ и $2e$ компонент тока в цепочке и нашли критическое отклонение $(\delta\Phi^c)_{reg}$ потока в ромбиках от половины кванта, при котором $2e$ -ток начинает доминировать над $4e$ -током. Как оказалось, $(\delta\Phi^c)_{reg}$ не зависит от числа ромбиков в цепочке и определяется только величиной отношения E_J/E_C . На основании полученных результатов были оценены параметры системы, наиболее подходящие для эксперимента.

Во второй главе диссертации мы исследовали влияние на спаривание куперовских пар двух типов замороженного беспорядка: магнитного (разброс потоков в ромбиках) и зарядового (случайные заряды в подложке). Было показано, что малый по сравнению с $(\delta\Phi^c)_{reg}$ разброс потоков в ромбиках слабо влияет на эффект спаривания.

Главные результаты второй главы касаются воздействия на систему случайной зарядовой фрустрации. В этой главе нам удалось построить статистическое описание цепочки с зарядовым беспорядком при достаточно больших отклонениях потока в ромбиках от половины кванта (условие $h \gg w$). Мы вычислили вероятность \mathcal{P}_{4e} обнаружить систему в режиме с доминирующим $4e$ -током. На основании полученного выражения для \mathcal{P}_{4e} мы определили критическое отклонение $\delta\Phi^c$ в рассматриваемом режиме (уравнение (2.41)). В отличие от чистого случая, найденное $\delta\Phi^c$ уменьшается с ростом числа ромбиков в цепочке N . Зависимость $\delta\Phi^c$ от N является однако весьма слабой ($\delta\Phi^c \sim N^{-1/6}$) и для разумного с экспериментальной точки зрения числа ромбиков $\delta\Phi^c$ мало отличается от $(\delta\Phi^c)_{reg}$.

Случайные заряды в принципе приводят к возможности существования $2e$ -тока даже в максимально фрустрированной точке. Из наших результатов следует од-

нако, что при больших E_J/E_C и $\Phi_r = \Phi_0/2$, вероятность P того, что в цепочке имеется заметный $2e$ -ток, мала. Само по себе это утверждение не является неожиданным: на полностью классическую цепочку зарядовая фрустрация не оказывают вообще никакого влияния. Важно однако, что оказывается возможным совместить малую вероятность P с развитыми квантовыми флуктуациями.

Развитый в главе 2 подход позволяет найти не только вероятность \mathcal{P}_{4e} но и распределения вероятностей различных наблюдаемых величин. Мы проиллюстрировали это обстоятельство, анализируя отклик $4e$ -тока на приложение потенциала V_g к затвору, соединенному с цепочкой емкостной связью. Было показано, что, в противоположность чистому случаю, такое воздействие на фрустрированную зарядами цепочку может приводить как *увеличению* так и к *уменьшению* $4e$ -тока. Присутствие зарядовой фрустрации снижает также чувствительность тока к потенциалу V_g , однако отклик системы все же остается достаточно значительным и может быть использован для экспериментальной демонстрации квантовой когерентности процессов проскока фазы.

Дуальность сверхпроводник-изолятор в решетке джозефсоновских проволочек

3.1. Описание модели

Данная глава посвящена изучению свойств двумерной сетки джозефсоновских проволочек, которая уже кратко обсуждалась во **Введении**. Здесь мы дадим более подробное описание модели и введем используемую в дальнейшем систему обозначений.

Исследуемая система показана рисунке 3.1. Она представляет собой модифицированную версию обычной джозефсоновской сетки на квадратной решетке, в которой каждое ребро решетки состоит из $N \gg 1$ джозефсоновских контактов. Как и везде в диссертации, предполагается что емкости контактов доминируют над емкостями островков. Каждый контакт характеризуется джозефсоновской энергией E_J и зарядовой энергией $E_C = e^2/2C$, причем $E_J \gg E_C$.

Основные узлы решетки контактов (узлы где сходятся 4 проволочки, именуемые также в дальнейшем x -узлами) мы будем нумеровать двумерным целочисленным вектором \mathbf{x} . Периоды решетки x -узлов (x -решетки) мы обозначим через \mathbf{a}_μ с $\mu = 1, 2$:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1). \quad (3.1)$$

Произвольный вектор, соединяющий два ближайших основных узла и пробегающий значения $\pm \mathbf{a}_\mu$ будем обозначать просто \mathbf{a} . Каждое ориентированное ребро решетки однозначно задается своим началом \mathbf{x} и направлением \mathbf{a} , т.е. парой (\mathbf{x}, \mathbf{a}) .

Наряду с исходной, нам понадобится ниже дуальная решетка, узлы которой, нумеруемые целочисленным вектором \mathbf{r} , располагаются в центрах граней исходной решетки (жирные кружки на рисунке 3.1). Мы введем для нее векторы \mathbf{b}_μ и

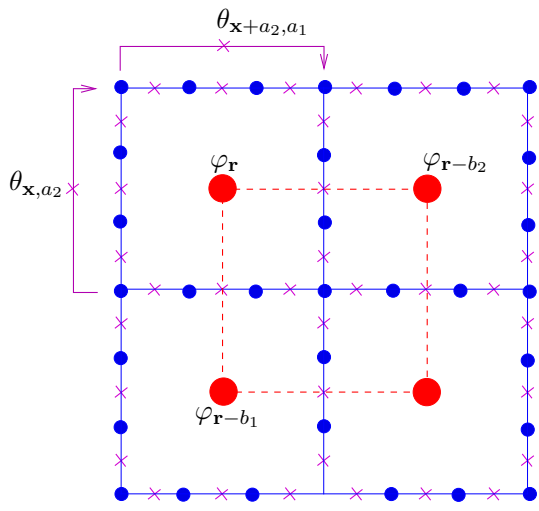


Рис. 3.1. Сетка джозефсоновских проволочек. Маленькие кружки изображают сверхпроводящие островки, соединенные джозефсоновскими контактами (крестики). Жирные кружки обозначают узлы дуальной решетки. Разности фаз $\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ определены на связях исходной решетки. Дуальные $\varphi_{\mathbf{r}}$ определены в узлах дуальной решетки (см. основной текст).

\mathbf{b} по аналогии с соответствующими векторами \mathbf{x} -решетки. Дуальную решетку мы будем иногда называть также \mathbf{r} -решеткой.

Ребро дуальной решетки (\mathbf{r}, \mathbf{b}) будем называть дуальным к ребру (\mathbf{x}, \mathbf{a}) , если ребро (\mathbf{x}, \mathbf{a}) является общим для ячеек исходной решетки с центрами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \mathbf{b}$. Ориентации двух дуальных друг другу ребер (\mathbf{x}, \mathbf{a}) и (\mathbf{r}, \mathbf{b}) будем называть согласованными, если вектор \mathbf{b} получается из вектора \mathbf{a} поворотом на 90 градусов *против* часовой стрелки. В частности базисные векторы дуальной решетки мы выберем так, чтобы ориентация \mathbf{b}_μ была согласована с ориентацией \mathbf{a}_μ :

$$\mathbf{b}_1 = (0, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (-1, 0). \quad (3.2)$$

Если (\mathbf{x}, \mathbf{a}) и (\mathbf{r}, \mathbf{b}) дуальны друг к другу и согласованы по ориентации мы будем писать $(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})_\perp$.

Лагранжиан модели в мнимом времени имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{jk} \left[\frac{1}{32E_C} g_{jk} (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_k)^2 - \frac{E_J}{2} g_{jk} \cos(\phi_j - \phi_k) \right] + i \sum_j q_j \dot{\phi}_j. \quad (3.3)$$

Здесь индексы j и k пробегают *все островки* решетки; ϕ_j — фаза сверхпроводящего параметра порядка на j -том острове; $g_{jk} = 1$, если островки j и k соединены джозефсоновским контактом, и $g_{jk} = 0$ в противном случае. Последний член в лагранжиане описывает зарядовую фрустрацию решетки (ср. раздел 2.1).

Как обычно, лагранжиан (3.3) может быть переписан в терминах разностей фаз на контактах

$$\mathcal{L} = \sum_k \left[\frac{1}{16E_C} \left(\frac{d\vartheta_k}{d\tau} \right)^2 + E_J \cos \vartheta_k + iQ_k \frac{d\vartheta_k}{d\tau} \right]. \quad (3.4)$$

Суммирование в уравнении (3.4) идет по *всем контактам* сетки; ϑ_l — соответствующие разности фаз. Связь параметров Q_l с зарядами q_j может быть получена так же, как это было сделано для цепочки ромбиков в приложении Б.1.

Ниже мы часто будем использовать другую нумерацию контактов сетки. Каждый контакт однозначно задается ребром $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu)$, в котором он находится, и своим номером $1 \leq l \leq N$ внутри этого ребра, т.е. тройкой $\{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu, l\}$. Номер l отсчитывается от вершины \mathbf{x} . При таком выборе нумерации контактов, вместо набора зарядовых параметров Q_k , фигурирующих в 3.4, мы получаем набор $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)}$. Исходно, параметры $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)}$ определены только на ребрах, ориентированных вдоль базисных векторов \mathbf{a}_μ . Удобно однако продолжить их значения на ребра с противоположной ориентацией $-\mathbf{a}_\mu$. Это делается согласно правилу

$$Q_{\mathbf{x}+\mathbf{a}_\mu, -\mathbf{a}_\mu}^{(N-l+1)} = -Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)} \quad (3.5)$$

В этой главе диссертации будет выведено дуальное преобразование отображающее лагранжиан (3.4) в лагранжиан стандартной джозефсоновской сетки на квадратной решетке, который послужит отправной точкой при анализе свойств сетки проволок.

3.2. Классические состояния решетки

Первым шагом при выводе интересующего нас дуального преобразования является определение классических состояний решетки проволочек. Для их определения зафиксирует разности фаз $\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ между главными узлами исходной решетки (рис. 3.1) и произведем минимизацию джозефсоновской энергии каждой проволоочки по разностям фаз на внутренних контактах. Для полной джозефсоновской энергии решетки при этом получим

$$E_{cl} = \frac{E_J}{2N} \sum_{r, \mu} (\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu} - 2\pi m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu})^2. \quad (3.6)$$

Здесь $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ — целые числа. Каждый член этой суммы представляет собой энергию одной из проволочек в решетке при фиксированной разности фаз $\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ на ней. Целые числа $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ нумеруют классические состояния такой проволоочки (ср. [25]). При этом разности фаз на l -том контакте проволоочки с концами в точках \mathbf{x} и $\mathbf{x} + \mathbf{a}_\mu$ задается выражением:

$$\vartheta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)} = \frac{\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu} - 2\pi m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}}{N} + 2\pi m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)}, \quad \sum_{k=1}^N m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(k)} = m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}, \quad l = 1, \dots, N, \quad m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}^{(l)} \in \mathcal{Z} \quad (3.7)$$

В решетке из \mathcal{M}^2 ячеек существуют $2\mathcal{M}^2$ ребер и такое же количество переменных $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$. Во избежание недоразумений, отметим сразу, что в рассматриваемой системе величины $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ не имеют непосредственного физического смысла, поскольку разности фаз $\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ в действительности не фиксированы. Ниже будет показано, что классическое состояние решетки проволочек с \mathcal{M}^2 ячейками полностью определяется \mathcal{M}^2 переменными, являющимися некоторыми комбинациями $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$.

Входящие в (3.6) переменные $\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu}$ подчинены дополнительным условиям, фиксирующим магнитное поле, пронизывающее исходную решетку:

$$\sum_{\square} \theta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \equiv \theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_2} + \theta_{\mathbf{x} + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1} - \theta_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1} - \theta_{\mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2} = 2\pi \frac{\Phi_{\mathbf{r}}}{\Phi_0} = 2\pi f_{\mathbf{r}}. \quad (3.8)$$

Здесь $\Phi_{\mathbf{r}}$ — поток магнитного поля через ячейку исходной решетки с центром в дуальном узле \mathbf{r} ; Φ_0 — сверхпроводящий квант потока. В (3.8) введено используемое в дальнейшем обозначение \sum_{\square} для циркуляции вокруг одной ячейки вектора $\theta_{\mathbf{x}, a_{\mu}}$, определенного на ребрах решетки. Эта величина является дискретным аналогом ротора. Отметим, что ротор вектора определен в узлах дуальной решетки.

Производя минимизацию энергии (3.6) по переменным $\theta_{\mathbf{x}, a_{\mu}}$ с учетом условий (3.8), в Фурье представлении получаем для классических состояний решетки

$$\theta_{\vec{\kappa}, a_1} = 2\pi m_{\vec{\kappa}, a_1} + 2\pi G(\vec{\kappa}) (1 - e^{-i\kappa_2}) (p_{\vec{\kappa}} - f_{\vec{\kappa}}), \quad (3.9)$$

$$\theta_{\vec{\kappa}, a_2} = 2\pi m_{\vec{\kappa}, a_2} - 2\pi G(\vec{\kappa}) (1 - e^{-i\kappa_1}) (p_{\vec{\kappa}} - f_{\vec{\kappa}}), \quad (3.10)$$

$$p_{\mathbf{r}} = \sum_{\square} m_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}, \quad \vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2). \quad (3.11)$$

Здесь $p_{\vec{\kappa}}$ — фурье-образ целочисленной функции, определенной на дуальной решетке согласно уравнению (3.11); $G(\vec{\kappa})$ — функция Грина решеточного оператора Лапласа

$$G^{-1}(\vec{\kappa}) = 4 - 2 \cos \kappa_1 - 2 \cos \kappa_2. \quad (3.12)$$

На больших расстояниях имеем

$$G_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.7) и (3.9,3.10) следует, что все физически различные классические состояния сетки из M^2 ячеек однозначно задаются набором M^2 переменных $p_{\mathbf{r}}$. В действительности, $p_{\mathbf{r}}$ представляет собой число вихрей в ячейке исходной решетки с центром в дуальном узле \mathbf{r} . Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть поле $\theta_{\mathbf{x}, a_{\mu}} - 2\pi m_{\mathbf{x}, a_{\mu}}$, описывающее плавное изменение фазы сверхпроводящего параметра порядка, при $p_{\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{r}0}$ и $f_{\mathbf{r}} \equiv 0$. Далеко от начала координат в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ имеем:

$$\theta_{\mathbf{x}, a_1} - 2\pi m_{\mathbf{x}, a_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \ln |\mathbf{x}| = \frac{\partial}{\partial x_1} \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (3.14)$$

$$\theta_{\mathbf{x}, a_2} - 2\pi m_{\mathbf{x}, a_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \ln |\mathbf{x}| = \frac{\partial}{\partial x_2} \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (3.15)$$

Соотношения (3.14, 3.15) как раз и означают, что переменные $p_{\mathbf{r}}$ имеют смысл завихренности.

