

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
имени Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

Димитрова Ольга Венциславовна

УДК 538.945, 536.48

**Сверхпроводимость и спиновый транспорт
в двумерных электронных системах
со спин-орбитальным взаимодействием**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф.

М. В. Фейгельман,

Москва – 2006

Оглавление

Введение	5
1 Поперечный спиновый ток и парамагнитная восприимчивость в двумерном электронном газе	16
1.1 Введение	16
1.2 Обращение в ноль dc спин-холловской проводимости в присутствии беспорядка	19
1.2.1 Микроскопическое диаграммное вычисление	19
1.2.2 Общее доказательство отсутствия стационарного спин-холловского тока	28
1.3 Спин-Холловская проводимость и Паули восприимчивость в присутствии электрон-электронного взаимодействия	31
1.3.1 Соотношение между зависящей от частоты спин-холловской проводимостью и восприимчивостью Паули .	31
1.3.2 Поправки от взаимодействия к спин-холловской проводимости	37
1.4 Выводы	43
2 Фазовая диаграмма поверхностного сверхпроводника в продольном магнитном поле	44
2.1 Введение	44
2.2 Модель двумерного спин-орбитального сверхпроводника	47

2.3	Сверхпроводящий фазовый переход	51
2.4	Свойства сверхпроводника вблизи симметричной точки	58
2.5	Фазовая диаграмма	63
2.6	Ток и электромагнитный отклик в киральной фазе	74
2.7	Преобразование состояния БКШ в “слабо киральную” фазу . . .	76
2.8	Фазовая диаграмма в присутствии немагнитных примесей	81
2.9	Переход Березинского-Костерлица-Таулеса	87
3	Джозефсоновский ток и спиновая поляризация в кон-	
	тактах сверхпроводник- двумерный электронный газ-	
	сверхпроводник	89
3.1	Введение	89
3.2	Спектр андреевских состояний	93
3.3	S-матрица и коэффициенты прохождения	96
3.4	Джозефсоновский ток	103
3.5	Уравнение на спектр и ток для контакта произвольной длины .	104
3.6	Спиновая поляризация	110
3.7	Обсуждение	124
3.8	Заключение	126
	Приложения	128
A	Преобразование к эллиптическим интегралам	128
B	Линия ST'	129
B	Восьмой порядок в функционале ГЛ	131
Г	Спиноры, описывающие состояния квазичастиц в переходе S/Rashba 2DEG/S	138
Д	Матрица рассеяния в нормальном состоянии перехода S/Rashba 2DEG/S	142

Д.1	\check{S} - матрица, полученная шивкой волновых функций на двух границах	142
-----	---	-----

Заключение		148
-------------------	--	------------

Работы, представленные на защиту		153
---	--	------------

Список литературы		154
--------------------------	--	------------

Введение

Двумерные электронные системы возникают в полупроводниковых квантовых ямах на границе раздела двух материалов, либо в сверхтонких слоях металлов на диэлектрической подложке. В обоих случаях естественным образом нарушается симметрия по отношению к отражению относительно плоскости, в которой находятся “двумерные” электроны проводимости. В таких случаях, благодаря нарушению трансляционной симметрии и симметрии инверсии, возникает электрическое поле, перпендикулярное к плоскости. Оно не влияет непосредственно на орбитальное движение электрона в плоскости, но взаимодействует со спином электрона посредством релятивистского спин-орбитального взаимодействия, известного как взаимодействие Рашбы [1].

В диссертации теоретически изучено влияние взаимодействия Рашбы на свойства следующих электронных систем: двумерный взаимодействующий электронный газ в присутствии немагнитных примесей; двумерный сверхпроводник (в рамках модели БКШ) в параллельном магнитном поле в чистом и грязном случае, джозефсоновский переход через чистый двумерный электронный газ.

Присутствие спин-орбитального взаимодействия в электронных системах демонстрирует ряд интересных неожиданных физических явлений. Все они обязаны своим возникновением ограничению степени свободы электронных спинов: направление спина электрона, благодаря взаимодействию Рашбы, теперь оказывается связанным с направлением его импульса. Точнее, собственными состояниями гамильтониана оказываются состояния со спином, направ-

ленном перпендикулярно вправо и перпендикулярно влево от направления импульса. Спин электрона перестает быть хорошим квантовым числом и вводится новое квантовое число - киральность, соответствующее этим двум состояниям. В электронном двумерном металле при включении взаимодействия Рашбы две совпадающие Ферми-окружности, соответствующие прежде двукратному вырождению по спину, смещаются: соответствующая одной киральности Ферми-окружность раздувается, а другой - сжимается. Существование для каждой киральности двух отличных Ферми-окружностей объясняет такие эффекты, как индуцирование спиновой поляризации при приложении продольного электрического поля, или существование неоднородной фазы при включении продольного магнитного поля в спин-орбитальном сверхпроводнике.

Спин-орбитальное взаимодействие Рашбы в сверхпроводниках без центра инверсии существенно модифицирует сверхпроводящее состояние. В обычных сверхпроводниках имеет место иерархия энергетических масштабов $\epsilon_F \gg \hbar\omega_D \gg T_c$, где ϵ_F - энергия Ферми, ω_D - Дебаевская частота, T_c - температура сверхпроводящего перехода. Спин-орбитальное взаимодействие характеризуется скоростью α и энергетическим расщеплением киральных подзон в металле αp_F , где p_F - импульс Ферми. Может быть как $\alpha p_F \gg T_c$, так и $\alpha p_F \ll T_c$. Случай слабого спин-орбитального взаимодействия был рассмотрен в работах [27, 28], однако на поверхности спин-орбитальное взаимодействие усилено скачком химического потенциала и спин-орбитальное расщепление αp_F может достигать значений гораздо больших чем T_c . Теория двумерного сверхпроводника при произвольном спин-орбитальном взаимодействии была построена в работах [20, 29]. Такое сверхпроводящее состояние должно обладать рядом необычных свойств благодаря тому, что на поверхности кристалла нарушена симметрия “верх-низ”; волновая функция конденсата является в этом случае смесью синглетной и триплетной волно-

вой функции [27, 20]. При низких температурах восприимчивость Паули увеличена по сравнению с обычными сверхпроводниками [20]; парамагнитный предел в параллельном магнитном поле смещен в сторону намного более высоких значений поля благодаря возникновению неоднородного сверхпроводящего состояния [29], подобного предсказанному Ларкиным-Овчинниковым и Фульде-Феррелом [30, 31] (LOFF) для ферромагнитного сверхпроводника. Йип [32] сделал утверждение о довольно неожиданном свойстве такого сверхпроводника: индуцирование параллельным магнитным полем сверхпроводящего тока, перпендикулярного направлению поля и пропорционального полю по величине. Все эти свойства вытекают из кирального расщепления спектра электронов на поверхности благодаря присутствию спин-орбитального члена Рашбы [1]; величина этого расщепления αp_F мала по сравнению с энергией Ферми, но может быть довольно большой по сравнению с другими энергиями в задаче.

Задача о неоднородном состоянии в спин-орбитальном сверхпроводнике отличается от задачи Ларкина-Овчинникова в отношении того, как магнитное поле меняет Ферми-поверхность. В LOFF задаче Ферми-поверхности, соответствующие спину вверх или спину вниз, увеличиваются или уменьшаются в радиусе; а в спин-орбитальном сверхпроводнике при приложении продольного магнитного поля происходит параллельный перенос Ферми-поверхностей в противоположных направлениях на вектор \vec{Q} , пропорциональный полю и перпендикулярный ему. Это благоприятствует возникновению неоднородного состояния: становится энергетически возможным формирование Куперовской пары на ненулевом импульсе, пропорциональном \vec{Q} . Принципиальное отличие от стандартной LOFF задачи состоит в том, что там Куперовские пары формировались из электронов, принадлежащих двум разным концентрическим Ферми-сферам, и значит, направление вектора Куперовской пары не было фиксированным, что обуславливало большое разно-

образии в наблюдаемых фазах (которые включали в себя и сложные решетки в импульсном пространстве) (см. например [36]). Наоборот, в рассматриваемом здесь спин-орбитальном сверхпроводнике, Куперовская пара формируется на одной и той же Ферми-окружности и направление вектора Куперовской пары фиксировано приложенным магнитным полем, поэтому параметр порядка является суперпозицией конечного числа гармоник на волновых векторах разных по величине, но одинаковых по направлению. Такое неоднородное состояние можно назвать “полосатым”: если будем двигаться в плоскости сверхпроводника вдоль прямых параллельных магнитному полю, то не будем наблюдать изменение фазы сверхпроводящего параметра порядка. В работе [33], исходя из феноменологической модели, для спин-орбитального сверхпроводника была показана возможность существования состояния типа бегущей волны - длинноволновая киральная фаза. Возможность такого состояния была рассмотрена также в работе Ларкина и Овчинникова [30], которые обнаружили, что оно имеет более высокую энергию чем “полосатое” состояние с синусоидальной модуляцией; кроме того, они показали, что сверхпроводящая плотность в киральном состоянии обращается в ноль. Мы покажем, что в нашей задаче коротковолновая киральная фаза, напротив, является сверхпроводящей и должна реализоваться в значительной части фазовой диаграммы.