Подстановка (3.9, 3.10) в (3.6) позволяет найти энергию классических состояний системы в терминах вихревых переменных

$$E_{cl} = \frac{2\pi^2 E_J}{N} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (p_{\mathbf{r}} - f_{\mathbf{r}}) (p_{\mathbf{r}'} - f_{\mathbf{r}'}) \quad (3.16)$$

Как и следовало ожидать, взаимодействие вихрей в решетке является логарифмическим на больших расстояниях.

Таким образом, классические состояния решетки находятся во взаимно однозначном соответствии с целочисленными функциями на дуальной решетке $p_{\mathbf{r}}$. Ниже мы будем обозначать классические состояния и соответствующие им наборы вихревых переменных символами $\{p\}$, $\{p'\}$ и т.д.

Гамильтониан (3.16) дает полное описание решетки чисто классических (нулевая емкость контактов) джозефсоновских проволочек. Мы видим, что в главном порядке по $1/N$ эта система *точно* изоморфна двумерному кулоновскому газу (КГ), свойства которого подробно изучены [31]. При этом, наложенная на исходную решетку проволочек магнитная фрустрация (параметры $f_{\mathbf{r}}$) в терминах решеточного газа играет роль зарядовой фрустрации. Хорошо известно, что с повышением температуры КГ испытывает фазовый переход типа Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ)[2, 3], связанный с распариванием вихрей. В терминах джозефсоновской решетки это соответствует переходу из сверхпроводящего состояния в нормальное (ср. [32]). Температура сверхпроводящего перехода T_{sup} определяется универсальным критерием Нельсона-Костерлица [33]. Используя результаты работ [34–36], посвященных численному анализу модели (3.16) при нулевой ($f_{\mathbf{r}} \equiv f = 0$) и полной ($f_{\mathbf{r}} \equiv f = 1/2$) фрустрации, можно явно найти T_{sup} для

классической системы проволочек:

$$T_{sup}^{(0)} = 0.87 \frac{\pi E_J}{2N}, \quad f = 0, \quad (3.17)$$

$$T_{sup}^{(0)} = 0.52 \frac{\pi E_J}{2N}, \quad f = \frac{1}{2}, \quad (3.18)$$

Коэффициенты 0.87 и 0.52 в (3.17) и (3.18) описывают перенормировку диэлектрической проницаемости КГ за счет тепловых флуктуаций. Ниже будут найдены поправки к этим выражениям, вызванные квантовыми проскоками фазы.

В заключение этого раздела уместно заметить, что в рассматриваемом пределе нулевой емкости сверхпроводящих островков, взаимодействие куперовских пар, локализованных в центральных островках решетки \mathbf{x} и \mathbf{x}' определяется той же функцией Грина $G_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}$:

$$E_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = N \frac{(2e)^2}{C} G_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} = \frac{4NE_C}{\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.19)$$

Соответственно, в решетке проволочек в принципе может происходить другой, отличный от только что описанного переход БКТ-типа (ср. [32]). Этот переход является переходом между диэлектрической и металлической фазами и связан с образованием в системе свободных зарядов. Его температура при нулевой джоузефсоновской энергии контактов $E_J = 0$ дается выражением

$$T_{ins}|_{E_J=0} = 0.87 \frac{Ne^2}{\pi C} = 0.87 \frac{2NE_C}{\pi} \quad (3.20)$$

Здесь $E_C = e^2/2C$ — зарядовая энергия контактов. В следующих разделах мы получим выражение для той же величины T_{ins} в противоположном предельном случае $E_J \gg E_C$.

3.3. Квантовые флуктуации и дуальное преобразование

Целью данного раздела является построение описания решетки проволочек, учитывающего квантовые флуктуации фаз сверхпроводящих островком. Как и

для цепочки ромбиков в предыдущих главах этой диссертации, главное влияние на систему оказывают проскоки фазы, приводящие к флуктуациям вихревых переменных (ср. сказанное в разделе во **Введении** и в работе [25]). Каждый проскок фазы представляет собой перескок вихря с дуального узла \mathbf{r} на соседний узел $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}$. При больших N и нулевой собственной емкости островков C_0 , этот процесс локализован в отдельном контакте и меняет разность фаз на нем приблизительно на 2π . Поэтому при вычислении соответствующего матричного элемента v можно пренебречь связью этого контакта с остальной решеткой. При этом получается [25]

$$v = \frac{2^{11/4}}{\sqrt{\pi}} (E_J^3 E_C)^{1/4} \exp \left[-2\sqrt{\frac{2E_J}{E_C}} \right] \quad (3.21)$$

Выписанное выражение не учитывает возможную зарядовую фрустрацию решетки проволочек. Ее воздействие будет подробно рассмотрено ниже.

Для построения квантового гамильтониана системы в вихревых переменных удобно ввести "вторично квантованные" операторы $a_{\{p\}}$ и $a_{\{p\}}^+$ (пара операторов для каждого набора вихревых переменных $\{p\}$). Статистика операторов $a_{\{p\}}$ и $a_{\{p\}}^+$ для дальнейшего несущественна. Пространство классических состояний можно рассматривать как бесконечномерную решетку (число направлений в решетке состояний совпадает с числом узлов исходной решетки). Ближайшими соседями в этой решетке по определению мы будем называть два состояния, соединенные одним проскоком фазы. Эволюция состояния сетки в этих терминах представляет собой блуждание частицы по решетке состояний. В приближении сильной связи самый общий гамильтониан, описывающий такое блуждание, может быть записан в виде

$$H = \sum_{\{p\}} E_{cl}(\{p\}) a_{\{p\}}^+ a_{\{p\}} - \frac{1}{2} \sum_{\langle \{p\}, \{p'\rangle} \Upsilon_{p,p'} a_{\{p\}}^+ a_{\{p'\}} \quad (3.22)$$

Здесь $\Upsilon_{p,p'}$ — амплитуда перехода из состояния $\{p\}$ в состояние $\{p'\}$. Суммирование в первом слагаемом идет по всем классическим состояниям, а во втором — по

всем *упорядоченным* парам ближайших соседей в решетке состояний.

Проскок фазы на ребре $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu)$ меняет на ± 1 завихренности в двух соседних ячейках решетки \mathbf{r} и $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}$, для которых ребро $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\mu)$ является общим. Как будет показано ниже, в рассматриваемом пределе нулевой емкости C_0 , фигурирующий в (3.22) матричный элемент $\Upsilon_{p,p'}$ определяется только точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' и не зависит от остальных параметров, задающих состояния $\{p\}$ и $\{p'\}$. Таким образом, гамильтониан (3.22) может быть переписан в виде

$$H = \sum_{\{p\}} E_{cl}(\{p\}) a_{\{p\}}^+ a_{\{p\}} - \frac{1}{2} \sum_{\{p\}} \sum_{\substack{\mathbf{r}, \mu=1,2 \\ p'_{\mathbf{r}} = p_{\mathbf{r} - \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}} + \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r} + \mathbf{b}_\mu}}} \Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{b}_\mu} a_{\{p\}}^+ a_{\{p'\}} \quad (3.23)$$

Найдем теперь явные выражения для величин $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$. Полный матричный элемент перескока вихря из \mathbf{r} в \mathbf{r}' является суммой амплитуд проскока фазы во всех джозефсоновских контактах, расположенных на ребре решетки проволочек, дуальному связи $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. В отсутствие зарядовой фрустрации, все эти амплитуды одинаковы и равны v (см. 3.21). При этом для $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ получаем

$$\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 2Nv\gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \quad (3.24)$$

Здесь $\gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 1$, если \mathbf{r} и \mathbf{r}' являются ближайшими соседями. В противном случае $\gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 0$. Множитель 2 в (3.24) просто компенсирует введенный для удобства дальнейших вычислений множитель $1/2$ в (3.23).

Для вычисления $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ в фрустрированной зарядами сетке необходимо более подробно проанализировать изменение фаз параметра порядка при туннелировании вихря. Рассмотрим например перескок вихря вдоль вектора \mathbf{b}_1 из узла $\mathbf{r} - \mathbf{b}_1$ через l -тый контакт связи на $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1)$ (рис. 3.1). В силу соотношения (3.11), такой перескок сопровождается уменьшением на 1 величины $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1}$. Из соотношения (3.7) следует, что при этом на 1 уменьшается также и число $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1}^{(l)}$. Используя теперь (3.7, 3.9) мы можем выписать изменение разности фаз на произвольном контакте $\{\mathbf{X}, \mathbf{a}_\mu, k\}$

$$\Delta\vartheta_{\mathbf{X}, \mathbf{a}_\mu}^{(k)} = -2\pi\delta_{\mathbf{X}, \mathbf{x}}\delta_{\mu, 1}\delta_{k, l} + \Delta_{\mu, 1}(\mathbf{X} - \mathbf{x}) \quad (3.25)$$

Здесь слагаемое с символами Кронекера, является следствием уменьшения на 1 $m_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1}^{(l)}$, в то время как второе слагаемое возникает из-за малой подвижки разностей фаз на всех контактах сетки при туннелировании вихря. Оно зависит от расстояния между связями $\mathbf{X} - \mathbf{x}$ и взаимной ориентации векторов \mathbf{a}_μ и \mathbf{a}_1 , но не зависит от номеров контактов l и k . В принципе, $\Delta_{\mu, 1}(\mathbf{X} - \mathbf{x})$ может быть выражено через функцию Грина G . Используя соотношения (3.25) и (3.4), мы приходим к выводу, что при туннелировании вихря через контакт $\{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, l\}$ волновая функция системы приобретает фазовый множитель

$$\exp \left(-2\pi i Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_1}^{(l)} + i \sum_{\mathbf{X}, \mu, k} Q_{\mathbf{X}, \mathbf{a}_\mu}^{(k)} \Delta_{\mu, 1}(\mathbf{X} - \mathbf{x}) \right) \quad (3.26)$$

Можно показать (ср. аналогичное место в разделе 2.2), что второе слагаемое в скобках может быть уничтожено калибровочным преобразованием, не оказывает влияния на свойства системы и его можно отбросить. Используя этот факт, легко показать, что обобщением соотношения (3.26) на случай туннелирования вихря в произвольном направлении \mathbf{b} из точки \mathbf{r} является

$$\exp \left(-2\pi i Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)} \right) \quad (3.27)$$

Здесь (\mathbf{x}, \mathbf{a}) — связь, дуальная связи (\mathbf{r}, \mathbf{b}) и согласованная с ней в ориентации. При $\mathbf{a} = -\mathbf{a}_\mu$, величина $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$ понимается в смысле определения (3.5).

Для полного матричного элемента перескока вихря имеем теперь

$$\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{b}} = 2\nu \sum_{l=1}^N \exp \left(-2\pi i Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)} \right) = |\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{b}}| \exp(i\chi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{b}}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (\mathbf{r}, \mathbf{b})_\perp \quad (3.28)$$

Учитывая, связь коэффициентов $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$ с параметрами q_j исходного лагранжиана (3.3), можно переписать ответ для $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{b}}$ непосредственно в терминах зарядов q_j . Мы не станем приводить здесь соответствующих выражений ввиду их громоздкости. Заметим однако, что при сильном зарядовом беспорядке, когда параметры

q_j равномерно распределены на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, тем же свойством обладают и коэффициенты $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$. При этом амплитуда $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ может быть представлена в виде (ср. (3.28)):

$$\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 2\sqrt{N}v \cdot \gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \cdot z_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}, \quad (3.29)$$

где $z_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ — эрмитова случайная переменная

$$\overline{|z_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}|^2} = 1 \quad (3.30)$$

Завершающим шагом дуального преобразования является преобразование Фурье по переменным $\{p\}$. Для его осуществления мы введем поле φ_r определенное в узлах дуальной решетки и определим

$$a_{\{\varphi\}} = \sum_{\{p\}} a_{\{p\}} e^{ip\varphi}, \quad a_{\{p\}} = \int D\varphi a_{\{\varphi\}} e^{-ip\varphi}, \quad p\varphi \equiv \sum_{\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}}, \quad D\varphi \equiv \prod_{\mathbf{r}} \frac{d\varphi_{\mathbf{r}}}{2\pi} \quad (3.31)$$

Переходя к операторам $a_{\{\varphi\}}$ в гамильтониане (3.23) и учитывая (3.28), получаем

$$H = \int D\varphi \left[\frac{(2\pi)^2 E_J}{2N} a_{\{\varphi\}}^+ \widehat{\mathcal{L}} a_{\{\varphi\}} - a_{\{\varphi\}}^+ a_{\{\varphi\}} \sum_{[\mathbf{r}, \mathbf{r}']} |\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}| \cos(\varphi_{\mathbf{r}} - \varphi_{\mathbf{r}'} + \chi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \right] \quad (3.32)$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{L}} = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(-i \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{r}}} - f_{\mathbf{r}} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{r}'}} - f_{\mathbf{r}'} \right) \quad (3.33)$$

Во втором слагаемом в гамильтониане (3.32) суммирование идет по всем неупорядоченным парам ближайших соседей \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

Переходя в (3.32) от представления вторичного квантования к обычным квантово-механическим обозначениям, мы получаем гамильтониан системы в терминах дуальных фаз $\varphi_{\mathbf{r}}$ и канонически сопряженных к ним операторов числа частиц $\widehat{N}_{\mathbf{r}}$:

$$H_{dual} = 4\widetilde{E}_C \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (\widehat{N}_{\mathbf{r}} - f_{\mathbf{r}}) G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (\widehat{N}_{\mathbf{r}'} - f_{\mathbf{r}'}) - \sum_{[\mathbf{r}, \mathbf{r}']} \widetilde{E}_J(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cos(\varphi_{\vec{r}} - \varphi_{\vec{r}'} + \chi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \quad (3.34)$$

Гамильтониан (3.34) совпадает по форме с гамильтонианом стандартной джозефсоновской сетки с емкостной матрицей, содержащей только емкости контактов. Коэффициент при первом члене определяет дуальную зарядовую энергию

$$\tilde{E}_C = \pi^2 E_J / 2N. \quad (3.35)$$

Параметры $f_{\mathbf{r}}$, описывавшие в исходной модели магнитную фрустрацию, в дуальном гамильтониане описывают фрустрацию зарядовую.

Второй член представляет собой фрустрированное джозефсоновское взаимодействие. Дуальная джозефсоновская энергия

$$\tilde{E}_J(r, r') = |\Upsilon_{r,r'}| = \begin{cases} 2N\nu & \text{чистая сетка} \\ 2\sqrt{N}\nu \cdot |z_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}| \equiv \tilde{E}_J^d |z_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}| & \text{сильная зарядовая фрустрация} \end{cases} \quad (3.36)$$

Наконец, параметр магнитной фрустрация дуальной решетки определяется фазами $\chi_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$:

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} \chi_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \quad (3.37)$$

Явное выражение для $\Gamma_{\mathbf{x}}$ в терминах зарядов q_j выписано в приложении В.1. Здесь однако необходимо отметить следующее. В ситуации, когда заряды q_j отличны от нуля только на основных узлах исходной решетки $j = \mathbf{x}$, дуальная джозефсоновская энергия совпадает со своим "чистым" значением $2N\nu$, а параметр дуальной магнитной фрустрации

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = q_{\mathbf{x}} \quad (3.38)$$

Это соотношение будет полезно нам в следующем разделе.

3.4. Дуальность функций отклика

Для понимания свойств описанного выше дуального преобразования необходимо установить связь между восприимчивостями исходной и дуальной систем. Мы

начнем с изучения сверхпроводящей плотности ρ_s исходной системы. Эта величина (связанная с кинетической индуктивностью сетки на квадрат соотношением $\mathcal{L}_{\square}^K = \Phi_0^2 / (4\pi^2 \rho_s)$) определяет изменение свободной энергии при наложении на систему слабого медленно меняющегося магнитного поля $\delta \mathbf{A}$. В непрерывном пределе

$$\delta \mathcal{F} = \frac{(2\pi)^2}{2} \int \frac{d^2 \kappa}{(2\pi)^2} K(\kappa) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\kappa_\mu \kappa_\nu}{\kappa^2} \right) \delta \mathbf{A}_\mu(\kappa) \delta \mathbf{A}_\nu(-\kappa), \quad \rho_s = \lim_{\kappa \rightarrow 0} K(\kappa) \quad (3.39)$$

Удобно переписать $\delta \mathcal{F}$ через вариации магнитной фрустрации $\delta f_r = \sum_{\square} \delta \mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}$:

$$\delta \mathcal{F} = \frac{(2\pi)^2}{2} \int \frac{d^2 \kappa}{(2\pi)^2} K(\kappa) \frac{\delta f(\kappa) \delta f(-\kappa)}{\kappa^2} \quad (3.40)$$

В частном случае, когда $\delta f_{\mathbf{r}} = (\delta_{\mathbf{r}0} - \delta_{\mathbf{r}\mathbf{R}}) \delta f$ и $|\mathbf{R}| \rightarrow \infty$, получаем

$$\delta \mathcal{F} = (2\pi^2) \rho_s (G_{00} - G_{\mathbf{R}0}) \delta f^2 = 2\pi \rho_s \delta f^2 \ln |\mathbf{R}| \quad (3.41)$$

Заметим теперь, что на языке дуального гамильтониана (3.34), изменение параметров зарядовой фрустрации $\delta f_{\mathbf{r}} = (\delta_{\mathbf{r}0} - \delta_{\mathbf{r}\mathbf{R}}) \delta f$ представляет собой добавление в систему двух малых зарядов $\pm \delta f$ на расстоянии $|\mathbf{R}|$ друг от друга. Как легко установить, при нулевой температуре и в отсутствии дуального джозефсоновского взаимодействия \tilde{E}_J , соответствующее изменение свободной энергии системы

$$\delta \mathcal{F}|_{T=0, \tilde{E}_J=0} = 8\tilde{E}_C (G_{00} - G_{\mathbf{R}0}) \delta f^2 = \frac{4\tilde{E}_C}{\pi} \delta f^2 \ln |\mathbf{R}| \quad (3.42)$$

Конечная температура или \tilde{E}_J приводят к перенормировке взаимодействия (3.42) и появлению в нем дуальной диэлектрической проницаемости ε^D :

$$\delta \mathcal{F} = \frac{4\tilde{E}_C}{\pi \varepsilon_D} \delta f^2 \ln |\mathbf{R}| \quad (3.43)$$

Сравнение соотношений (3.40) и 3.43 показывает, что сверхпроводящая плотность исходной системы обратно пропорциональна дуальной диэлектрической проницаемости (здесь использовано (3.35)):

$$\rho_s = \frac{E_J}{N} \cdot \varepsilon_D^{-1} \quad (3.44)$$

Рассмотрим теперь диэлектрическую проницаемость исходной сетки, определяемую по энергии взаимодействия двух малых зарядов $\pm\delta q$, помещенных в узлах \mathbf{x} -решетки (ср. (3.19))

$$\delta F = \frac{4NE_C}{\pi\varepsilon}\delta q^2 \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (3.45)$$

Используя уравнение (3.38) и повторяя проделанные выше рассуждения в противоположном направлении, легко установить, что проницаемость ε обратно пропорциональна дуальной сверхпроводящей плотности ρ_s^D :

$$\varepsilon^{-1} = \frac{\pi^2}{2NE_C}\rho_s^D. \quad (3.46)$$

Относительно модели (3.34) известно (подробнее об этом будет сказано в разделе 3.5), что при низких температурах и малом дуальном джозефсоновском взаимодействии \tilde{E}_J ее состояние представляет собой изолятор и ε_D конечна. Наоборот, при низких температурах и больших \tilde{E}_J , дуальная модель находится в сверхпроводящем состоянии с ненулевой ρ_s^D . Полученные выше соотношения дуальности (3.44) и (3.46) позволяют утверждать, что сверхпроводящему состоянию решетки проволочек соответствует диэлектрическое состояние модели (3.34) и наоборот.

3.5. Квантовый переход сверхпроводник-изолятор

При нулевой температуре свойства модели (3.34) определяются параметром $g = \tilde{E}_J/\tilde{E}_C$. В случае отсутствия в исходной сетке случайных зарядов, который рассматривается в этом разделе, в дуальной решетке нет магнитной фрустрации и джозефсоновская энергия \tilde{E}_J не зависит от координат. При этом

$$g = \tilde{E}_J/\tilde{E}_C = 4N^2v/\pi^2E_J. \quad (3.47)$$

Ниже мы считаем, что исходная решетка фрустрирована однородным магнитным полем, т.е. $f_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \equiv f$.

При достаточно малых $g < g_c$ дуальная модель находится в изолирующем состоянии (исходная соответственно в сверхпроводящем). Критическое значение g_c при $f = 0$ было найдено в работах [37] (фейнмановский вариационный метод) и [38, 39] (численное исследование методом Монте-Карло):

$$g_c(f = 0) \approx 0.5 \quad (3.48)$$

В настоящем разделе мы обобщаем, вариационный метод, подробно описанный в [37] и находим g_c при $f = 1/2$.

Чтобы применить вариационный метод, мы представим дуальный гамильтониан в виде суммы зарядовой и джозефсоновской частей

$$H^{dual} = H_C + H_J \quad (3.49)$$

$$H_J = -\frac{\tilde{E}_J}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \xi_{\mathbf{r}}^+ \xi_{\mathbf{r}'}, \quad \xi_{\mathbf{r}} \equiv e^{i\varphi_{\mathbf{r}}} \quad (3.50)$$

и введем вариационный гамильтониан

$$H_{var} = H_C + H_J^{var} \quad (3.51)$$

$$H_J^{var} = - \sum_{\mathbf{r}} (\psi_{\mathbf{r}} \xi_{\mathbf{r}}^+ + \psi_{\mathbf{r}}^* \xi_{\mathbf{r}}) \quad (3.52)$$

Здесь $\psi_{\mathbf{r}}$ — вариационные параметры; $\gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 1$, если \mathbf{r} и \mathbf{r}' — ближайшие узлы \mathbf{r} -решетки и $\gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 0$ в противном случае.

В рамках вариационного метода свободная энергия системы дается соотношением

$$\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{var} = \mathcal{F}_{H_{var}} + \langle H_J - H_J^{var} \rangle_{H_{var}} \quad (3.53)$$

Здесь $\mathcal{F}_{H_{var}}$ — свободная энергия гамильтониана H_{var} ; он же участвует в усреднении. Вблизи точки перехода, $\psi_{\mathbf{r}}$ малы и мы можем разложиться по ним до второго

порядка. В этом приближении

$$\mathcal{F}_{var} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} L_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \psi_{\mathbf{r}}^* \psi_{\mathbf{r}'} + const. \quad (3.54)$$

$$L_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = 2 \int_0^\beta d\tau \langle \xi_{\mathbf{r}}(\tau) \xi_{\mathbf{r}'}^+(0) \rangle_{ch} - \tilde{E}_J \gamma_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \langle T_\tau \xi_{\mathbf{r}}(\tau_1) \xi_{\mathbf{r}'}^+(\tau_2) \xi_{\mathbf{r}}(0) \xi_{\mathbf{r}'}^+(0) \rangle_{ch} \quad (3.55)$$

В выражении (3.55) $\beta \rightarrow \infty$ — обратная температура, T_τ — символ хронологического упорядочения в мнимом времени, а усреднение по производится с зарядовым гамильтонианом H_C . Требуемые корреляционные функции легко вычисляются при $f = 0, 1/2$ и нулевой температуре, если учесть то обстоятельство, что $\xi_{\mathbf{r}'}(0) |\{N_{\mathbf{r}}\}\rangle = |\{N_{\mathbf{r}} + \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}\}\rangle$, где $|\{N_{\mathbf{r}}\}\rangle$ — собственное состояние гамильтониана H_C с определенными дуальными зарядами во всех узлах \mathbf{r} -решетки. Кроме того отметим, что в случае максимальной фрустрации $f = 1/2$ основным состоянием зарядового гамильтониана является состояние с единичным дуальным зарядом в каждом втором узле \mathbf{r} -решетки. Мы проиллюстрируем это вполне стандартное вычисление на примере более простого коррелятора $\langle \xi_{\mathbf{r}}(\tau) \xi_{\mathbf{r}'}^+(0) \rangle_{ch}$. Второй коррелятор в (3.55) вычисляется полностью аналогично. Вставляя в коррелятор два полных набора базисных состояний, выполняя интегрирование по τ и учитывая форму матричного элемента, мы получаем

$$\int_0^\beta d\tau \langle \xi_{\mathbf{r}}(\tau) \xi_{\mathbf{r}'}^+(0) \rangle_{ch} = \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sum_{\{N_{\mathbf{R}}\}} \frac{e^{-\beta E_{\{N_{\mathbf{R}}\}}} - e^{-\beta E_{\{N_{\mathbf{R}} + \delta_{\mathbf{R}, \mathbf{r}}\}}}{E_{\{N_{\mathbf{R}} + \delta_{\mathbf{R}, \mathbf{r}}\}} - E_{\{N_{\mathbf{R}}\}}} \quad (3.56)$$

Здесь $E_{\{N_{\mathbf{R}}\}}$ — дуальная зарядовая энергия состояния $|\{N_{\mathbf{R}}\}\rangle$, а суммирование идет по всем таким состояниям. При нулевой температуре в сумму дают вклад только слагаемые, для которых $|\{N_{\mathbf{R}}\}\rangle$ или $|\{N_{\mathbf{R}} + \delta_{\mathbf{R}, \mathbf{r}}\}\rangle$ является основным состоянием. При этом знаменатель в (3.56) представляет собой энергию *заряженного* возбуждения над основным состоянием. Независимо от наличия в системе дуальной зарядовой фрустрации f энергия такого возбуждения расходится с размером системы $\epsilon_+ = (2\tilde{E}_C/\pi) \log \mathcal{M}$. В главном порядке по $1/\epsilon_+$ мы получаем

окончательно

$$\int_0^\beta d\tau \langle \xi_{\mathbf{r}}(\tau) \xi_{\mathbf{r}'}^+(0) \rangle_{ch} = \frac{2}{\epsilon_+} \quad (3.57)$$

Вычисляя в том же приближении четырехточечный коррелятор и подставляя его в (3.55) мы получаем

$$L_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \frac{4}{\epsilon_+} - \frac{2\tilde{E}_J}{\epsilon_+} \gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{r}+, \mathbf{r}'-}} + \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{r}-, \mathbf{r}'+}} \right), \quad (3.58)$$

где $\epsilon_{\mathbf{r}+, \mathbf{r}'-}$ энергия элементарного диполя, расположенного на одной из связей решетки (в точке \mathbf{r} находится положительный заряд, а в точке \mathbf{r}' — отрицательный). В отсутствии магнитного поля ($f = 0$) эта энергия не зависит от положения диполя и $\epsilon_{\mathbf{r}+, \mathbf{r}'-} = 2\tilde{E}_C$. При $f = 1/2$ основное состояние зарядового гамильтониана не обладает трансляционной симметрией и $\epsilon_{\mathbf{r}+, \mathbf{r}'-}$ принимает два значения \tilde{E}_C и $3\tilde{E}_C$ в зависимости от расположения точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' относительно сверхрешетки зарядов, имеющейся в основном состоянии. Легко убедиться однако, что сумма стоящая в скобках в выражении (3.58) не зависит от \mathbf{r} и \mathbf{r}' и равна $4/(3\tilde{E}_C)$. Поэтому окончательно

$$L_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \frac{4}{\epsilon_+} - 2c_f \frac{\tilde{E}_J}{\epsilon_+ \tilde{E}_C} \gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} , \quad c_0 = 1, \quad c_{1/2} = \frac{4}{3}. \quad (3.59)$$

Точка перехода определяется из условия появления у оператора $L_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ нулевого собственного значения. При $f = 0$ мы находим результат $g_c = 1/2$, полученный в [37], а при $f = 1/2$

$$g_c = \frac{3}{8} \quad (3.60)$$

3.6. Сверхпроводящая плотность и фазовая диаграмма.