Как было показано [34], неоднородное состояние LOFF подавляется примесями, поэтому в диссертации мы изучали и влияние примесей на спин-орбитальную сверхпроводимость и неоднородное состояние. Линия перехода от нормального в сверхпроводящее состояние $T_c(h)$ была определена в [29]; однако переход между обычным однородным сверхпроводящим состоянием БКШ, существующем в низких магнитных полях и состоянием типа LOFF, возникающим в высоких полях изучен не был.

Изучение модели спин-орбитального сверхпроводника актуально и с экспериментальной точки зрения: как взаимодействие электронов через фоно-

ны, так и нарушенная симметрия инверсии присущи большинству двумерных электронных структур, поэтому естественно ожидать открытие двумерной сверхпроводимости, для которой была бы применима изучаемая модель. В литературе были сообщения о наблюдении поверхностной сверхпроводимости, к которой данная модель может иметь отношение. Например, поступили сообщения об экспериментальных наблюдениях сверхпроводящих состояний, локализованных на поверхности металлов и даже диэлектриков. Острова поверхностной сверхпроводящей фазы наблюдались в поверхностно допированном кристалле $WO_3 : Na$ при критической температуре $T_c = 91.5K$ [25]. Упомянем также недавнюю экспериментальную статью [26], в которой изучался тонкий бислой Be/Au с нарушенной симметрией инверсии, и сообщалось о сильно увеличенном продольном критическом магнитном поле.

Спин-холловский эффект в двумерном электронном газе - следствие спин-орбитального спаривания. Эффект состоит в том, что протекание электрического тока через образец вызывает бездиссипативный спиновый транспорт в перпендикулярном направлении [2]. Спин-холловский эффект зависит от размерности, геометрии, рассеянии на примесях, плотности носителей в системе, а также от вида спин-орбитального спаривания. Для случая идеального двумерного электронного газа с взаимодействием Рашбы, Синова и др. [3] нашли спин-холловский ток поперечной (z) спин компоненты в продольном электрическом поле E_ν , $j_\mu^z = \sigma_{sH} \epsilon_{\mu\nu} E_\nu$, с “универсальной” спин-холловской проводимостью $\sigma_{sH} = e/4\pi\hbar$, не зависящей от константы взаимодействия Рашбы α и плотности газа n , при условии, что обе спин-расщепленные ветви заполнены. Это имеет место, когда плотность $n > n^* = m^2\alpha^2/\pi$. Сначала считалось, что незначительное количество примесей не изменяет этот результат, т. е. спин-холловская константа “универсальна” (Sinova *et al.*, 2004). Однако затем оказалось, что если правильно учесть влияние беспорядка, то вершинная поправка сокращает вклад от одной петли. Для стандартной мо-

дели Рашбы было показано, что dc спин-холловская проводимость исчезает даже в случае произвольно слабого беспорядка (Inoue *et al.*, 2004; Raimondi and Schwab, 2005 [4, 5, 6, 7]), $\sigma_{sH} = 0$, что было подтверждено и численным экспериментом (Sheng, Sheng, Weng and Haldane, 2005 [8]). Ненулевое и близкое к “универсальному” значение было вновь получено только при рассмотрении ac проводимости $\sigma_{sH}(\omega)$ в режиме $1/\tau \ll \omega \ll b/\hbar$ (Mischenko *et al.*, 2004 [5]). В диссертации мы приводим новые аргументы в пользу того, что спин-холловский эффект в равновесии равен нулю. Используя уравнение Гейзенберга, показываем, что в однородной системе полный спиновый ток z компоненты спина пропорционален производной по времени полного z спина системы. Когда рассматриваем внешние поля, постоянные во времени, мы должны предположить, что система находится в стационарном состоянии (т. е. требуется рассеяние на примесях для установления равновесия). В стационарном состоянии полный спин системы должен быть постоянен, поэтому полный спиновый ток должен быть равен нулю. Этот аргумент, а также зануление спинового тока при приложенном магнитном поле в отсутствие рассеивателей (Rashba, 2004 [10]) показали, что это сокращение - внутреннее свойство Гамильтониана свободных электронов и не зависит от вида рассеивателей. В очень чистом двумерном электронном газе средняя длина свободного пробега l может превысить размер системы L , и поэтому имеет смысл исследовать зависящую от частоты спин-холловскую проводимость $\sigma_{sH}(\Omega)$. Недавно Э. И. Рашба продемонстрировал [11] прямое соотношение между $\sigma_{sH}(\Omega)$ и диэлектрической функцией отклика $\epsilon(\Omega)$ чистого невзаимодействующего двумерного электронного газа со спин-орбитальным взаимодействием. В диссертации мы выводим универсальное соотношение между зависящей от частоты спин-холловской проводимостью $\sigma_{sH}(\Omega)$ чистого двумерного электронного газа и его продольной магнитной восприимчивостью $\chi_{\parallel}(\Omega)$, и тем самым находим дополнительный аргумент в пользу равновесной природы

спин-холловского отклика. В последние три года спин-холловский эффект был объектом огромного внимания с точки зрения теоретического изучения. Частично интерес объясняется тем, что тема эта соприкасается с элементами спинтроники, электронного транспорта и контроля за неравновесными спиновыми распределениями, а также тем, что изучение вопроса потребовало тщательного и осторожного анализа. Актуальность этой темы тем более возросла после недавних экспериментальных наблюдений этих эффектов (Kato *et al*, 2004b; Wunderlich *et al*, 2005; Sih *et al*, 2005).

В третьей части диссертации изучается джозефсоновский переход через двумерный электронный газ. SNS контакты изучались давно как экспериментально, так и теоретически, но сравнительно недавно технологии позволили делать джозефсоновские переходы через двумерный электронный газ [43, 44, 45, 46, 47, 48]. Общая особенность всех этих структур - малое экспериментально измеренное произведение $I_c R_N$, намного меньшее теоретических предсказаний. В частности, это несоответствие известно для коротких переходов с высококачественными S/N границами, что демонстрируется измерением несинусоидальной зависимости ток-фаза [48]. Таким образом, кажется естественным искать эффекты, которые не были приняты во внимание в существующей теории, см. например [49, 50], но могли бы отвечать за столь сильное подавление критического тока. Очевидный кандидат, который исследуется в диссертации - спин-орбитальное взаимодействие Рашбы, которое присутствует в структурах с двумерным электронным газом из-за асимметрии квантовой ямы верх-низ. В гетероструктурах InAs спин-орбитальное расщепление особенно велико (см. работу [51]), и приводит к расщеплению $\Delta_R = 2\alpha p_F \approx 5 meV$, что значительно больше сверхпроводящей щели ниобия. Поэтому кажется естественным, что учет взаимодействия Рашбы мог бы быть важным при анализе джозефсоновского тока в этих структурах. В этом отношении можно также упомянуть статью [52], где показано, что постоянные то-

ки в мезоскопических металлических кольцах заметно варьируются присутствием спин-орбитального спаривания - что, казалось бы, указывает на возможность существования подобного эффекта и для джозефсоновского тока. В литературе можно встретить мнение, что спин-орбитальное взаимодействие не может влиять на эффект близости в сверхпроводящих структурах, так как оно сохраняет симметрию по обращению времени (T -инвариантность). Однако этот аргумент, вообще говоря, неприменим, когда рассматривается критический джозефсоновский ток, так как присутствие тока само уже нарушает T -инвариантность. В недавних статьях [53, 54], в которых изучалось влияние как спаривания Рашбы, так и магнитного Зеемановского поля на критический ток S-N-S контактов, было найдено, что в отсутствие Зеемановского члена взаимодействие Рашбы (если оно рассматривается для самой простой модели равных Ферми-скоростей на обоих киральных ветвях), полностью выпадает из уравнений для андреевских уровней. Здесь мы показываем, что это сокращение не является общим, а происходит из-за разных упрощений, используемых в упомянутых работах: в статье [53] вводилась модель полностью прозрачных S/N границ, а в статье [54] - простая одномерная модель. Идея о том, что андреевские уровни могут быть спин-расщеплены из-за SO спаривания, была предложена в работе [55] для узкого (небольшое число каналов) перехода. SO эффект, который мы здесь обсуждаем, отличается от рассмотренного в работе [55]. В диссертации мы рассматриваем самую простую двумерную модель баллистического перехода сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник (см. например [50]) бесконечной ширины в направлении поперечном к направлению протекания тока.