При $g < g_c$ и низких температурах $T < T_{sup}(g)$, решетка проволок находится в сверхпроводящем состоянии. При $T \rightarrow 0$ и $g \rightarrow 0$ сверхпроводящая плотность

ρ_s равна E_J/N . В этом разделе в мы изучим влияние квантовых флуктуаций на ρ_s в рамках теории возмущений и найдем температуру перехода $T_{sup}(g)$.

Для нахождения ρ_s удобно воспользоваться соотношением дуальности (3.44). Рассматривая отклик свободной энергии дуальной системы на добавление к ней пары зарядов $\pm\delta f$ на большом расстоянии друг от друга (как это делалось в разделе 3.4), легко установить связь ε_D с коррелятором операторов $\widehat{N}_{\mathbf{r}}$:

$$\frac{1}{\varepsilon_D} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left(1 - 8E_C \frac{R(\kappa, 0)}{\kappa^2} \right) \quad (3.61)$$

$$R(\kappa, \omega = 0) = \sum_{\mathbf{r}} \int d\tau \langle \langle \widehat{n}_{\mathbf{r}}(\tau) \widehat{n}_{\mathbf{0}}(0) \rangle \rangle e^{-i\kappa \mathbf{r}}, \quad (3.62)$$

где двойные скобки означают неприводимый коррелятор, а $\widehat{n}_{\mathbf{r}} = \widehat{N}_{\mathbf{r}} - f$.

Корреляционная функция $R(p, 0)$ может быть разложена по степеням дуальной джозефсоновской энергии \widetilde{E}_J . Это разложение содержит только четные степени параметра $g = \widetilde{E}_J/\widetilde{E}_C$. Возникающие в этом разложении корреляционные функции вида $\langle T_{\tau} \widehat{n}_{\mathbf{r}} \widehat{n}_{\mathbf{0}} \xi_{\mathbf{r}_1} \xi_{\mathbf{r}'_1}^+ \dots \rangle_{ch}$ вычисляются в принципе тем же способом, который был описан в разделе 3.5.

Рассмотрим это вычисление более детально (для случая $f = 0$). Во втором порядке теории возмущений находим

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} &= \frac{E_J^2}{8} \gamma_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1} \gamma_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2} \int d\tau d\tau_1 d\tau_2 \langle \widehat{n}_{\mathbf{r}}(\beta) \widehat{n}_{\mathbf{r}}(\beta - \tau) \xi_{\mathbf{r}_1}(\tau_1) \xi_{\mathbf{r}'_1}^*(\tau_1) \xi_{\mathbf{r}_2}(\tau_2) \xi_{\mathbf{r}'_2}^*(\tau_2) \rangle_{ch} \\ &= \frac{E_J^2}{4} \gamma_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1} \gamma_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2} \int_{\tau_1 > \tau_2} d\tau d\tau_1 d\tau_2 \langle T_{\tau} \widehat{n}_{\mathbf{r}}(\beta) \widehat{n}_{\mathbf{r}}(\beta - \tau) \xi_{\mathbf{r}_1}(\tau_1) \xi_{\mathbf{r}'_1}^*(\tau_1) \xi_{\mathbf{r}_2}(\tau_2) \xi_{\mathbf{r}'_2}^*(\tau_2) \rangle_{ch} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Вставляя полные наборы собственных состояний зарядового гамильтониана, вычисляя возникающие интегралы и учитывая форму матричных элементов, получаем

$$R_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \frac{\widetilde{E}_J^2}{\epsilon_{+-}^3} (4\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} - \gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \quad (3.64)$$

Здесь $\epsilon_{+-} = 2E_C$ — энергия упоминавшегося уже выше элементарного диполя.

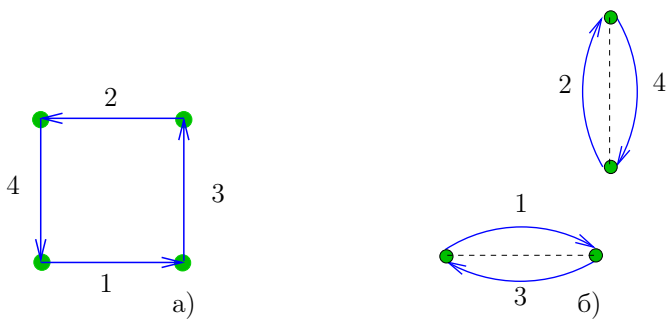


Рис. 3.2. Процессы, дающие вклад в коррелятор $R_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$. Рисунки а) и б) изображают по одной из возможных кольцевых и парных диаграмм соответственно. Цифры рядом со стрелками показывают, в каком порядке происходит туннелирование дуального заряда. Порядок перескоков может быть любым.

Соответственно, во втором порядке по g для сверхпроводящей плотности имеем

$$\rho_s(f = 0, T = 0) = \frac{E_J}{N} (1 - g^2) \quad (3.65)$$

Аналогичное вычисление для $f = 1/2$ дает

$$\rho_s(f = \frac{1}{2}, T = 0) = \frac{E_J}{N} \left(1 - \frac{112}{27} g^2 \right) \quad (3.66)$$

Отметим следующее обстоятельство. Перенормировка дуальной диэлектрической проницаемости во втором порядке теории возмущений возникает за счет процессов туннелирования дуального заряда с одного узла решетки на соседний и обратно. Этот процесс не чувствителен к дуальной магнитной фрустрации в системе, так как его вклад пропорционален квадрату модуля матричного элемента перескока $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$.

При $f = 0$ вычисление поправок к ρ_s удастся распространить на четвертый порядок по g (при $f = 1/2$ это невозможно из-за чисто алгебраических сложностей). Для этого необходимо произвести вычисление коррелятора, содержащего четыре пары операторов ξ и ξ^+ .

Вклад этот коррелятор дают процессы двух разных типов. В процессах первого типа дуальный заряд совершает полный обход вокруг одной ячейки

решетки (см. рис. 3.2) ("кольцевые диаграммы"), в то время как процессы второго типа ("парные диаграммы") состоят из двух пар перескоков туда и обратно вдоль одного и того же ребра. Отметим, что появление в теории несвязных диаграмм вызвано дальнедействующим характером дуального кулоновского взаимодействия. По разъясненной выше причине, вклад процессов второго типа не чувствителен к зарядовой фрустрации дуальной решетки.

Окончательный ответ для сверхтекучей плотности имеет вид

$$\rho_s(f = 0, T = 0) = \frac{E_J}{N} [1 - g^2 - (a_p + a_r)g^4], \quad a_p = 0.84 \quad a_r = 2.42 \quad (3.67)$$

Здесь коэффициент a_p соответствует вкладу парных диаграмм, а коэффициент a_r учитывает кольцевые диаграммы.

Уравнения (3.67, 3.66) описывают подавление сверхпроводящей плотности квантовыми флуктуациями при нулевой температуре. С повышением температуры начинается разрушение сверхпроводимости за счет тепловых флуктуаций и при некоторой температуре $T_{sup}(g)$ в системе происходит переход в металлическое состояние по механизму БКТ. При этом

$$T_{sup}(g) = A_f \frac{\pi}{2} \rho_s(f, T = 0) \quad (3.68)$$

Коэффициент A_f описывает подавление сверхпроводящей плотности тепловыми флуктуациями. Он изучался в цитированных уже выше работах [34–36], где было найдено (ср. соотношения (3.17, 3.18)):

$$A_0 = 0.87, \quad A_{1/2} = 0.52 \quad (3.69)$$

Выражения (3.67, 3.66, 3.68) определяют температуру перехода сетки проводочков в сверхпроводящее состояние при учете квантовых флуктуаций и составляют один из основных результатов этой главы. Зависимости $T_{sup}(g, f = 0)$ и $T_{sup}(g, f = 1/2)$ показаны на рисунке 3.3 сплошной линией без дополнительных отметок и сплошной линией с крестиками соответственно.

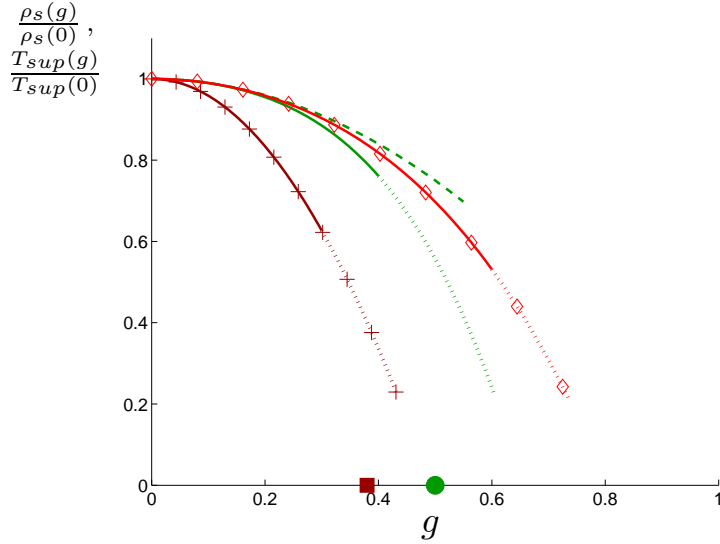


Рис. 3.3. Температура перехода металл-сверхпроводник как функция параметра g . Сплошная линия без дополнительных отметок изображает нультемпературную сверхпроводящую плотность $\rho_s(g)$ в отсутствии магнитного поля и случайных зарядов с учетом поправки четвертого порядка (уравнение (3.67)). Пунктирная линия изображает ту же ρ_s , но с учетом только поправки второго порядка. Сплошная линия с крестиками демонстрирует $\rho_s(g)$ в присутствии магнитной фрустрации $f = 1/2$. Наконец линия с ромбиками показывает $\rho_s(\bar{g})$ в присутствии сильного зарядового беспорядка (см. раздел 3.7). Отметим, что в последнем случае вдоль оси абсцисс отложена величина $\bar{g} = \tilde{E}_J^d / \tilde{E}_C = 4N^{3/2}\nu/\pi^2 E_J$. Линии из точек изображают экстраполяцию сплошных линий в область параметров, где поправки к ρ_s не малы. Кружок и квадрат на оси абсцисс показывают полученные вариационным методом точки квантового перехода сверхпроводник-изолятор при $f = 0$ и $f = 1/2$ соответственно.

При $g > g_c$ основное состояние гамильтониана (3.34) представляет собой бозе-конденсат дуальных зарядов (вихрей). Очень глубоко в дуальном сверхпроводящем состоянии (диэлектрическом состоянии исходной сетки) дуальная сверхпроводящая плотность

$$\rho_s^D(g = \infty) = \tilde{E}_J = 2Nv \quad (3.70)$$

При этом в системе имеются коллективные возбуждения с частотой

$$\omega_p^D = \sqrt{8\tilde{E}_C\tilde{E}_J} = 2^{3/2}\pi\sqrt{vE_J}, \quad (3.71)$$

представляющие собой аналог обычных плазменных колебаний. Отметим, что $\omega_p^D \ll \omega_p = \sqrt{8E_JE_C}$

При конечных g имеются поправки к ρ_s^D вызванные флуктуациями дуальных фаз φ_r . В низшем порядке по $1/g$ они обусловлены ангармонизмом нулевых колебаний фаз φ_r . В этом приближении

$$\rho_s^D = \rho_s^D(g = \infty)\langle \cos(\varphi_r - \varphi_{r+b}) \rangle = \rho_s^D(1 - 1/\sqrt{8g}) \quad (3.72)$$

Поскольку результат (3.72) не учитывает флуктуаций φ_r с нетривиальной топологией, он не чувствителен к параметру дуальной зарядовой фрустрации f .

В соответствии с (3.46) ρ_s^D определяет диэлектрическую проницаемость сетки проволок. Используя также (3.21) мы получаем

$$\varepsilon^{-1}(T = 0, g) = 2^{11/4}\pi^{3/2} \left(\frac{E_J}{E_C}\right)^{3/4} e^{-\sqrt{8E_J/E_C}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8g}}\right) \quad (3.73)$$

В этой ситуации, взаимодействие куперовских пар в сетке проволок является логарифмическим и описывается потенциалом $U(x) = (4NE_C/\pi\varepsilon)\ln(x)$ (ср. (3.45)). Соответственно, при температуре

$$T_{ins}(g) = 0.57 \frac{NE_C}{\pi\varepsilon(T = 0, g)} \quad (3.74)$$

сетка испытывает переход из диэлектрического состояния в металлическое. Коэффициент 0.57 в (3.74) описывает перенормировку ε тепловыми флуктуациями [5].

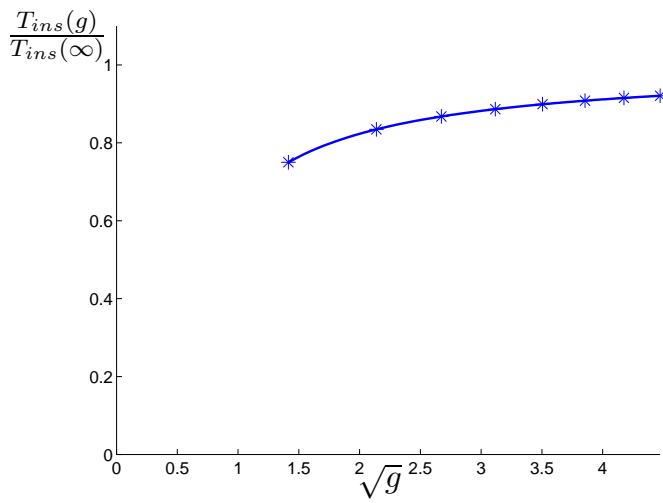


Рис. 3.4. Температура перехода металл-изолятор как функция параметра g . Температура перехода металл-изолятор в решетке проволочек в пределе больших g и в отсутствие зарядовой фрустрации. По оси абсцисс отложен $\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{E}_J/\tilde{E}_C}$.