Симметрия задачи джозефсоновского перехода через двумерный электронный газ со взаимодействием Рашбы позволяет возникновение спиновой поляризации в области двумерного электронного газа при ненулевом сверхпроводящем токе. А именно, нарушенная симметрия инверсии вдоль оси z и

нарушенная T -инвариантность разрешают существование аксиального вектора - спиновой поляризации - в перпендикулярном направлении. Мы показали численно, что спиновая поляризация существует, но демонстрирует неожиданное поведение. Вид зависимости среднеквадратичной спиновой поляризации от величины спин-орбитального спаривания напоминает универсальные мезоскопические флуктуации проводимости. В связи с этим стоит отметить, что спин-орбитальное взаимодействие (связывающее спиновую переменную с протекающим током) вместе с квантовой природой спина электрона приводят к усилению интерференционных эффектов, находящихся вне рамок квазиклассического приближения. Это обстоятельство было недавно отмечено в другом контексте в работе Осипова и др. [64]. В рассмотренном нами случае аналогичные эффекты приводят к нерегулярным осцилляциям среднеквадратичной спиновой поляризации, при исчезающей (в термодинамическом пределе) средней поляризации. Экспериментальная демонстрация возникновения спиновой поляризации при протекании джозефсоновского тока в SNS контакте легла бы в один ряд по актуальности с недавними экспериментальными работами (Kato *et al*, 2004, Wunderlich *et al*, 2005), в которых был обнаружен спин-холл эффект и, соответственно, измерена спиновая поляризация.

Структура диссертации такова. В Главе 1 изучены теоретически спин-холловская проводимость и восприимчивость Паули двумерного электронного газа (2DEG) со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы (SO), в квазиклассическом пределе $p_F l \gg 1$. Показано, что статическая спин-холловская проводимость равна нулю в линейном порядке по спин-орбитальному расщеплению, для любой не исчезающей силы беспорядка и в общем случае зависящей от импульса скорости Рашбы $\alpha(p)$ и непараболическом спектре $\epsilon(p)$. Этот результат получен явным диаграммным вычислением для модели невзаимодействующих электронов в присутствии примесей. Кроме того, для случая параболического спектра и постоянной “скорости Рашбы” α

приведено простое доказательство зануления спин-холловского эффекта на основе анализа общих коммутационных соотношений для операторов. Этот результат остается верными также и для случая взаимодействующих электронов (по крайней мере, если взаимодействие не зависит от спинов), а также для более общего случая зонного спектра $\epsilon(p)$ и спин-орбитального расщепления $\alpha(p)$, если выполнено условие $p\alpha(p) = \text{const} \cdot \partial\epsilon(p)/\partial p$. В чистом пределе $l \rightarrow \infty$ и в присутствии электрон-электронного взаимодействия, получено универсальное соотношение между зависящей от частоты спин-холловской проводимостью $\sigma_{sH}(\Omega)$ и восприимчивостью Паули $\chi(\Omega)$. Показано, что электрон-электронное взаимодействие перенормирует “универсальное” значение $\sigma_{sH}^{(0)} = e/8\pi\hbar$, на величину относительной поправки, определяющейся только стандартным параметром Кулона.

В Главе 2 построена универсальная фазовая диаграмма двумерного спин-орбитального сверхпроводника в продольном магнитном поле. Известно, что в присутствии спин-орбитального взаимодействия Рашбы в сильном продольном магнитном поле возникает неоднородное сверхпроводящее состояние [29] типа Ларкина-Овчинникова-Фульде-Феррела (LOFF) [30, 31] со сверхпроводящим параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) \propto \cos(\mathbf{Q}\mathbf{r})$ (так называемая полосатая фаза). Мы рассмотрели случай сильного взаимодействия Рашбы со спин-орбитальным расщеплением большим чем сверхпроводящая щель Δ , и показали, что при низких температурах $T \leq 0.4T_{c0}$ состояние типа LOFF отделено от обычного однородного состояния линией фазового перехода первого рода. При более высоких температурах другое неоднородное состояние с $\Delta(\mathbf{r}) \propto \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{r})$ лежит между однородным БКШ и LOFF-состоянием при $g\mu_B\hbar \approx 1.5T_{c0}$. В отличие от обычного LOFF состояния, сверхпроводящая плотность n_s порядка полной 2D плотности электронов (за исключением области вблизи линии перехода второго рода между БКШ состоянием и новой “киральной” фазой, где n_s^{yy} обращается в ноль). Показано, что немагнитные

примеси подавляют оба неоднородных состояния, которые полностью исчезают при $T_{c0}\tau \leq 0.11$.

В Главе 3 исследовано влияние спин-орбитального взаимодействия Рашбы на сверхпроводящий ток в джозефсоновских переходах в чистом пределе. Получено обобщение формулы Беенаккера для андреевских уровней на случай присутствия спин-орбитального рассеяния. Для бесконечно длинного непрозрачного контакта (присутствие нормального отражения на границе нормальный металл-сверхпроводник (NS)) предсказано расщепление андреевских уровней, вызванное присутствием спин-орбитального рассеяния. Показано, что квазиклассическое среднее джозефсоновского тока тем не менее не зависит от взаимодействия Рашбы, если пренебрегать электрон-электронным взаимодействием в области двумерного электронного газа. Найдена спиновая поляризация в области двумерного электронного газа при ненулевом джозефсоновском токе.

В Заключение перечислены оригинальные результаты, содержащиеся в диссертации.

В Приложения мы вынесли изложение ряда технических вычислительных деталей.

Глава 1

Поперечный спиновый ток и парамагнитная восприимчивость в двумерном электронном газе

1.1 Введение

В полупроводниках со спин-орбитальным взаимодействием при приложении электрического поля течет бездиссипативный спиновый ток [2]. Для случая идеального двумерного электронного газа со взаимодействием Рашбы, Синова и др. [3] нашли спин-холловский ток поперечной (z) спин компоненты в продольном электрическом поле E_ν , $j_\mu^z = \sigma_{sH} \epsilon_{\mu\nu} E_\nu$, с “универсальной” спин-холловской проводимостью

$$\sigma_{sH} = \frac{e}{8\pi\hbar}, \quad (1.1)$$

не зависящей от константы взаимодействия Рашбы α и плотности газа n , при условии, что обе спин-расщепленные ветви заполнены. Это имеет место, когда плотность $n > n^* = m^2\alpha^2/\pi$.

Результат (1.1) сильно меняется в присутствии беспорядка: для стандартной модели Рашбы было показано, что dc спин-холловская проводимость исчезает даже в случае произвольно слабого беспорядка [4, 5, 6, 7]. Хотя теперь нет сомнения в правильности этого результата, его физическое происхо-

ждение, тем не менее, остается не совсем ясным, поскольку при вычислении он возникает в результате таинственного сокращения двух вкладов. В частности, заранее не очевидно, что то же самое сокращение имеет место для обобщенной модели Рашбы с зависящей от импульса спин-орбитальной скоростью $\alpha(p)$, и обобщенном непараболическом спектре $\epsilon(p)$. Заметим, что оба этих обобщения привели бы к нарушению специальной симметрии стандартной модели Рашбы, а именно, равенству значений Ферми-скоростей $v_+ = v_-$ на двух киральных ветвях. Здесь мы производим подробное микроскопическое вычисление спин-холловской проводимости для обобщенной модели непараболического спектра и произвольной зависимости скорости Рашбы от импульса (1.3), для малого спин-орбитального расщепления по сравнению с энергией Ферми (учитываем члены первого порядка по отношению α/v_f). Мы показываем, что в статическом пределе $\sigma_{sH} = 0$ *независимо* от отношения между обратным упругим временем рассеяния $1/\tau$ и спин-орбитальным расщеплением $\Delta = 2\alpha p_F$, подобно стандартной модели Рашбы, изученной в работах [4, 5, 6, 7]. Общность этого результата указывает, что его можно было бы получить, используя какие-нибудь общие аргументы, и это действительно так: мы показываем, используя коммутационные соотношения для операторов (верные также и для взаимодействующих электронов), что отсутствие статической спин-холловской проводимости следует из равновесности состояния электронной системы с приложенным электрическим полем. Таким образом, $\sigma_{sH} = 0$ для любого ненулевого беспорядка.

В очень чистом двумерном электронном газе средняя длина свободного пробега l может превысить размер системы L , и поэтому стоит исследовать зависящую от частоты спин-холловскую проводимость $\sigma_{sH}(\Omega)$. Недавно Э. И. Рашба продемонстрировал [11] прямое соотношение между $\sigma_{sH}(\Omega)$ и диэлектрической функцией отклика $\epsilon(\Omega)$ чистого невзаимодействующего двумерного электронного газа со спин-орбитальным взаимодействием. Ниже

мы выводим универсальное соотношение между зависящей от частоты спин-холловской проводимостью $\sigma_{sH}(\Omega)$ чистого двумерного электронного газа и его продольной магнитной восприимчивостью $\chi_{\parallel}(\Omega)$, и тем самым находим дополнительный аргумент в пользу равновесной природы спин-холловской константы:

$$\sigma_{sH}(\Omega) = \frac{2e}{(g\mu_B)^2 m} \chi_{\parallel}(\Omega), \quad (1.2)$$

где m - зонная масса, μ_B - магнетон Бора, g - фактор Ланде. Соотношение (1.2) верно для любых независимых от спина электрон-электронных взаимодействий, на любой частоте и для любой электронной плотности n , при которой можно использовать параболический спектр, $\epsilon(p) = p^2/2m$. Соотношение (1.2) верно даже в случае очень низкой плотности $n < n^*$, когда заселена только одна киральная ветвь, и результат Синовы и др. [3], уравнение (1.1), неприменим.