При температуре $T > T_{ins}$ в сетке имеются свободные заряды и она обладает конечной проводимостью. Ниже T_{ins} линейная проводимость равна нулю. Зависимость нормированной температуры перехода металл-изолятор $T_{ins}(g)/T_{ins}(0)$ от параметра g изображена на рисунке 3.4.

Заметим, что из-за условия $E_J \gg E_C$ (основное предположение построенной теории) диэлектрическая постоянная ε всегда очень велика. При этом, температура T_{ins} очень мала по сравнению с температурой перехода в металлическое состояние сетки с нулевой джозефсоновской энергией E_J (см. (3.20)).

3.7. Сильный зарядовый беспорядок

Обсудим теперь поведение сетки проволочек в режиме сильной зарядовой фрустрации. Ниже мы везде будем считать, что физическое магнитное поле в системе отсутствует ($f = 0$), а температуру будем предполагать равной нулю.

Согласно (3.36), случайные заряды уменьшают дуальную джозефсоновскую энергию. Соответственно в рассматриваемом случае параметром, контролирую-

щим квантовые флуктуации в системе является

$$\bar{g} = \frac{\tilde{E}_J^d}{\tilde{E}_C} = \frac{4N^{3/2}\nu}{\pi^2 E_J}, \quad (3.75)$$

Кроме того, дуальное джозефсоновское взаимодействие является сильно фрустрированным (из-за случайных фаз $\chi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$, см. (3.34)).

Два названных выше факта приводят к существенному подавлению процессов туннелирования вихрей. В частности, усредненная по беспорядку сверхпроводящая плотность дается выражением

$$\rho_s = \frac{E_J}{N} (1 - \bar{g}^2 - 0.84\bar{g}^4). \quad (3.76)$$

Для получения (3.76) мы исключили из (3.67) вклад кольцевых диаграмм $a_r g^4$, обращающийся в нуль при усреднении по беспорядку, и заменили возникающие в парных диаграммах квадраты модулей матричных элементов $|\Upsilon_{r,r'}|^2$ их средним значением $(\tilde{E}_J^d)^2$. Зависимость ρ_s от параметра \bar{g} изображена

При достаточно больших \bar{g} происходит разрушение сверхпроводящего основного состояния сетки. В дуальном представлении (3.34) это соответствует формированию при $\bar{g} = \bar{g}_c \sim 1$ "калибровочного стекла" (см. например [40]) с замороженными вихревыми токами, подобными незатухающим токам в фрустрированных случайных джозефсоновских сетках. В физических переменных это означает появление коллективного изолятора с локальными электрическими полями. При $\bar{g} \gg 1$ и $T = 0$ дуальная сверхпроводящая плотность ρ_s^D (а следовательно и обратная диэлектрическая проницаемость исходной системы ε^{-1}) пропорциональна $\tilde{E}_J^d = 2\sqrt{N}\nu$. При сколь угодно низкой температуре калибровочное стекло в двумерной решетке со связью только ближайших соседей разрушается тепловыми флуктуациями [41, 42]. Поэтому при $T > 0$ решетка проволочек обладает малой, но ненулевой проводимостью. Отсутствие фазового перехода при конечных T , связанного с распариванием зарядов, отражает *качественные* изменения свойств модели, вносимые случайной зарядовой фрустрацией. Отметим также,

что в рассматриваемом случае введенная выше дуальная джозефсоновская частота уменьшается с увеличением числа контактов в проволочке (ср. 3.71):

$$\omega_p^D \sim N^{-1/4} \quad (3.77)$$

3.8. Подведение итогов

В настоящей главе предложена новая система, удобная как для теоретического, так и для экспериментального изучения квантового перехода сверхпроводник-изолятор (и других подобных явлений) в джозефсоновских сетках. Система допускает достаточно полное теоретическое описание.

Центральным результатом главы 3 является построение дуального преобразования, переводящее гамильтониан сетки проволочек в стандартный гамильтониан джозефсоновской сетки на квадратной решетке. Подчеркнем, что точность этого преобразования явно контролируется параметром N^{-1} .

На основании построенного преобразования нам удалось идентифицировать параметр g , контролирующий свойства системы при нулевой температуре (соотношения (3.47, 3.75)), и определить (вариационным методом) критические значения g_c , соответствующие переходу сверхпроводник-изолятор, при двух значениях параметра магнитной фрустрации $f = 0$ и $f = 1/2$.

Далее нам удалось вычислить сверхпроводящую плотность системы в различных ситуациях (уравнения (3.67, 3.66, 3.76)) и найти зависимость температуры перехода сверхпроводник-металл от параметра g , контролирующего квантовые флуктуации. Аналогичные результаты были получены для диэлектрической проницаемости системы (3.73) и температуры перехода металл-изолятор.

Одним из интересных и экспериментально проверяемых следствий построенной теории является наличие низкоэнергетической коллективной моды (дуальной обычной плазменной) в диэлектрическом состоянии решетки. В отсутствие случайных зарядов ее частота ω_p^D не зависит от числа контактов в проволочках, в то

время как в фрустрированной зарядами сетке $\omega_p^D \sim N^{-1/4}$.

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

1. Изучен когерентный транспорт во фрустрированной цепочке джозефсоновских ромбиков в важном с точки зрения эксперимента случае, когда емкость джозефсоновских контактов C велика по сравнению с емкостью сверхпроводящих островков C_0 . Вычислены амплитуды $4e$ - и $2e$ -сверхтоков в цепочке при конечном отклонении от точки максимальной фрустрации. Найдено критическое отклонение $\delta\Phi^c = |\Phi_r - \Phi_0/2|$, при котором $2e$ -сверхток начинает доминировать над $4e$ -сверхтоком.
2. Исследовано влияние зарядового (случайные заряды в подложке) замороженного беспорядка на свойства цепочки ромбиков. Получено явное выражение для вероятности (в зависимости от реализации беспорядка) обнаружить систему в режиме с доминирующим $4e$ -сверхтоком. Определено типичное значение критического отклонения от максимальной фрустрации, разрушающего $4e$ сверхток. Показано, что достаточно слабый магнитный беспорядок (разброс потоков в ромбиках не превосходящий $\delta\Phi^c$) не оказывает существенного влияния на спаривание куперовских пар.
3. Предложена новая модельная система удобная для экспериментального и теоретического изучения квантового перехода сверхпроводник-изолятор и связанных с ним явлений. Предлагаемая система представляет собой сетку джозефсоновских проволочек в виде квадратной решетки, каждое ребро которой состоит из большого числа квазиклассических джозефсоновских контактов. Для такой модели найдено точное дуальное преобразование, переводящее ее гамильтониан в стандартный гамильтониан джозефсоновской сетки, и вычислена точка нультемпературного перехода сверхпроводник-изолятор при значениях параметра магнитной фрустрации $f = 0, 1/2$. Опреде-

лены температуры переходов сверхпроводник-металл и металл-изолятор с учетом квантовых флуктуации.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

1. I.V. Protopopov, M.V. Feigel'man, *Anomalous periodicity of supercurrent in long frustrated Josephson-junction rhombi chain.*, Phys. Rev. B **70**, 184519, (2004).
2. I.V. Protopopov, M.V. Feigel'man, *Coherent transport in Josephson-junction rhombi chain with quenched disorder.*, Phys. Rev. B **74**, 064516, (2006).
3. I.V. Protopopov, M.V. Feigel'man, *Superconductor-insulator duality for the array of Josephson wires.*, Письма в ЖЭТФ **85**, 621-626, (2007).

Чистая цепочка ромбиков

А.1. Конфигурации фаз в классических состояниях цепочки ромбиков

В этом приложении мы детально обсуждаем минимизацию джозефсоновской энергии цепочки

$$E = -E_J \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 \cos \theta_n^{(m)} \quad (\text{A.1})$$

и расположение ее классических состояний в фазовом пространстве. Сначала мы будем искать все "математические" классические состояния (в том смысле, что конфигурации разностей фаз, являющиеся физически эквивалентными, мы будем считать различимыми) и лишь затем построим классификацию физических состояний. Знание всевозможных математических представителей данного физического состояния поможет нам в определении траекторий проскоков фазы. Для простоты мы ограничимся случаем максимально фрустрированной цепочки. Случай $\delta \neq 0$ рассматривается полностью аналогично.

Как было сказано в основном тексте, сначала мы минимизируем энергию одного ромбика при фиксированной разности фаз вдоль его диагонали

$$\theta_n = -\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)}. \quad (\text{A.2})$$

Имеем

$$E_n = -2E_J \left(\cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)}}{2} - \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}}{2} \right) \quad (\text{A.3})$$

При минимизации этого выражения возникают 4 варианта (по определению $\sigma_n^z = \text{sign} \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2}$, $k_n^{(1)}$ и $k_n^{(2)}$ — целые числа)

$$1. \cos \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sigma_n^z = 1$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$2. \cos \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sigma_n^z = 1$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = \pi - \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\pi - \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$3. \cos \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sigma_n^z = -1$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$4. \cos \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sigma_n^z = -1$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = \pi - \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\pi - \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_n}{2} - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Энергия ромбика в минимуме

$$E_n = -2E_J \left(\left| \cos \frac{\theta_n}{2} \right| + \left| \sin \frac{\theta_n}{2} \right| \right) = -2\sqrt{2}E_J \cos \left(\frac{\theta_n}{2} - \beta_n \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\sigma_n^z, & \cos \frac{\theta_n}{2} > 0, \\ \frac{\pi}{4}\sigma_n^z + \pi, & \cos \frac{\theta_n}{2} < 0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

После минимизации полной энергии цепочки по θ_n получаем (m_n — произвольные целые)

$$\theta_n = \frac{\gamma - \pi S^z - 2\pi m}{N} + 2\pi m_n + \pi S_n^z, \quad \sum_{n=1}^N m_n = m, \quad (\text{A.10})$$

$$R = \frac{\gamma - \pi S^z - 2\pi m}{N} \quad (\text{A.11})$$

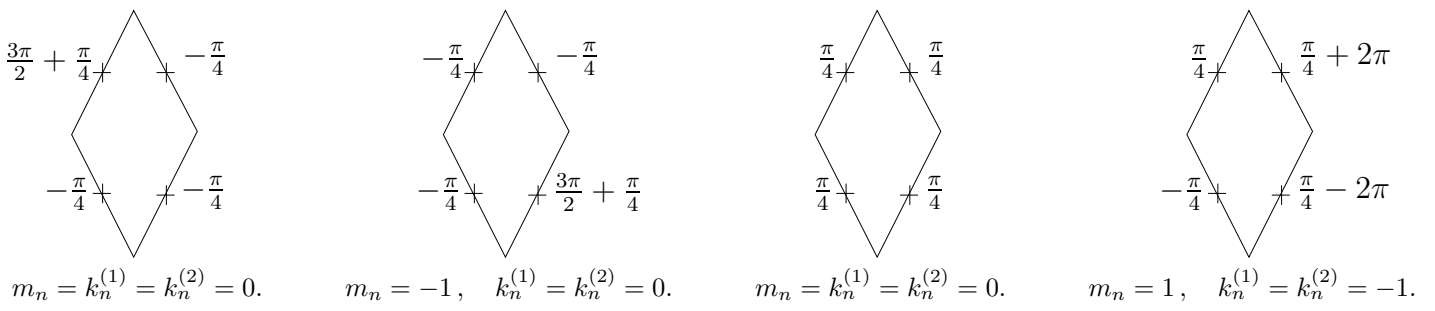


Рис. А.1. Несколько примеров конфигураций разностей фаз в классических состояниях. Величина R положена равной нулю для наглядности.

Выписанные состояния являются локальными минимума энергии при условии $R \ll 1$.

Теперь мы можем явно предъявить полный набор "математических" классических состояний в виде четырех групп

$$1. \quad \cos \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sigma_n^z = 1, \quad m_n - \text{четное}$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{R}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi m_n + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{R}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi m_n - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{R}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi m_n + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{R}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi m_n - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$2. \quad \cos \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sigma_n^z = 1, \quad m_n - \text{нечетное}$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{R}{2} + \frac{3\pi}{4} - \pi m_n + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{R}{2} - \frac{5\pi}{4} - \pi m_n - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{R}{2} + \frac{3\pi}{4} + \pi m_n + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{R}{2} + \frac{3\pi}{4} + \pi m_n - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$3. \quad \cos \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sigma_n^z = -1, \quad m_n - \text{четное}$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{R}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi m_n + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{R}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi m_n - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{R}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi m_n + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{R}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi m_n - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$4. \quad \cos \frac{\theta_n}{2} < 0, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} > 0, \quad \sigma_n^z = 1, \quad m_n - \text{нечетное}$$

$$\begin{cases} \theta_n^{(3)} = -\frac{R}{2} + \pi + \frac{\pi}{4} - \pi m_n + 2\pi k_n^{(1)} \\ \theta_n^{(4)} = -\frac{R}{2} - \pi + \frac{\pi}{4} - \pi m_n - 2\pi k_n^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_n^{(1)} = \frac{R}{2} + \frac{5\pi}{4} + \pi m_n + 2\pi k_n^{(2)} \\ \theta_n^{(2)} = \frac{R}{2} - \frac{3\pi}{4} + \pi m_n - 2\pi k_n^{(2)} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

По одному примеру из каждой группы состояний приведено на рисунке А.1.

Физически классические состояния характеризуются токами I_n в каждом из ромбиков и полным током в кольце I . Вычисляя их получим (I_c^0 — критический ток одного контакта)

$$I_n \equiv -\frac{I_c^0}{2} \left(\sin \theta_n^{(1)} + \sin \theta_n^{(3)} \right) = I_c^0 \cdot S_n^z \sqrt{2} \cos \frac{R}{2} \quad (\text{A.16})$$

$$I \equiv \sin \theta_n^{(1)} - \sin \theta_n^{(3)} = I_c^0 \sqrt{2} \sin \frac{R}{2} \quad (\text{A.17})$$

Таким, образом, мы видим, что задавая набор "спинов" ромбиков и переменную m мы полностью определяем физическое классическое состояние.

Возможная траектория туннелирования системы из одного классического состояния в другое (траектория проскока фазы) должна соединять два минимума, у которых существуют математические представители находящиеся как можно ближе друг к другу в фазовом пространстве. В противном случае соответствующий матричный элемент будет крайне мал.

Анализируя с этой точки зрения полученные выше выражения, мы приходим к тем утверждениям относительно возможных траекторий туннелирования системы, которые были сделаны в разделе (1.2).

А.2. Квазиклассический анализ $I(\tilde{\gamma})$

В этом приложении мы получим зависимость наименьшего собственного значения b задачи, определяемой уравнениями (1.12,1.13), от фазы $\tilde{\gamma}$ в режиме сильных флуктуаций и выведем выражение (1.33) для сверхпроводящего тока.

Рассмотрим более подробно амплитуду перехода (1.26) в случае, когда (x_1, y_1) — четный минимум потенциала (1.28), а (x_2, y_2) — нечетный, ср. (1.31,1.32). Для конкретности выберем $(x_1, y_1) = (0, -d)$ и $(x_2, y_2) = (\pi/2, d)$. Линии уровня потенциала $U_{eff}(x, y)$ представлены на Рис. А.2. Возможные туннельные траектории схематически изображены стрелками. Удобно разделить все траектории туннели-

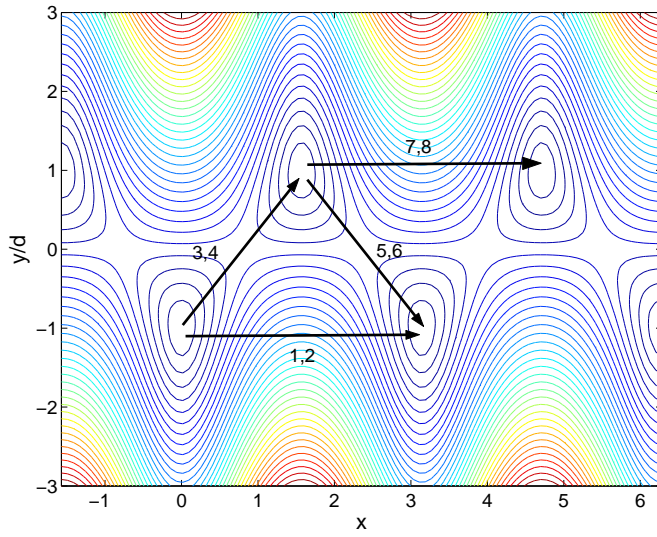


Рис. А.2. Линии уровня потенциала $U_{eff}(x, y)$.

рования на восемь групп. На всякой траектории из группы 1, переменная y не меняется и равна $-d$ на обоих концах траектории, в то время как переменная x увеличивается на π ; траектории из группы 2 — партнеры траекторий из группы 1 (идущие против стрелки на Рис. А.2). Группы 3, 4, ..., 8 определяются аналогично в соответствии с Рис. А.2. Все траектории из групп 1, 2, 7, 8 соединяют минимумы одинаковой четности и являются траекториями первого типа в терминах раздела 1.2, в то время как траектории из групп 3, 4, 5, 6 соединяют минимумы противоположной четности и являются траекториями второго типа.

Обозначим через $T\alpha_{4e}$ и $T\alpha_{2e}$ вклады в амплитуду туннелирования от *единственной* траектории первого и второго типов соответственно, т.е.

$$\alpha_{4e} = \beta_{4e} e^{-S_E^{4e}} \quad \alpha_{2e} = \beta_{2e} e^{-S_E^{2e}}, \quad (\text{A.18})$$

где предэкспоненциальные множители β_{4e} и β_{2e} могут быть получены интегрированием по флуктуациям возле соответствующих траекторий. Для вычисления амплитуды перехода (1.26) в квазиклассическом приближении необходимо просуммировать вклады от всех траекторий, состоящих из n_1 подтраекторий из группы 1, n_2 подтраекторий из группы 2 и так далее. Такая траектория, включающая

$R = \sum_{k=1}^8 n_k$ подтраекторий дает в функциональный интеграл (1.26) вклад

$$\frac{T^R}{R!} \alpha_{4e}^{n_3+n_4+n_5+n_6} \alpha_{2e}^{n_1+n_2+n_7+n_8}. \quad (\text{A.19})$$

Поскольку все рассматриваемые траектории начинаются в точке $(0, -d)$ и заканчиваются в $(\pi/2, d)$, на целые числа n_1, \dots, n_8 необходимо наложить ограничения:

$$2(n_1 + n_7) - 2(n_2 + n_8) + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 = 1, \quad (\text{A.20})$$

$$n_3 - n_4 - n_5 + n_6 = 1. \quad (\text{A.21})$$

Обозначим

$$K = n_1 + n_7, \quad L = n_2 + n_8 \quad M = n_4 + n_5 = n_3 + n_6 - 1. \quad (\text{A.22})$$

Все траектори с фиксированными K, L, M, n_3 и n_4 дают одинаковый вклад в амплитуду перехода. Число таких траекторий

$$\frac{R!(M+1)!M!}{(2M+1)!K!L!n_3!n_4!(M-n_4)!(M-n_3+1)!} \quad (\text{A.23})$$

Таким образом, принимая во внимание (A.19, A.23, A.20), для амплитуды перехода в квазиклассическом приближении мы получаем

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \sum_{\substack{K, L, n_3, n_4 \geq 0 \\ M \geq \max(n_4, n_3 - 1) \\ K - L + n_3 - n_4 = 1}} \frac{(T\alpha_{4e})^{K+L} (T\alpha_{2e})^{2M+1} (M+1)!M!}{K!L!n_3!n_4!(2M+1)!(M-n_4)!(M-n_3+1)!}. \quad (\text{A.24})$$

Вместо вычисления суммы (A.24) удобно рассмотреть функцию $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$, определенную согласно соотношению

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \frac{1}{T} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_{2e}}. \quad (\text{A.25})$$

Для функции $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$ мы имеем

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{K, L, n_3, n_4 \geq 0 \\ M \geq \max(n_4, n_3 - 1) \\ K - L + n_3 - n_4 = 1}} \frac{(T\alpha_{4e})^{K+L} (T\alpha_{2e})^{2M+2} B(M+1, M+1)}{K!L!n_3!n_4!(M-n_4)!(M-n_3+1)!}, \quad (\text{A.26})$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Используя интегральное представление бета-функции и разложение в ряд модифицированных функций Бесселя [26]

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2x-1} (\cos \varphi)^{2y-1}, \quad I_n(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_k \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!}, \quad (\text{A.27})$$

мы можем выполнить суммирование по M, K, L в (A.26) и получить

$$Q = \sum_{n_3, n_4 \geq 0} \frac{(T\alpha_{2e})^{n_4+n_3+1} I_{|n_4-n_3+1|}(2T\alpha_{4e})}{2^{n_3+n_4+1} n_3! n_4!} \int_0^\pi d\varphi (\sin \varphi)^{n_3+n_4} I_{|n_4-n_3+1|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi). \quad (\text{A.28})$$

Вводя обозначение $Z = n_3 - 1 - n_4$ и суммируя по n_3, n_4 при фиксированном Z , находим

$$Q = \frac{T\alpha_{2e}}{2} \sum_{Z=-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi d\varphi I_{|Z|}(2T\alpha_{4e}) I_{|Z|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi) I_{|Z+1|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi). \quad (\text{A.29})$$

Принимая во внимание интегральное представление модифицированных функций Бесселя выражение для их производящей функции [26]

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta + z \cos \theta), \quad \exp\left\{\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k I_k(z), \quad (\text{A.30})$$

мы можем переписать (A.29) в виде

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \frac{T\alpha_{2e}}{4} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \times \\ \exp\{T\alpha_{2e} \sin \varphi (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 2T\alpha_{4e} \cos(\theta_1 + \theta_2)\}. \quad (\text{A.31})$$

После подстановки $u = (\theta_1 + \theta_2)/2, v = (\theta_1 - \theta_2)/2$ мы интегрируем по φ и v , используя соотношение [43]

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi I_1(2z \sin \varphi) = \frac{\pi}{2} I_{1/2}^2(z) = \frac{\sinh^2 z}{z}, \quad (\text{A.32})$$

и получаем интегральное представление для $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \int_0^\pi \frac{du}{2\pi} \{ \cosh(2T\alpha_{2e} \cos u) - 1 \} \exp(2T\alpha_{4e} \cos 2u). \quad (\text{A.33})$$

Окончательно, используя (A.25) мы находим явное выражение для квазиклассической амплитуды перехода (1.26)

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{du}{2\pi} e^{iu} \exp(2T\alpha_{4e} \cos 2u + 2T\alpha_{2e} \cos u). \quad (\text{A.34})$$

С другой стороны амплитуда перехода (1.26) может быть написана в виде суммы по собственным состояниям системы

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \sum_n \psi_n^*(x_1, y_1) \psi_n(x_2, y_2) e^{-E_n T}. \quad (\text{A.35})$$

Заметим, что группа симметрии потенциала $U_{eff}(x, y)$ состоит из преобразований $\hat{V}_n = \hat{R}^n \hat{T}_{\pi n/2}$, где \hat{T}_a — оператор трансляции на расстояние a вдоль оси x , введенный в разделе III, а \hat{R} — оператор отражения в оси x .

Таким образом уровни энергии E_u^0 фиктивной частицы в потенциале U_{eff} классифицируются наложением на их волновые функции ψ_u граничного условия

$$\hat{V}_1 \psi_u(x, y) \equiv \psi_u(x + \pi/2, -y) = e^{iu} \psi_u(x, y). \quad (\text{A.36})$$

Сравнивая (A.35, A.36) с (A.34), мы заключаем, что результат (A.34) имеет вид разложения (A.35), причем множитель e^{iu} под интегралом возникает из $\psi_u^*(x_1, y_1) \psi_u(x_2, y_2)$, в то время как оставшаяся часть подинтегрального выражения дает нам энергию частицы

$$E_u^0 = -2\alpha_{4e} \cos 2u - 2\alpha_{2e} \cos u. \quad (\text{A.37})$$

Возвращаясь к исходной задаче, определяемой уравнениями (1.12, 1.13) и сравнивая (1.12) с (A.36), мы видим, что необходимо отождествить фазу $\tilde{\gamma}$ с "квазиим-

пульсом" u . Принимая во внимание соотношение между b и энергией фиктивной частицы $b = 2E^0$, упомянутое в разделе III, мы окончательно получаем зависимость $b(\tilde{\gamma})$:

$$b(\tilde{\gamma}) = -4\alpha_{4e} \cos 2\tilde{\gamma} - 4\alpha_{2e} \cos \tilde{\gamma}. \quad (\text{A.38})$$

Используя уравнение (A.38) и стандартное соотношение $I(\gamma) = (2e/\hbar)dE_0/d\gamma$, мы легко восстанавливаем результаты (1.33) и (1.34).

Действие для цепочки с беспорядком

Б.1. Связь коэффициентов q_n^k и $Q_n^{(m)}$.

Данное приложение посвящено установлению связи между наборами коэффициентов q_n^k и $Q_n^{(m)}$, фигурирующими в (2.3) и (2.6) соответственно.

Для этого нам необходимо выразить фазы сверхпроводящих островков ϕ_n^k через разности фаз $\theta_n^{(m)}$. Очевидным образом мы получаем (ср. рисунки 1.1 и 2.1):

$$\begin{aligned}\phi_n^1 &= \phi_1^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\theta_k^{(1)} + \theta_k^{(2)} \right) \\ \phi_n^2 &= \phi_1^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\theta_k^{(1)} + \theta_k^{(2)} \right) + \theta_n^{(1)} \\ \phi_n^3 &= \phi_1^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\theta_k^{(1)} + \theta_k^{(2)} \right) - \theta_n^{(4)}\end{aligned}\tag{Б.1}$$

Дальнейшие вычисления зависят от постановки задачи. Если цепочка является частью сверхпроводящей цепи, то крайние ее островки являются частью больших сверхпроводников и имеют фиксированные (не флуктуирующие) фазы. При этом в правой части выписанных соотношений ϕ_1^1 может быть отброшена. Дальнейшая подстановка этих соотношений в (2.3) приводит к ответу

$$\begin{aligned}Q_n^{(1)} &= q_n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k, & Q_n^{(2)} &= - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k \\ Q_n^{(3)} &= 0, & Q_n^{(4)} &= -q_n^3, & Q_k &\equiv q_k^1 + q_k^2 + q_k^3\end{aligned}\tag{Б.2}$$

Фазы $\theta_n^{(m)}$ подчиняются связям (1.3, 1.4). Поэтому коэффициенты $Q_n^{(m)}$ определены неоднозначно. Учитывая этот факт можно переписать соотношения (Б.2)

в более симметричном виде.

$$\begin{aligned} Q_n^{(1)} &= q_n^2 - \frac{q_n^2 + q_n^3}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k, & Q_n^{(2)} &= -\frac{q_n^2 + q_n^3}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k \\ Q_n^{(3)} &= -\frac{q_n^2 + q_n^3}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k, & Q_n^{(4)} &= -q_n^3 - \frac{q_n^2 + q_n^3}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Для полноты изложения опишем теперь кратко изменения, возникающие в выражениях Б.3 в случае изолированной цепочки. Физически эти изменения связаны с тем, что полный заряд Q_t такой цепочки является строго фиксированной величиной. В этих условиях для получения соотношений между q_n^k и $Q_n^{(m)}$, в отличие от (Б.1), необходимо выразить фазы ϕ_n^k через разности фаз $\theta_n^{(m)}$ и среднюю фазу островков $\phi = \frac{1}{3N} \phi_n^k$, являющуюся канонически сопряженной к полному заряду Q_t . Эта процедура конечно может быть легко выполнена. Подчеркнем однако, что простая подстановка получающихся выражений в (2.3) приводит к неверному ответу. Дело в том, что в новых переменных волновая функция системы может быть представлена в виде $(\{\theta_n^{(m)}\})$ — набор из $3N - 1$ независимых разностей фаз в цепочке):

$$\psi(\{\phi_n^k\}) = \psi(\phi; \{\theta_n^{(m)}\}) = e^{iQ_t \phi} \psi_r(\{\theta_n^{(m)}\}) \quad (\text{Б.4})$$