Наконец, мы вычисляем поправки к спин-холловской проводимости, которые происходят от двухчастичного электрон-электронного взаимодействия, и находим, что эти поправки отличны от нуля. Прямое микроскопическое вычисление в первом порядке по величине взаимодействия показывает, что электрон-электронное взаимодействие перенормирует и спин-холловскую проводимость и продольную спиновую восприимчивость одинаково, так что соотношение (1.2) остается верным. Относительные величины этих поправок пропорциональны безразмерному кулоновскому параметру $\frac{e^2}{\epsilon\hbar v_F}$ и не содержат спин-орбитального расщепления Δ .

Остальная часть данной Главы I диссертации организована следующим образом: раздел 1.2 содержит микроскопическое вычисление, доказывающее что $\sigma_{sH} = 0$ в присутствии беспорядка, и общее доказательство этого результата при помощи коммутационных соотношений для операторов. В разделе 1.3 мы выводим универсальное соотношение (1.2), и вычисляем поправки от

взаимодействия к $\sigma_{sH}(\Omega)$. Наши выводы представлены в разделе 1.4.

1.2 Обращение в ноль dc спин-холловской проводимости в присутствии беспорядка

1.2.1 Микроскопическое диаграммное вычисление

Двумерный изотропный газ со взаимодействием Рашбы - это электронная система с нарушенной симметрией инверсии. В этом случае может возникнуть электрическое поле, перпендикулярное к плоскости. Оно не влияет на орбитальное движение электрона, но взаимодействует со спином электрона посредством релятивистского спин-орбитального взаимодействия, известного как взаимодействие Рашбы [1]. Гамильтониан электрона имеет вид:

$$\hat{h}_{\alpha\beta}(\vec{p}) = \epsilon(p)\delta_{\alpha\beta} + \alpha(p) \left(\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^x \hat{p}_y - \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^y \hat{p}_x \right), \quad (1.3)$$

где $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ - оператор импульса электрона, $\epsilon(p)$ - зонный спектр, $\alpha(p)$ - скорость Рашбы, $\hat{\sigma}^i$ ($i = x, y, z$) - матрицы Паули, а α, β - спиновые индексы. Гамильтониан (1.3), может быть диагонализирован унитарной матрицей:

$$U(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ie^{i\varphi_{\mathbf{p}}} & -ie^{i\varphi_{\mathbf{p}}} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где $\varphi_{\mathbf{p}}$ - угол между импульсом \vec{p} электрона и осью x , с собственными значениями:

$$\epsilon_\lambda(\vec{p}) = \epsilon(p) - \lambda p \alpha(p). \quad (1.5)$$

Собственные значения $\lambda = \pm 1$ оператора киральности и импульс электрона \vec{p} составляют квантовые числа состояния электрона (\vec{p}, λ) . Ферми-окружности, соответствующие различным киральностям, расщеплены: $p_{F\pm} = p_F(1 \pm \alpha(p_F)/v(p_F))$, где импульс Ферми p_F находится из уравнения: $\epsilon(p_F) = \mu$, где μ - химический потенциал; $v(p) = d\epsilon(p)/dp$ - зонная скорость электрона. Скорость электрона в киральном состоянии - $\partial\epsilon_\lambda(\vec{p})/\partial p$. Мы пола-

гаем $\alpha(p_F) \ll v(p_F)$, и пренебрегаем поправками порядка α/v . Тогда спин-орбитальное расщепление равно $\Delta = 2p_F\alpha(p_F)$. Плотность состояний на двух Ферми-окружностях разная: $\nu_{\pm} = \nu_F(1 \pm \alpha_F/v_F)$, где $\nu_F = p_F/2\pi v(p_F)$. В отличие от случая параболического спектра и скорости Рашбы не зависящей от импульса, для обобщенной модели (1.3), скорости Ферми отличны на двух Ферми-окружностях: $v_{F+} - v_{F-} = 2\alpha_F \left(\frac{p_F}{mv_F} - 1 \right) - 2p_F \frac{d\alpha}{dp} \Big|_F$. В дальнейшем мы используем систему единиц, где $\hbar = 1$.

В этом разделе мы рассматриваем двумерный идеальный электронный газ со взаимодействием Рашбы с гамильтонианом:

$$\hat{H}_R = \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{h}_{\alpha\beta}(\vec{p}) \psi_{\beta}(\vec{r}) d^2\vec{r}, \quad (1.6)$$

при нулевой температуре. $\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r})$ и $\psi_{\beta}(\vec{r})$ - электронные операторы рождения и уничтожения. Электромагнитный векторный потенциал \vec{A} спаривается с орбитальным движением электрона согласно преобразованию: $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}/c$, в гамильтониане (1.3). Вариация гамильтониана (1.6) по \vec{A} дает оператор электрического тока: $\hat{J}_{\nu} = \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) (\hat{j}_{\nu})_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) d^2\vec{r}$, где оператор тока для одной частицы имеет вид (это фактически скорость $\hat{j}_{\nu} = e\hat{v}_{\nu}$):

$$(\hat{j}_{\nu})_{\alpha\beta}(\vec{p}) = e \left(v(p) \frac{p_{\nu}}{p} \delta_{\alpha\beta} + \frac{d(p_{\mu}\alpha(p))}{dp_{\nu}} \epsilon^{zi\mu} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^i \right), \quad (1.7)$$

где $\nu = x, y$ пространственные индексы, а $\epsilon^{zi\mu}$ трехмерный полностью антисимметрический тензор.

При неоднородном SU(2) преобразовании электронного спинора: $\psi_{\alpha}(\vec{r}) \mapsto U_{\alpha\beta}(\vec{r})\psi_{\beta}(\vec{r})$, гамильтониан (1.37) становится зависящим от SU(2), т. н. “спин-электромагнитного” вектор-потенциала $\hat{A}_{\mu} = A_{\mu}^0 \hat{\sigma}^0 + A_{\mu}^i \hat{\sigma}^i$, причем A_{μ}^0 совпадает с физическим электромагнитным потенциалом, а $A_{\mu}^i = -i \text{Tr}(\sigma^i U^{\dagger} \partial_{\mu} U)/2$. Хотя этот последний потенциал - чисто калибровочный и не имеет никаких физических последствий, вариация гамильтониана (1.37) по нему определяет спиновый ток i -ой компоненты спина в направлении μ : $\hat{J}_{\mu}^i = \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) (\hat{j}_{\mu}^i)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) d^2\vec{r}$, где оператор спинового тока для одной частицы

имеет вид:

$$(\hat{j}_\mu^i)_{\alpha\beta}(\vec{p}) = v(p) \frac{p_\mu}{p} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^i + \frac{d(p_\nu \alpha(p))}{dp_\mu} \epsilon^{z i \nu} \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Наше определение спинового тока (1.8), совпадает с определением, приведенным в [9]: $\hat{J}_\mu^i = (\hat{v}_\mu \hat{\sigma}^i + \hat{\sigma}^i \hat{v}_\mu)/2$, но отличается от определения, приведенного в работах [2, 3, 4, 5] на множитель 2, из-за чего наша величина спин-холловской проводимости в два раза больше, чем в литературе.

Взаимодействие электрона с точечными немагнитными примесями, расположенными в координатах \vec{R}_i , нумерующихся индексом i , описывается примесным гамильтонианом:

$$\hat{H}_{imp} = \sum_i \int u(\vec{r} - \vec{R}_i) \psi_\alpha^\dagger(\vec{r}) \psi_\alpha(\vec{r}) d^2 \vec{r}, \quad (1.9)$$

где $u(\vec{r})$ - потенциал точечной примеси. Мы предполагаем, что потенциал достаточно слаб, и применимо Борновское приближение. В этом пределе модель примеси (2.96) эквивалентна модели Гауссовского случайного потенциала. Мы раскладываем функцию Грина электрона, усредненную по реализациям потенциала беспорядка, по теории возмущений по степеням гамильтониана (2.96), используя диаграммную технику [13]. Это - сумма диаграмм, где последовательность голых функций Грина электрона отделена примесными “крестами”. Два “креста” соединены усредненной линией примеси: $n_{imp} u^2 = 1/2\pi\nu\tau$, где n_{imp} - плотность примесей, а τ , - среднее время рассеяния. “Крест” не изменяет спин и частоту электрона, так как рассеяние на примеси упругое. Поэтому линия примеси несет нулевую частоту. Диаграммы с пересечениями двух или больше примесных линий малы как степени отношения $1/\epsilon_F \tau \ll 1$. Усредненная функция Грина - матрица 2x2 в спиновом пространстве, является решением уравнения Дайсона:

$$G_{\alpha\beta}^{-1}(\epsilon, \vec{p}) - (\epsilon - \mu) \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(\vec{p}) = -\frac{n_{imp} u^2}{V} \sum_{\vec{p}'} G_{\alpha\beta}(\epsilon, \vec{p}'). \quad (1.10)$$

Оно может быть легко преобразовано к киральному базису унитарной матрицей $U(\vec{p})$ (1.4). Запаздывающая и опережающая функции Грина диагональны

в киральном базисе: $G_{\lambda'\lambda}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) = G_{\lambda}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p})\delta_{\lambda'\lambda}$, и решение уравнения Дайсона (1.10), имеет вид [13]:

$$G_{\lambda}^R(\epsilon, \vec{p}) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_{\lambda}(\vec{p}) + \mu + i/2\tau} \delta_{\lambda\lambda}, \quad (1.11)$$

где τ не зависит от киральности. Опережающая функция Грина комплексно сопряжена запаздывающей: $G_{\lambda}^A(\epsilon, \vec{p}) = \{G_{\lambda}^R(\epsilon, \vec{p})\}^*$. Функция Грина в спиновом базисе - недиагональная матрица 2x2:

$$G^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) = \begin{pmatrix} G_{\uparrow\uparrow}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) & G_{\uparrow\downarrow}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) \\ G_{\downarrow\uparrow}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) & G_{\downarrow\downarrow}^{(R,A)}(\epsilon, \vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где (пока опуская зависимость от частоты и импульса):

$$\begin{aligned} G_{\uparrow\uparrow}^{(R,A)} &= G_{\downarrow\downarrow}^{(R,A)} = (G_+^{(R,A)} + G_-^{(R,A)})/2, \\ G_{\uparrow\downarrow}^{(R,A)} &= -ie^{-i\varphi_{\mathbf{p}}}(G_+^{(R,A)} - G_-^{(R,A)})/2, \\ G_{\downarrow\uparrow}^{(R,A)} &= ie^{i\varphi_{\mathbf{p}}}(G_+^{(R,A)} - G_-^{(R,A)})/2, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где киральная $G_{\pm}^{(R,A)}$ определена в уравнении (1.11).

Чтобы вычислить ток, вызванный в электронной системе электрическим полем, мы используем технику Келдыша [14]. Наш результат, уравнение (1.16), хорошо известен, но мы выводим его здесь для последовательности изложения. Усредненная Келдышевская функция Грина - матрица 4x4 $\mathcal{G}(\epsilon, \vec{p})$, которая может быть удобно записана через Келдышевские матрицы 2x2, элементы которой - матрицы в спиновом пространстве:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{--} & \mathcal{G}_{-+} \\ \mathcal{G}_{+-} & \mathcal{G}_{++} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - N(\epsilon) & -N(\epsilon) \\ 1 - N(\epsilon) & -N(\epsilon) \end{pmatrix} G^R(\epsilon, \vec{p}) + \\ &+ \begin{pmatrix} N(\epsilon) & N(\epsilon) \\ -1 + N(\epsilon) & -1 + N(\epsilon) \end{pmatrix} G^A(\epsilon, \vec{p}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где функция распределения электронов $N(\epsilon)$ пропорциональна единичной матрице в спиновом пространстве.

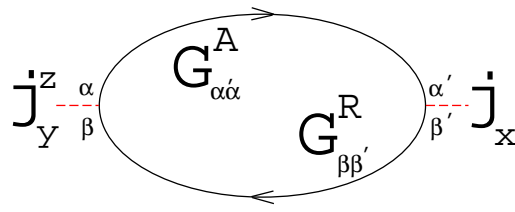


Рис. 1.1: Спин-Холловская проводимость от одной петли.

Для однородного электрического поля $\vec{E}(t) = \vec{E}(\Omega)e^{-i\Omega t}$ выбираем калибровку - зависящий от времени вектор-потенциал $\vec{A}(t) = \vec{A}(\Omega)e^{-i\Omega t}$, где $\vec{A}(\Omega) = -ic\vec{E}(\Omega)/\Omega$. Используем технику Келдыша [14]. Усредняем оператор спинового тока по электронному состоянию, возмущенному электромагнитным гамильтонианом: $\hat{H}_{em} = -\frac{1}{c} \int d^2\vec{r} \hat{j}_\nu(\vec{r}) A_\nu(t)$, в первом порядке по теории возмущений. Из соотношения: $\langle \hat{j}_\mu^z(\Omega) \rangle = \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{sH}(\Omega) E_\nu(\Omega)$ находим спин-холловскую проводимость:

$$\sigma_{sH} = \frac{-1}{V\Omega} \sum_{\vec{p}} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr} \left[\hat{j}_y^z(\vec{p}) \mathcal{G}(\epsilon + \Omega, \vec{p}) \tau^z \hat{j}_x(\vec{p}) \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}) \right]_{-+}, \quad (1.15)$$

где $\hat{\tau}^z$ - матрица 4x4 - произведение матриц Паули $\hat{\sigma}^z$ в пространстве Келдыша и единичной матрицы в спиновом пространстве; операторы тока в уравнении (1.15) - произведение матриц (1.7, 1.8), и единичной матрицы в пространстве Келдыша. Tr в (1.15) действует только в спиновом пространстве, тогда как индексы $-+$ элемента соответствуют пространству Келдыша. Подставляя в уравнение (1.15) функцию Грина (1.14), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{sH}(\Omega) = & \frac{1}{V\Omega} \sum_{\vec{p}} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \left\langle \text{Tr} \left[\hat{j}_y^z(\vec{p}) \left(N(\epsilon + \Omega) \right. \right. \right. \\ & \times \left(G^R(\epsilon + \Omega, \vec{p}) - G^A(\epsilon + \Omega, \vec{p}) \right) \hat{j}_x(\vec{p}) G^A(\epsilon, \vec{p}) \\ & \left. \left. \left. + G^R(\epsilon + \Omega, \vec{p}) \hat{j}_x(\vec{p}) N(\epsilon) \left(G^R(\epsilon, \vec{p}) - G^A(\epsilon, \vec{p}) \right) \right) \right] \right\rangle, \quad (1.16) \end{aligned}$$

где скобки означают усреднение по беспорядку. В приближении непересекающихся диаграмм среднее в уравнении (1.16), дается суммой одной петли и лестничных диаграмм, показанных на Рис. 1.1, 1.2.

Сначала мы вычисляем однопетлевую диаграмму, Рис. 1.1, и обозначаем

эту часть спин-холловской проводимости как σ_{sH}^0 . Это соответствует уравнению (1.16), в котором все функции Грина заменены усредненными функциями Грина (1.11). Вторая строчка в уравнении (1.16) содержит мнимую часть функции Грина $G^R(\epsilon + \Omega, \vec{p})$, и соответствующий интеграл является сходящимся, поэтому во второй строчке мы заменяем ϵ на $\epsilon - \Omega$. При $T = 0$ функция распределения Ферми-Дирака имеет вид: $N(\epsilon) = \theta(-\epsilon)$. Мы берем интеграл по ϵ , и в пределе нулевой частоты $\Omega \rightarrow 0$ находим:

$$\sigma_{sH}^0 = -\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{v(p)}{2\pi p} \left[\frac{1}{2p\alpha(p)} (S(\zeta) - S(\xi)) + \frac{1}{2\tau} \frac{\zeta\xi + 1/4\tau^2}{(\zeta^2 + 1/4\tau^2)(\xi^2 + 1/4\tau^2)} \right], \quad (1.17)$$

где $S(x) = \arctan(x/2\tau)$, $\zeta = \epsilon(p) - p\alpha(p) - \mu$ и $\xi = \epsilon(p) + p\alpha(p) - \mu$. В пределе большого объема делаем замену $\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2}$, и затем вычисляем интеграл по \vec{p} в (1.17) в пределе большой Ферми-окружности $\mu \gg \Delta, 1/\tau$:

$$\int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \approx \frac{p}{2\pi v(p)} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + R(p)\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (1.18)$$

где $R(p) = p^{-1}v^{-1}(p) - m^{-1}(p)v^{-2}(p)$. В результате получаем:

$$\sigma_{sH}^0 = \frac{e}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} \right), \quad (1.19)$$

где первый и второй член соответствуют первому и второму члену в уравнении (1.17).

Важно заметить, что результат (1.19) в точности совпадает с результатом, полученным из тех членов в уравнении (1.16), которые содержат одну запаздывающую и одну опережающую функцию Грина. Эти два члена пропорциональны $dN(\epsilon)/d\epsilon = -\delta(\epsilon)$, и все интегралы явно сидят на Ферми-радиусе. Поэтому спин-холловская проводимость в отличие от обычной Холловской проводимости определяется квазичастицами вблизи Ферми-окружности, а не всем Ферми диском.

Лестничные диаграммы, показанные на Рис. 1.2, представляют вершинные поправки к току. Дополнительные примесные линии улучшают сходи-

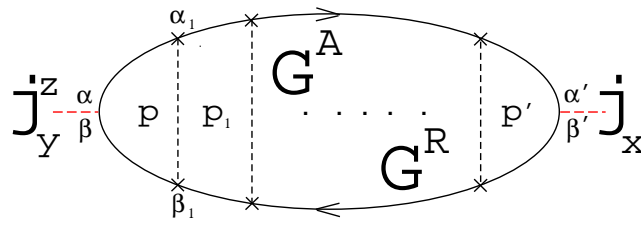


Рис. 1.2: Вершинная поправка к спин-холловской проводимости дается суммой непересекающихся лестничных диаграмм.