Исходная волновая функция $\psi(\{\phi_n^k\})$ периодична по каждому из своих аргументов. Изменение какой-либо фазы $\psi(\{\phi_n^k\})$ на 2π влечет за собой изменение ϕ на $2\pi/(3N)$. Это означает в свою очередь, что $\psi_r(\{\theta_n^{(m)}\})$ не остается неизменной при сдвиге какой-либо $\theta_n^{(m)}$ на 2π , а приобретает некоторый фазовый множитель, пропорциональный заряду Q_t . Аккуратный учет этого обстоятельства приводит к дополнительным вкладам в коэффициенты $Q_n^{(m)}$. Последовательный расчет дает

$$\begin{aligned} Q_n^{(1)} &= \left(q_n^2 - \frac{Q - Q_t}{3N} \right) - \frac{q_n^2 - q_n^3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} (Q - Q_t) - \sum_{k=1}^n Q_k + Q_t \right) \\ Q_n^{(2)} &= -\frac{q_n^2 - q_n^3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} (Q - Q_t) - \sum_{k=1}^n Q_k + Q_t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_n^{(3)} &= -\frac{q_n^2 - q_n^3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} (Q - Q_t) - \sum_{k=1}^n Q_k + Q_t \right) \\
Q_n^{(4)} &= - \left(q_n^3 - \frac{Q - Q_t}{3N} \right) - \frac{q_n^2 - q_n^3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} (Q - Q_t) - \sum_{k=1}^n Q_k + M \right) \quad (\text{Б.5})
\end{aligned}$$

Здесь $Q = \frac{1}{3N} \sum_{nk} q_n^k$.

Чтобы понять разницу между (Б.3) и (Б.5), полезно рассмотреть случай, когда все заряды одинаковы: $q_n^k \equiv q$. Это соответствует приложению к цепочке однородного затвора. Физически очевидно, что такой затвор не может влиять на свойства электрически изолированной цепочки. Действительно q полностью выпадает в этом случае из выражений (Б.5). В то же время в выражениях (Б.3) такого выпадения не происходит.

Б.2. Операторы \widehat{U}_n

Этот приложение посвящено решению уравнения (2.22) в пределе $w \gg h$. Для упрощения обозначений мы временно опускаем индекс n у f_n и g_n в (2.23).

Для определения $\text{Tr } U(\beta)$ мы будем решать соответствующее (2.22) уравнение на волновую функцию спина ψ с двумя начальными условиями

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Б.6})$$

Для ψ мы используем параметризацию

$$\psi_1 = e^\rho \cos \theta, \quad \psi_2 = e^\rho \sin \theta \quad (\text{Б.7})$$

В этих переменных

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2} (h \sin 2\theta + wf \cos 2\theta + iw g) \quad (\text{Б.8})$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2} (h \cos 2\theta - wf \sin 2\theta) \quad (\text{Б.9})$$

Рассмотрим сначала случай, когда спин в начальный момент направлен вверх. В этой ситуации $\theta(0) = 0$. При дальнейшей эволюции угол θ всегда остается малым и уравнения могут быть линеаризованы относительно него (мы используем обозначение $F(\tau) = f(\tau) + ig(\tau)$):

$$\dot{\theta} = -h\theta - \frac{wF}{2} \quad (\text{Б.10})$$

$$\theta(\tau) = -\frac{w}{2} e^{-h\tau} \int_0^\tau d\tau_1 F(\tau_1) e^{h\tau_1} \quad (\text{Б.11})$$

Линеаризованное уравнение для ρ

$$\dot{\rho} = \frac{h}{2} - h\theta^2 - wf\theta \quad (\text{Б.12})$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \rho(\beta) = & \frac{\beta h}{2} + \frac{w^2}{8h^2} (F(\beta))^2 + \frac{w^2}{8} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (f(\tau_1)f(\tau_2) + g(\tau_1)g(\tau_2)) e^{-h|\tau_1-\tau_2|} + \\ & i\frac{w^2}{4} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 f(\tau_1)g(\tau_2) e^{-h|\tau_1-\tau_2|} \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \quad (\text{Б.13}) \end{aligned}$$

При этом

$$\psi_1(\beta) = \exp(\rho(\beta)) \cos \theta(\beta) \approx \exp\left(\rho(\beta) - \frac{\theta^2}{2}\right) \quad (\text{Б.14})$$

$$\theta(\beta) = \frac{w^2}{8h^2} (F(\beta))^2 \quad (\text{Б.15})$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta) = \exp\left(\frac{\beta h}{2} + \frac{w^2}{8} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (f(\tau_1)f(\tau_2) + g(\tau_1)g(\tau_2)) e^{-h|\tau_1-\tau_2|} + \right. \\ \left. i\frac{w^2}{4} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 f(\tau_1)g(\tau_2) e^{-h|\tau_1-\tau_2|} \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \right) \quad (\text{Б.16}) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второе начальное условие. Линеаризация уравнений движения здесь не может быть применена непосредственно, так как в начальный момент времени $\theta = \pi/2$. Заметим однако, что при применении получаемых в этом приложении результатов, мы будем интересоваться траекториями $x(\tau)$ инстантонного типа, на концах которых x (и соответственно f и g) экспоненциально стремятся к постоянным значениям. Рассматривая инстантон с центром далеко от точки $\tau = 0$, мы можем разделить эволюцию спина на два этапа. На первом этапе $0 < \tau < \tau_0$ можно считать функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ константами. При этом спин релаксирует (за время порядка $\tau_0 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{w}{h}$) из энергетически невыгодного состояния $\theta = \pi/2$ в направлении малых θ . На втором этапе $\tau > \tau_0$ функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ уже нельзя считать постоянными, однако мы можем использовать линеаризованные уравнения для θ . Рассмотрим два описанных этапа последовательно.

1) $0 < \tau < \tau_0$

Считая f и g константами и решая уравнение (Б.8) с начальным условием $\theta(0) = \pi/2$ при этом получаем

$$\cos(2\theta(\tau) + \alpha) = \tilde{\kappa} \frac{C^2 (\tilde{\kappa} - \kappa) e^{2\tilde{\kappa}\tau} + (\tilde{\kappa} + \kappa)}{C^2 \kappa (\tilde{\kappa} - \kappa) e^{2\tilde{\kappa}\tau} - 2C (wg(0))^2 e^{\tilde{\kappa}\tau} - \kappa (\tilde{\kappa} + \kappa)} \quad (\text{Б.17})$$

Здесь введены обозначения

$$\kappa = \sqrt{h^2 + w^2(f(0))^2} \approx h + \frac{w^2(f(0))^2}{2h} \quad (\text{Б.18})$$

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{h^2 + w^2(f(0))^2 + w^2(g(0))^2} \approx h + \frac{w^2(f(0))^2}{2h} + \frac{w^2(g(0))^2}{2h} \quad (\text{Б.19})$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + w^2(f(0))^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{wf(0)}{\sqrt{h^2 + w^2(f(0))^2}}, \quad \alpha \approx \frac{wf(0)}{h} \quad (\text{Б.20})$$

$$C = -\frac{wg(0) + i(\kappa + \tilde{\kappa}) \tan \frac{\alpha}{2}}{-wg(0) + i(\tilde{\kappa} - \kappa) \tan \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{Б.21})$$

При этом уравнение на ρ имеет вид

$$\dot{\rho} = \frac{\kappa}{2} \cos(2\theta + \alpha) \quad (\text{Б.22})$$

В момент времени τ_0

$$\rho(\tau_0) = \frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tau_0 - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2w^2g(0)^2}{\kappa(\tilde{\kappa} - \kappa)C} - \frac{w^2g(0)^2}{(\tilde{\kappa} - \kappa)^2C^2}\right) \quad (\text{Б.23})$$

После разложения по w/h

$$\rho(\tau_0) = \frac{1}{2}\tau_0\left(h + \frac{w^2}{2h}((f(0))^2 + (g(0))^2)\right) + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{w^2}{4h^2}(f(0) - ig(0))^2\right] \quad (\text{Б.24})$$

2) $\tau_0 < \tau < \beta$

Решая теперь линеаризованные уравнения движения с найденными на предыдущем этапе $\theta(\tau_0)$ и $\rho(\tau_0)$ в качестве начальных условий, получаем окончательно

$$\psi_2(\beta) = \frac{w^2}{4h^2}F^*(0)F(\beta)\exp\left(\frac{\beta h}{2} + \frac{w^2}{8}\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (f(\tau_1)f(\tau_2) + g(\tau_1)g(\tau_2))e^{-h|\tau_1 - \tau_2|} + i\frac{w^2}{4}\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 f(\tau_1)g(\tau_2)e^{-h|\tau_1 - \tau_2|}\text{sign}(\tau_1 - \tau_2)\right) \quad (\text{Б.25})$$

Для $\text{Tr } U(\beta)$ находим теперь выражение (2.24).

Б.3. Вывод локального действия для цепочки с зарядовым беспорядком

В этом приложении мы получим для стасуммы представление (2.28, 2.29). Отправной точкой для нас будут служить соотношения (2.21), (2.24) и (2.23). Из них мы получаем эффективное действие для переменной x :

$$Z = \int_0^\beta \mathcal{D}x(\tau)e^{-S[x(\tau)]} \quad S = S_{bound} + S_\tau \quad (\text{Б.26})$$

$$S_{bound} = -\frac{w^2}{4h^2}\sum_{n=1}^N (a_n \cos(2x(\beta) - \pi\kappa_n) + ib_n \sin(2x(\beta) - \pi\kappa_n)) \\ \times (a_n \cos(2x(0) - \pi\kappa_n) - ib_n \sin(2x(0) - \pi\kappa_n)) \quad (\text{Б.27})$$

$$S_\tau = \int_0^\beta d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{2} - \frac{w^2}{8} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \exp(-h|\tau_1 - \tau_2|) [\Gamma_1 \cos 2x_1 \cos 2x_2 + \Gamma_2 \sin 2x_1 \sin 2x_2 + \Gamma_3 \cos 2x_1 \sin 2x_2 + 2iC \cos 2x_1 \sin 2x_2 \operatorname{sign}(\tau_1 - \tau_2)] , \quad (\text{Б.28})$$

Здесь $x_{1,2} \equiv x(\tau_{1,2})$ и

$$\Gamma_1 = \sum_n (a_n^2 \cos^2 \kappa_n + b_n^2 \sin^2 \kappa_n) , \quad \Gamma_2 = \sum_n (a_n^2 \sin^2 \kappa_n + b_n^2 \cos^2 \kappa_n) \\ \Gamma_3 = \sum_n \sin 2\kappa_n (a_n^2 - b_n^2) , \quad C = \sum_n a_n b_n \quad (\text{Б.29})$$

Мы можем уничтожить слагаемое с Γ_3 сдвигом переменной x , после чего получаем

$$S_\tau = \int_0^\beta d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{2} - \frac{w^2}{8} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \exp(-h|\tau_1 - \tau_2|) \\ \times [A_+ \cos 2x_1 \cos 2x_2 + A_- \sin 2x_1 \sin 2x_2 + 2iC \cos 2x_1 \sin 2x_2 \operatorname{sign}(\tau_1 - \tau_2)] , \quad (\text{Б.30})$$

Здесь A_+ и A_- задаются соотношениями (2.31).

Наконец, соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - h^2 \right) e^{-h|\tau_1 - \tau_2|} = -2h\delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (\text{Б.31})$$

позволяет нам выполнить преобразование Хаббарда-Стратоновича и найти представление для статсуммы в виде функционального интеграла с локальным действием (в правильности выписанных ниже соотношений легче всего убедиться произведя обратный переход):

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) \mathcal{D}y(\tau) \mathcal{D}z(\tau) e^{-S[x(\tau), y(\tau), z(\tau)]} \quad (\text{Б.32})$$

$$S = h \int \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \alpha_1 dy \cos 2x + \alpha_2 dz \sin 2x + \right. \\ \left. i\beta_1 d\dot{y} \sin 2x + i\beta_2 d\dot{z} \cos 2x - \frac{d^2}{2} (\beta_1^2 \sin^2 2x + \beta_2^2 \cos^2 2x) \right) d\tau \quad (\text{Б.33})$$

Коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 и β_2 должны удовлетворять соотношениям

$$\alpha_1^2 + \beta_2^2 = \frac{A_+}{N}, \quad \beta_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{A_-}{N}, \quad \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = \frac{C}{N} \quad (\text{Б.34})$$

Разрешая (Б.34) мы получаем

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{A_+}{N}} \sin \kappa_1, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{A_+}{N}} \cos \kappa_1 \quad (\text{Б.35})$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{A_-}{N}} \sin \kappa_2, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{A_-}{N}} \cos \kappa_2 \quad (\text{Б.36})$$

$$\sin(\kappa_1 - \kappa_2) = \frac{C}{\sqrt{A_+A_-}} \quad (\text{Б.37})$$

В действительности у нас имеется свобода в выборе коэффициентов α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , так как имеется всего одно уравнение для углов κ_1 и κ_2 . Нам удобно выбрать $\kappa_2 = \pi/2$. При этом получается соотношение (2.29).

Б.4. Действия на $4e$ - и $2e$ -траекториях

Это приложение посвящено выводу соотношений (2.34, 2.35). Мы предполагаем, что коэффициенты A_+ and A_- удовлетворяют условиям (2.33). Как уже отмечалось, для типичных реализации беспорядка коэффициентом в действии (2.29) можно пренебречь членами, содержащими C , что мы и сделаем.