мость интеграла в (1.16). Как следствие, вершинные поправки к членам в уравнении (1.16) с двумя опережающими или двумя запаздывающими функциями Грина убывают как $\max(1/\tau, \Delta)/\epsilon_F \ll 1$. Поэтому мы рассматриваем только вершинные поправки к членам с одной опережающей и одной запаздывающей функцией Грина, как показано на Рис. 1.2. Для этих диаграмм квазиклассическое приближение (1.18) верно.

Сумма лестничных диаграмм с $n = 1, 2, \dots$ примесными линиями дается выражением:

$$\sigma_{sH}^{\text{lad}} = - \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\tilde{J}_y^z G^R(0, \vec{p}) j_x(\vec{p}) G^A(0, \vec{p}) \right], \quad (1.20)$$

где сумма $n = 1.. \infty$ вершинных поправок к току $\hat{j}_y^z(\vec{p})$ (по крайней мере с одной примесной линией) обозначена матрицей \tilde{J}_y^z . В спиновом базисе и для точечных примесных потенциалов сумма не зависит от импульса электрона \vec{p} и удовлетворяет уравнению трансфер матрицы:

$$\tilde{J}_y^z = \frac{1}{2\pi\tau\nu} \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} G^A(0, \vec{p}) \left[j_y^z(\vec{p}) + \tilde{J}_y^z \right] G^R(0, \vec{p}), \quad (1.21)$$

где функции Грина $G^{(R,A)}$ даны в (1.12). “Полный” оператор спинового тока со всеми включенными вершинными поправками $\hat{j}_y^z(\vec{p}) + \tilde{J}_y^z$, представлен диаграммно на Рис. 1.3. В уравнениях для операторов тока (1.7, 1.8), мы раскладываем скорость электрона $v(p) = v(p_F) + \xi/(v(p_F)m(p_F))$, где $m^{-1}(p) = dv(p)/dp$, в первом порядке по отклонению от Ферми-окружности: ξ/μ , малом в квазиклассическом приближении. Также мы раскладываем спин-орбитальное расщепление: $p\alpha(p) = \alpha(p_F) (p_F + (1 + (p_F/\alpha_F)d\alpha/dp_F)\xi/v_F)$, в

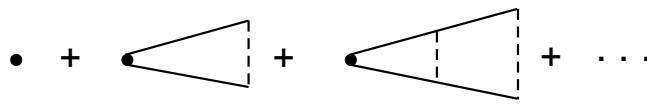


Рис. 1.3: Вершина спинового тока со всеми включенными вершинными поправками: $j_y^z(\vec{p}) + \tilde{J}_y^z$.

функциях Грина. Затем вычисляем интегралы в (1.21) в квазиклассическом приближении (1.18), пренебрегая нечетными степенями ξ :

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{J}_y^z\right)_{\uparrow\uparrow} &= \left\{ [2 + (\Delta\tau)^2] \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\uparrow\uparrow} + (\Delta\tau)^2 \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\downarrow\downarrow} \right\} B, \\
\left(\tilde{J}_y^z\right)_{\downarrow\downarrow} &= \left\{ (\Delta\tau)^2 \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\uparrow\uparrow} + [2 + (\Delta\tau)^2] \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\downarrow\downarrow} \right\} B, \\
\left(\tilde{J}_y^z\right)_{\uparrow\downarrow} &= \left\{ -iv(p_F)\Delta\tau + [2 + (\Delta\tau)^2] \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\uparrow\downarrow} \right\} B, \\
\left(\tilde{J}_y^z\right)_{\downarrow\uparrow} &= \left\{ iv(p_F)\Delta\tau + [2 + (\Delta\tau)^2] \left(\tilde{J}_y^z\right)_{\downarrow\uparrow} \right\} B,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где $B = \frac{1}{2} [1 + (\Delta\tau)^2]^{-1}$. Из первых двух строчек уравнения (1.22) находим: $(\tilde{J}_y^z)_{\uparrow\uparrow} = (\tilde{J}_y^z)_{\downarrow\downarrow}$, а из последних двух строчек находим: $(\tilde{J}_y^z)_{\downarrow\uparrow} = iv(p_F)/(\Delta\tau)$ и $(\tilde{J}_y^z)_{\uparrow\downarrow} = -iv(p_F)/(\Delta\tau)$. Подынтегральное выражение в уравнении (1.20), не зависит от диагональных элементов матрицы \tilde{J}_y^z , и поэтому мы полагаем их равными нулю: $\tilde{J}_y^z = \hat{\sigma}^y v(p_F)/\Delta\tau$. Как и ожидалось, вершинные поправки пропорциональны силе рассеяния. Интегрируя правую часть (1.20) по ξ в квазиклассическом приближении (1.18), мы наконец находим лестничную часть спин-холловской проводимости (Рис. 1.2):

$$\sigma_{sH}^{\text{lad}} = \frac{e}{4\pi} \left(-1 + \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} \right). \tag{1.23}$$

Интересно заметить, что все производные $\alpha(p)$ и $v(p)$ по p сократились.

Спин-Холловская проводимость - сумма вкладов (1.19) и (1.23), и равна нулю:

$$\sigma_{sH} = \sigma_{sH}^0 + \sigma_{sH}^{\text{lad}} = 0. \tag{1.24}$$

Она явно не зависит от примесного времени рассеяния τ . Таким образом, мы наблюдаем скачок между спин-холловской проводимостью в чистой системе

$\sigma_{sH} = e/8\pi\hbar$ и спин-холловской проводимостью (1.24) в присутствии бесконечно малого количества немагнитных рассеивателей. Как было показано в работе [7], этот скачок связан с диссипацией в системе, благодаря которой возникает диссипативная часть в спин-холловской проводимости $\sigma_{sH}^D = -e/8\pi\hbar$, которая сокращает реактивную часть $\sigma_{sH}^R = e/8\pi\hbar$.

Заметим, что при взятии интегралов по ξ в знаменателях делалась замена $2\alpha p = 2\alpha_F p_F = \Delta$, что эквивалентно предположению учета только первых членов по α_F/v_F . Таким образом, результат $\sigma_{sH} = 0$ верен в линейном порядке по α_F/v_F .

Проводим аналогичное вычисление для средней спиновой поляризации для обобщенной модели (1.3), в электрическом поле:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^\mu \rangle(\Omega) &= \frac{1}{V\Omega} \sum_{\vec{p}} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \left\langle \text{Tr} \left[\hat{\sigma}^\mu / 2 \left(N(\epsilon + \Omega) \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(G^R(\epsilon + \Omega, \vec{p}) - G^A(\epsilon + \Omega, \vec{p}) \right) \hat{j}_x(\vec{p}) G^A(\epsilon, \vec{p}) \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + G^R(\epsilon + \Omega, \vec{p}) \hat{j}_x(\vec{p}) N(\epsilon) \left(G^R(\epsilon, \vec{p}) - G^A(\epsilon, \vec{p}) \right) \right] \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где скобки означают усреднение по беспорядку. В приближении непересекающихся диаграмм среднее в уравнении (1.25), дается суммой одной петли и лестничных диаграмм, подобных показанных на Рис. 1.1, 1.2, в которых надо заменить оператор спинового тока \hat{J}_y^z на оператор спина \hat{S}^y .

Спиновая поляризация от однопетлевой диаграммы дается выражением:

$$\langle \hat{S}^\mu \rangle^0 = -\epsilon^{\mu\nu} \frac{e\Delta\tau}{2\pi v_F} \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} E_\nu. \quad (1.26)$$

Лестничная часть спиновой поляризации равна:

$$\langle \hat{S}^\mu \rangle^{\text{lad}} = \epsilon^{\mu\nu} \frac{e\Delta\tau}{2\pi v_F} \left(1 + \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} \right) E_\nu. \quad (1.27)$$

Спиновая поляризация - сумма вкладов (1.26) и (1.27), и пропорциональна примесному времени рассеяния:

$$\langle \hat{S}^\mu \rangle = \langle \hat{S}^\mu \rangle^0 + \langle \hat{S}^\mu \rangle^{\text{lad}} = \epsilon^{\mu\nu} \frac{e\Delta\tau}{2\pi v_F} E_\nu, \quad (1.28)$$

в согласии с [5, 16, 15]. Надо заметить, что постоянная продольная спиновая поляризация (1.28) - следствие нулевого спин-холловского эффекта (1.24). Отличная от нуля спин-холловская проводимость привела бы к возрастающей со временем продольной спиновой поляризации.

1.2.2 Общее доказательство отсутствия стационарного спин-холловского тока

Э. И. Рашба в недавней работе [17] показал, что нулевая объемная спин-холловская проводимость - внутреннее свойство гамильтониана свободных электронов, а учет рассеяния - просто способ продемонстрировать это внутреннее свойство в терминах диаграммной техники. В этом разделе мы доказываем, что спин-холловская проводимость равна нулю посредством анализа общих коммутационных соотношений для операторов. Мы стартуем с коммутационного соотношения:

$$[\hat{H}, \hat{S}^\mu] = i \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger \alpha(p) \hat{p}_\mu \hat{\sigma}^z \psi_{\beta\mathbf{p}}, \quad (1.29)$$

где $\mu = x, y$;

$$\hat{S}^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger \hat{\sigma}^\mu \psi_{\beta\mathbf{p}} \quad (1.30)$$

оператор полного спина. В уравнении (1.29) Гамильтониан \hat{H} включает одностичный Гамильтониан (1.3), соответствующий непараболическому спектру $\epsilon(p)$ и скорости Рашбы, зависящей от импульса $\alpha(p)$, а также и любое независящее от спина электрон-электронное взаимодействие и немагнитный беспорядок, поскольку коммутатор любой компоненты оператора спина с независящими от спина слагаемыми равен нулю. Равенство (1.29) выполнено для любого $\epsilon(p)$ и $\alpha(p)$. Оператор полного спинового тока z -компоненты спина в направлении μ , согласно (1.8), равен:

$$\hat{J}_\mu^z = \sum_{\vec{p}} \psi_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger \frac{v(p)}{p} \hat{p}_\mu \hat{\sigma}^z \psi_{\beta\mathbf{p}}, \quad (1.31)$$

причем, напомним, определение зонной скорости $v(p) = \frac{d\epsilon(p)}{dp}$ не зависит от отношения $p\alpha(p)/\epsilon(p)$.

Если сравнить (1.29) и (1.31), то видим, что при условии:

$$\alpha(p) = \text{const} \cdot \frac{v(p)}{p} \quad (1.32)$$

получаем соотношение

$$[\hat{H}, \hat{S}^\mu] = i \text{const} \cdot \hat{J}_\mu^z. \quad (1.33)$$

Из уравнения эволюции полного спина системы:

$$-i \frac{d}{dt} \hat{S}^\mu = [\hat{H}, \hat{S}^\mu], \quad (1.34)$$

и из коммутационного соотношения (1.33) получаем связь между производной по времени оператора полного спина системы и оператором полного спинового тока:

$$-i \frac{d}{dt} \hat{S}^\mu = i \text{const} \cdot \hat{J}_\mu^z. \quad (1.35)$$

Заметим, что соотношение (1.35) верно для электронной системы с любым немагнитным беспорядком и любым электрон-электронным взаимодействием.¹ Для выполнения соотношения (1.35) также нет необходимости в квадратичном спектре и постоянной скорости Рашбы. Единственное требование - выполнение соотношения (1.32). Заметим также, что нигде в выводе не потребовалось малости спин-орбитального расщепления по сравнению с энергией Ферми.

Если $\sigma_{sH} \neq 0$, тогда течет однородный в пространстве стационарный спиновый ток перпендикулярно к однородному в пространстве электрическому

¹Более того, можно выписать и более общее уравнение для эволюции плотности локального спина:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{s}^\mu(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \hat{j}_\nu^\mu + \alpha m \left(\epsilon^{\mu y l} \hat{j}_x^l - \epsilon^{\mu x k} \hat{j}_y^k \right) = 0, \quad (1.36)$$

при выводе уравнения (1.36) мы рассматривали стандартную модель параболического спектра. Если бы последний член был равен нулю, то уравнение (1.36) было бы уравнением сохранения спина. Однако в металле Рашбы не сохраняется ни одна из компонент спина.

Аналогично (1.36) можно найти уравнения эволюции для операторов спиновых токов $\hat{J}_\mu^\alpha(\vec{r})$, что помогло бы решить интересную открытую задачу о дисперсии спиновых волн в металле Рашбы.

полю. Усредняя операторы в соотношении (1.35) по стационарной матрице плотности, получаем новое уравнение на числа вместо операторов: производная по времени от полного наблюдаемого спина системы равна полному среднему спиновому току. Но средний полный спин системы всегда ограниченная величина, таким образом такое уравнение не может быть верным бесконечно долгое время, как необходимо для постоянного отклика. Это доказывает, что или

$$\sigma_{sH} = 0,$$

или спин-холловский отклик в металле Рашбы- нестационарный. В следующем разделе мы исследуем вторую возможность, которая естественно реализуется в случае *ac* приложенного электрического поля.

В недавней работе Кроткова и Das Sarma (2006) [12] было диаграммным вычислением показано, что спин-холловская проводимость не равна нулю в присутствии немагнитных примесей при произвольном $\epsilon(p)$ и $\alpha = const$, а именно, демонстрировалось, что спин-холловская проводимость пропорциональна α^2 . Однако этот результат не противоречит ни нашему результату из предыдущего раздела, где в микроскопическом вычислении мы учитывали только первую степень отношения α/v , ни результату в этом разделе, поскольку условие $\alpha = const$, согласно (1.32), потребовало бы квадратичный спектр, $\epsilon(p) \propto p^2$.

1.3 Спин-Холловская проводимость и Паули восприимчивость в присутствии электрон-электронного взаимодействия

1.3.1 Соотношение между зависящей от частоты спин-холловской проводимостью и восприимчивостью Паули

Мы рассматриваем двумерный взаимодействующий электронный газ со спариванием Рашбы при нулевой температуре, с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{h}_{\alpha\beta}(\vec{p}) \psi_{\beta}(\vec{r}) d^2\vec{r} + \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{2} \int \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{r}') U(|\vec{r} - \vec{r}'|) \psi_{\beta}(\vec{r}') \psi_{\alpha}(\vec{r}) d^2\vec{r} d^2\vec{r}',$$

где $U(|\vec{r}'|)$ - произвольный независящий от спина двухчастичный потенциал взаимодействия, $\hat{h}_{\alpha\beta}(\vec{p})$ определен в (1.3). В этом разделе будем считать скорость Рашбы не зависящей от импульса: $\alpha(p) = \alpha$, и спектр параболическим:

$$\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.38)$$

Гамильтониан (1.37) - довольно точное приближение для чистых двумерных полупроводниковых гетероструктур.

Для того, чтобы получать соотношение (1.2) между спин-холловской константой и восприимчивостью Паули, выписываем два точных коммутационных соотношения для оператора полного тока и оператора полного спина. Для рассматриваемого параболического спектра (1.38), линейная комбинация полного зарядового тока \vec{J} и полного спина \vec{S} пропорциональна полному импульсу системы и коммутирует с частью гамильтониана, описывающего взаимодействие. Это дает нам два точных коммутационных соотношения в присутствии произвольного (но сохраняющего спин) двухчастичного взаимо-

действия $U(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ в гамильтониане (1.37):

$$[\hat{H}, \hat{J}_\nu] = -2iem\alpha^2 \epsilon^{\nu\mu} \hat{J}_\mu^z$$

и

$$[\hat{H}, \hat{S}^\mu] = im\alpha \hat{J}_\mu^z, \quad (1.39)$$

где \hat{S}^μ определен в (1.30), а операторы полного тока $\hat{J}_\nu = \int \psi_\alpha^\dagger(\vec{r})(\hat{j}_\nu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r}) d^2\vec{r}$ и полного спинового тока $\hat{J}_\mu^i = \int \psi_\alpha^\dagger(\vec{r})(\hat{j}_\mu^i)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r}) d^2\vec{r}$, где

$$(\hat{j}_\nu)_{\alpha\beta}(\vec{p}) = e \left(\frac{p_\nu}{m} \delta_{\alpha\beta} + \alpha \epsilon^{z\nu} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^i \right) \quad (1.40)$$

$$(\hat{j}_\mu^i)_{\alpha\beta}(\vec{p}) = \frac{p_\mu}{m} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^i \quad (1.41)$$

получены из общих уравнений (1.7) и (1.8), если в них подставить параболический спектр (1.38).

Средний спиновый ток электронной системы как отклик на слабое переменное электрическое поле, $E_x(t) = E_{0x} \cos \Omega t$, однородное в пространстве, дается общим квантово-механическим выражением в первом порядке теории возмущений (1.47) - формулой Кубо. Приведем здесь вывод формулы Кубо, следуя [18]. Стартуем с общего квантово-механического определения средней величины:

$$\langle \hat{J}_y^z \rangle = \langle \Psi_0^\dagger | \hat{J}_y^z | \Psi_0 \rangle, \quad (1.42)$$

где Ψ_0 - волновые функции, соответствующие основному состоянию взаимодействующей системы с приложенным внешним электрическим полем. Если поле слабое, то его можно рассмотреть как возмущение, и выразить волновые функции Ψ_0 через невозмущенные волновые функции $\Psi_0^{(0)}$, воспользовавшись известными квантово-механическими формулами теории возмущений. Возмущение, соответствующее приложенному слабому электрическому полю

$E_x = E_{0x} \cos \Omega t$, описывается гамильтонианом:

$$\hat{V}(t) = -\frac{1}{c} A_x(t) \hat{J}_x, \quad (1.43)$$

где $A_x(t) = (-icE_{0x}e^{-i\Omega t} + icE_{0x}e^{i\Omega t})/2\Omega$, и соответственно $V_{m0}(t) = V_{m0}e^{i\omega_{m0}t}$, где $\omega_{m0} = \epsilon_m - \epsilon_0$, а

$$V_{m0} = -\frac{1}{2}(\hat{J}_x)_{m0} \left(\frac{-iE_{0x}}{\Omega} e^{-i\Omega t} + \frac{iE_{0x}}{\Omega} e^{i\Omega t} \right). \quad (1.44)$$