Классические уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} + 2\alpha_1 dy \sin 2x - 2\alpha_2 dz \cos 2x = 0 \quad (\text{Б.38})$$

$$\ddot{y} - y = \alpha_1 d \cos 2x \quad (\text{Б.39})$$

$$\ddot{z} - z = \alpha_2 d \sin 2x \quad (\text{Б.40})$$

Here

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{A_+}{N}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{A_-}{N}} \quad (\text{Б.41})$$

Мы начнем с изучения $2e$ -траектории. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$x = 0 \quad y = -\alpha_1 d, \quad z = 0, \quad \tau \rightarrow -\infty \quad (\text{Б.42})$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \alpha_1 d, \quad z = 0, \quad \tau \rightarrow +\infty; \quad (\text{Б.43})$$

Заметим, что характерная частота изменения переменных y и z порядка 1. Мы предположим (а в конце проверим), что на $2e$ -траектории x меняется медленно и соответствующая характерная частота $\omega_x \ll 1$. При этом условии мы можем исключить y и z из уравнений движения в адиабатическом приближении. Для переменной x получим

$$\ddot{x} - d_1^2 \sin 4x = 0 \quad (\text{Б.44})$$

$$d_1^2 = \frac{(A_+ - A_-)d^2}{N + 2d^2(A_+ + A_-)} \quad (\text{Б.45})$$

Мы видим, что при выполнении условий (2.33) $\omega_x \sim d_1$ действительно мала. Уравнение (Б.44) имеет решение, соответствующее $2e$ -траектории:

$$x(\tau) = \frac{1}{2} \arccos(-\tanh(2d_1\tau)), \quad (\text{Б.46})$$

Действие на этом решении дается выражением (2.34).

Займемся теперь изучением $4e$ -траекторий. Теперь второе из условий (Б.43) должно быть заменено на

$$x = \pi, \quad y = -\alpha_1 d, \quad z = 0, \quad \tau \rightarrow +\infty \quad (\text{Б.47})$$

Здесь мы предположим, что x является быстрой переменной и $\omega_x \gg 1$. В этих условиях можно пренебречь изменением y и z на классической траектории и положить (согласованно с граничными условиями для $4e$ -траектории) $y = -\alpha_1 d$, $z = 0$. Уравнение для x принимает вид

$$\ddot{x} - \frac{2A_+}{N} d^2 \sin 2x = 0 \quad (\text{Б.48})$$

Мы видим, что при выполнении неравенств (2.33) $\omega_x \sim \sqrt{A_+ d^2 / N} \gg 1$. Вычисляя действие для полученной траектории мы приходим к (2.35).

Б.5. Отклик $4e$ -сверхтока на внешний затвор при наличии зарядового беспорядка

Мы исходим из соотношения (2.45). Для вычисления $\langle (\delta A_+)^2 \rangle$ мы должны рассмотреть совместное распределение величин

$$\begin{aligned} A_i &\equiv A_i(0), & i &= 1, 2, 3 \\ \tilde{A}_i &\equiv A_i(V_g), & i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{Б.49})$$

При больших N распределение этих величин является гауссовым с корреляторами

$$\begin{aligned} \langle A_1 \rangle &= \langle \tilde{A}_1 \rangle = \frac{N}{4}, & \langle A_1^2 \rangle &= \langle \tilde{A}_1^2 \rangle = \frac{N^2}{16} + \frac{N}{64} \\ \langle A_1 \tilde{A}_1 \rangle &= \frac{N\xi}{64}, & \langle A_2^2 \rangle &= \langle A_3^2 \rangle = \langle \tilde{A}_2^2 \rangle = \langle \tilde{A}_3^2 \rangle = \frac{N}{8} \\ & & \langle A_2 \tilde{A}_2 \rangle &= \langle A_3 \tilde{A}_3 \rangle = \frac{N\xi}{8} \\ & & \xi &= \cos \frac{\pi C_g V_g}{6e} \cos \frac{\pi C_g V_g}{2e} \\ & & \zeta &= \cos \frac{\pi C_g V_g}{6e} \cos \frac{\pi C_g V_g}{3e} \end{aligned} \quad (\text{Б.50})$$

Мы производим замену переменных согласно

$$u = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad v = A_1 - \frac{N}{4} \quad (\text{Б.51})$$

$$\tilde{u} = \sqrt{\tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2}, \quad \tilde{v} = \tilde{A}_1 - \frac{N}{4} \quad (\text{Б.52})$$

Распределение параметров u, v, \tilde{u} и \tilde{v} имеет вид

$$\begin{aligned} P(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{2^{15}}{\pi N^3 \sqrt{1 - \xi^2} (1 - \zeta^2)} \\ &\times u \tilde{u} \exp \left\{ -\frac{32}{N(1 - \xi^2)} (v^2 + \tilde{v}^2 - 2\xi v \tilde{v}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{4}{N(1 - \zeta^2)} (u^2 + \tilde{u}^2) \right\} I_0 \left(\frac{8}{N(1 - \zeta^2)} \zeta u \tilde{u} \right) \end{aligned} \quad (\text{Б.53})$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя.

Используя (Б.53) и выражение для A_+ в терминах u и v

$$A_+(0) = \frac{N}{4} + v + \frac{u}{2}, \quad A_+(V_g) = \frac{N}{4} + \tilde{v} + \frac{\tilde{u}}{2} \quad (\text{Б.54})$$

мы можем вычислить среднее $\langle (\delta A_+)^2 \rangle$ и получить результат (2.46).

Б.6. Вывод локального действия в присутствии магнитного беспорядка.

Нелокальное действие, описывающее цепочку с магнитным беспорядком можно напрямую получить (ср. (2.22) и (2.48)), положив в (Б.29, Б.28) $a_n = 1$, $\kappa_n = b_n = 0$ и учтя, что в нашем случае параметр h имеет разное значение в разных ромбиках. Мы получаем

$$S = \int_0^\beta d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{2} - \frac{w^2 h_0 N}{4} \int \cos 2x(\tau_1) D(\tau_1 - \tau_2) \cos 2x(\tau_2) \quad (\text{Б.55})$$

$$D(\tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{2h_0 N} \sum_{n=1}^N \exp(-h_n |\tau_1 - \tau_2|) \quad (\text{Б.56})$$

При больших N мы можем заменить $D(\tau_1 - \tau_2)$ в (Б.55) его средним значением

$$\overline{D}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{2h_0} \int dh e^{-h|\tau_1 - \tau_2|} P(h) \quad (\text{Б.57})$$

В фурье представлении при малых σ/h_0 среднее \overline{D} имеет вид

$$\overline{D}(\omega) = \frac{1}{h_0^2 + \omega^2} \left(1 + \sigma^2 \frac{h_0^2 - 3\omega^2}{3(h_0^2 + \omega^2)^2} \right) \quad (\text{Б.58})$$

Используя соотношение

$$\overline{D}^{-1}(\omega) = \omega^2 + h_0^2 + \sigma^2 - \frac{4}{3} \sigma^2 h_0^2 \frac{1}{h_0^2 + \omega^2} \quad (\text{Б.59})$$

мы можем дважды произвести преобразование Хаббарда-Стратоновича и получить локальное представление для статсуммы (2.51).

Сетка джозефсоновских проволочек

В.1. Дуальная джозефсоновская энергия в присутствии зарядовой фрустрации

В этом приложении мы рассмотрим связь параметров дуальной модели (3.34) $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ со случайными зарядами q_j , индуцированными на островках сетки.

Условимся прежде всего об обозначениях. Заряды островков, являющихся узлами \mathbf{x} -решетки мы будем обозначать через $q_{\mathbf{x}}$. Заряд островка находящегося на ребре (\mathbf{x}, \mathbf{a}) и являющегося l -тым по счету от островка \mathbf{x} , мы будем обозначать $q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$ (см. рис. В.1). Здесь l принимает значение от 1 до $N - 1$. Ниже нам понадобится также обозначение

$$Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^k = \sum_{l=1}^{k-1} q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}, \quad Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^1 = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{В.1})$$

Мы будем предполагать, что сетка является частью сверхпроводящей цепи и фаза одного из ее островков фиксирована (ср. приложение Б.1). Как и в приложении Б.1, мы можем найти связь между наборами параметров $Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$ и $q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$,

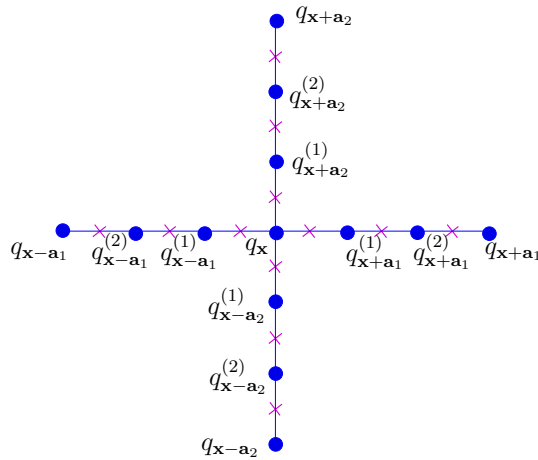


Рис. В.1. Нумерация островков в решетке проволочек.

фигурирующих в лагранжианах (3.3) и (3.4).

Используя затем соотношение (3.34), можно получить выражения для $\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ через заряды $q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^{(l)}$. Эти выражения зависят от выбора калибровки дуального "векторного потенциала". После достаточно длительных алгебраических вычислений мы можем выписать явный ответ для калибровочно-инвариантных величин $|\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}|$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$:

$$|\Upsilon_{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{b}}| = \left| \sum_{k=1}^N \exp(2\pi i Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^k) \right| \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = q_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{a}=\pm\mathbf{a}_\mu} \text{Arg} \sum_{k=1}^N \exp(2\pi i Q_{\mathbf{x}, \mathbf{a}}^k) \quad (\text{B.3})$$

Здесь (\mathbf{x}, \mathbf{a}) — связь, дуальная к (\mathbf{r}, \mathbf{b})

Литература

- [1] *Voss R. F., Webb R. A. // Phys. Rev. B.* — 1982. — Vol. 25. — P. 3446.
- [2] *Березинский В. Л. // ЖЭТФ.* — 1970. — Т. 59. — С. 907.
- [3] *Kosterlitz J., Thouless D. // J. Phys. C.* — 1973. — Vol. 6. — P. 1181.
- [4] *J. Resnick, J. Garland, J. Boyd et al. // Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 47. — P. 1542.
- [5] *Fazio R., van der Zant H. // Phys. Rep.* — 2001. — Vol. 355. — P. 235.
- [6] *Christiansen C., Hernandez L., Goldman A. // Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 037004.
- [7] *Douçot B., Vidal J. // Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 227005.
- [8] *Cataudella V., Fazio R. // Europhys. Lett.* — 2003. — Vol. 61. — P. 341.
- [9] *Korshunov S. E. // Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63. — P. 134503.
- [10] *Korshunov S. E. // Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65. — P. 054416.
- [11] *Korshunov S. E., Douçot B. // Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 097003.
- [12] *Rizzi M., Cataudella V., Fazio R. // Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 144511.
- [13] *Vidal J., Mosseri R., Douçot B. // Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 5888.
- [14] *J. Vidal, P. Butaud, B. Douçot, R. Mosseri // Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 155306.
- [15] *Serret E., Butaud P., Pannetier B. // Europhys. Lett.* — 2003. — Vol. 59. — P. 225.

- [16] *Tesei M., Théron R., Martinoli P. // Physica C.* — 2006. — Vol. 437. — P. 328.
- [17] *C. C. Abilio, P. Butaud, T. Fournier et al. // Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 5102.
- [18] *Douçot B., Feigel'man M., Ioffe L. // Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 107003.
- [19] *Ioffe L. B., Feigel'man M. V. // Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — P. 224503.
- [20] *Rizzi M., Cataudella V., Fazio R. // Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 100502(R).
- [21] *P. Delsing, C. Chen, D. Halivald et al. // Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 50. — P. 3959.
- [22] *Fisher M. // Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 923.
- [23] *Villian J. // J. Phys.* — 1975. — Vol. 36. — P. 581.
- [24] *J. Jose, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, D. Nelson // Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 1217. — P. 16.
- [25] *Matveev K. A., Larkin A. I., Glazman L. I. // Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 096802.
- [26] *Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions.* — Dover, New York, 1974.
- [27] *Klauder J. R. // Phys. Rev. D.* — 1979. — Vol. 19. — P. 2349.
- [28] *Callan C., Coleman S. // Phys. Rev. D.* — 1977. — Vol. 19. — P. 2349.
- [29] *Larkin A. I., Ovchinnikov U. N. // Sov. Phys. JETP.* — 1984. — Vol. 59. — P. 420.

- [30] *R. Fazio, A. van Otterlo, G. Schön et al. // Helv. Phys. Acta.* — 1992. — Vol. 65. — P. 228.
- [31] *Minhagen P. // Rev. Mod. Phys.* — 1987. — Vol. 59. — P. 1001.
- [32] *Fazio R., Schön G. // Phys. Rev. B.* — 1991. — Vol. 43. — P. 5307.
- [33] *Nelson D., Kosterlitz J. // Phys. Rev. Lett.* — 1977. — Vol. 39. — P. 1201.
- [34] *Grest G. S. // Phys. Rev. B.* — 1989. — Vol. 39. — P. 9267.
- [35] *Olsson P. // Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55. — P. 3585.
- [36] *Saito Y., Mueller-Krumbhaar H. // Phys. Rev. B.* — 1981. — Vol. 23. — P. 308.
- [37] *Kissner J., Eckern U. // Z. Phys. B.* — 1993. — Vol. 91. — P. 155.
- [38] *Rojas C., Jose J. // Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 54. — P. 12361.
- [39] *van Otterlo A., Fazio R., Schön G. // Physica B.* — 1994. — Vol. 203. — P. 504.
- [40] *Feigel'man M., Ioffe L. B. // Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 3447.
- [41] *Katzgraber H. G. // Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67. — P. 180402.
- [42] *Nikolaou M., Wallin M. // Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69. — P. 184512.
- [43] *Gradstein I., Ryzhik I. Table of Integrals, Series, and Products.* — Academic Press, New York, 1980.