Волновая функция Ψ_0 в (1.42) удовлетворяет уравнению Шредингера $i\hbar \frac{d\Psi_0}{dt} = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))\Psi_0$, и в первом порядке теории возмущений дается формулой $\Psi_0 = \Psi_0^{(0)} + \sum_m a_{m0} \Psi_m^{(0)}$, где

$$a_{m0} = -\frac{1}{2\hbar} (\hat{J}_x)_{m0} e^{i\omega_{m0}t} \left(\frac{-iE_{0x}e^{-i\Omega t}}{\Omega(\omega_{m0} - \Omega - i0)} + \frac{iE_{0x}e^{i\Omega t}}{\Omega(\omega_{m0} + \Omega - i0)} \right). \quad (1.45)$$

Волновая функция $\Psi_0^{(0)}$ - решение уравнения Шредингера для взаимодействующей системы, но без приложенного внешнего поля: $i\hbar \frac{d\Psi_0^{(0)}}{dt} = \hat{H}_0 \Psi_0^{(0)}$ (гамильтониан \hat{H}_0 включает взаимодействие). Заметим, что для произвольного электрон-электронного взаимодействия нахождение $\Psi_0^{(0)}$ (а тем более Ψ_0) - сложная квантово-механическая задача, и соответственно, нахождение явных выражений для функций откликов взаимодействующих электронных систем - задача, решаемая только если рассматривать взаимодействие как возмущение (что мы и делаем в следующем разделе). В этом разделе мы рассматриваем *произвольное* электрон-электронное взаимодействие, однако не ставим себе задачу нахождения явного вида функций отклика, а просто выражаем их один через другой.

Если мы подставим возмущенные полем волновые функции Ψ_0 в определение среднего спинового тока (1.42), получаем:

$$\langle \hat{J}_y^z(t) \rangle = \sum_m \left(a_{m0} (\hat{J}_y^z)_{0m} e^{i\omega_{0m}t} + a_{m0}^* (\hat{J}_y^z)_{m0} e^{i\omega_{m0}t} \right), \quad (1.46)$$

где введено обозначение $(\hat{J}_y^z)_{m0} = \langle m | \hat{J}_y^z | 0 \rangle = \langle \Psi_m^{(0)\dagger} | \hat{J}_y^z | \Psi_0^{(0)} \rangle$. При получении (1.46) мы воспользовались соображениями симметрии, без приложенного

внешнего поля спиновый ток в системе не течет: $\langle \Psi_0^{(0)\dagger} | \hat{J}_y^z | \Psi_0^{(0)} \rangle = 0$. Подставляя (1.45) в (1.46), получаем общее выражение для среднего спинового тока как отклик на переменное электрическое поле:

$$\langle \hat{J}_y^z(t) \rangle = \frac{i}{2\hbar} \sum_m \left[\left(\hat{J}_x \right)_{m0} \left\{ \frac{e^{-i\Omega t}}{\Omega(\omega_{m0} - \Omega - i0)} - \frac{e^{i\Omega t}}{\Omega(\omega_{m0} + \Omega - i0)} \right\} \left(\hat{J}_y^z \right)_{0m} - h.c. \right] E_{0x}, \quad (1.47)$$

где $\omega_{m0} = \epsilon_m - \epsilon_0$, и 0 - основное состояние (взаимодействующая система без приложенного внешнего поля), а m - *точные* уровни взаимодействующей системы. Отметим, что формула Кубо (1.47) верна для внешних полей, однородных в пространстве.

Используя точные коммутационные соотношения (1.39), в правой стороне (1.47) мы можем связать матричные элементы операторов полного зарядового и спинового токов:

$$\langle m | [\hat{H}, \hat{J}_x] | 0 \rangle = \omega_{m0} \left(\hat{J}_x \right)_{m0} = -2im\alpha^2 \left(\hat{J}_y^z \right)_{m0}. \quad (1.48)$$

При помощи уравнений (1.47) и (1.48), после простых алгебраических преобразований для среднего спинового тока получаем выражение:

$$\langle \hat{J}_y^z(t) \rangle = \frac{m\alpha^2}{\hbar} \sum_m \left[\frac{\left(\hat{J}_y^z \right)_{m0} \left(\hat{J}_y^z \right)_{0m}}{\omega_{m0}^2} \left\{ \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_{m0} - \Omega - i0} + \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_{m0} + \Omega - i0} \right\} + h.c. \right] E_{0x}. \quad (1.49)$$

Используя второе из коммутационных соотношений (1.39), выражаем матричные элементы оператора полного спинового тока в уравнении (1.49) через матричные элементы полного спина:

$$\left(\hat{J}_y^z \right)_{m0} = \frac{e}{2im\alpha} \omega_{m0} \left(\hat{S}^y \right)_{m0}, \quad (1.50)$$

и подставляем их в (1.49), после чего отклик полного среднего спинового тока

$\langle \hat{J}_y^z \rangle$ на внешнее электрическое поле E_x принимает вид:

$$\langle \hat{J}_y^z(t) \rangle = -\frac{e^2}{4m\hbar} \sum_m \left[\left(\hat{S}^y \right)_{m0} \left(\hat{S}^y \right)_{0m} \left\{ \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_{m0} - \Omega - i0} + \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_{m0} + \Omega - i0} \right\} + h.c. \right] E_{0x}. \quad (1.51)$$

Очевидно, что спин-холловская проводимость - только одна из многих функций отклика Ферми-жидкостной системы на неоднородные в пространстве и времени поля вида $E_k(\Omega, \vec{q})$. Кроме спин-холловской проводимости, Ферми-жидкость со взаимодействием Рашбы характеризуется магнитной восприимчивостью, так как спаривание Рашбы нарушает симметрию вращения спина. Как правило, есть две восприимчивости $\chi_{zz}(\Omega, \vec{q})$ и $\chi_{\parallel}(\Omega, \vec{q})$. Мы можем найти среднюю полную y - проекцию спина $\langle \hat{S}^y \rangle$ в системе, в которой приложено слабое внешнее однородное магнитное поле H_{0y} в y -направлении как отклик на переменное магнитное поле $H_y(t) = H_{0y} \cos \Omega t$ в пределе $\Omega \rightarrow 0$. Это возмущение описывается Гамильтонианом взаимодействия:

$$\hat{U}(t) = -\frac{g\mu_B}{2} H_y(t) \hat{S}^y, \quad (1.52)$$

где \hat{S}^y определено в (1.35), а μ_B - магнетон Бора.

Делаем выкладки, подобные приводящим к (1.44-1.46), и получаем, что матричный элемент возмущения имеет вид:

$$U_{m0} = -\frac{1}{2} (\hat{S}^y)_{m0} \left(\frac{g\mu_B H_{0y}}{2} e^{-i\Omega t} + \frac{g\mu_B H_{0y}}{2} e^{i\Omega t} \right). \quad (1.53)$$

Подставляя возмущенные волновые функции $\Psi_0 = \Psi_0^{(0)} + \sum_m b_{m0} \Psi_m^{(0)}$ в формулу Кубо $\langle \hat{S}^y \rangle = \langle \Psi_0^\dagger | \hat{S}^y | \Psi_0 \rangle$, для среднего спина находим:

$$\langle \hat{S}^y(t) \rangle = \sum_m \left(b_{m0} \left(\hat{S}^y \right)_{0m} e^{i\omega_{0m}t} + b_{m0}^* \left(\hat{S}^y \right)_{m0} e^{i\omega_{m0}t} \right), \quad (1.54)$$

где коэффициенты b_{m0} даются выражением:

$$b_{m0} = -\frac{g\mu_B H_{0y}}{4\hbar} \left(\hat{S}^y \right)_{m0} e^{i\omega_{m0}t} \left\{ \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_{m0} - \Omega - i0} + \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_{m0} + \Omega - i0} \right\}. \quad (1.55)$$

Окончательно, для $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$ получаем

$$\langle \hat{S}_y(t) \rangle = -\frac{g\mu_B}{4\hbar} \sum_m \left[\left(\hat{S}_y \right)_{m0} \left(\hat{S}_y \right)_{0m} \left\{ \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_{m0} - \Omega - i0} + \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_{m0} + \Omega - i0} \right\} + h.c. \right] H_{0y}. \quad (1.56)$$

Заметим, что теперь правая сторона уравнения (1.51), полностью аналогична (с точностью до замены множителя e/m на $(g\mu_B)^2$) уравнению (1.56) - выражению линейного отклика для спиновой восприимчивости Паули относительно продольного магнитного поля $H_y(t) = H_{0y} \cos \Omega t$, которое заменило бы электрическое поле $E_x(t)$.²⁾ Это наблюдение немедленно приводит нас к соотношению (1.57)

$$\chi_{\parallel}(\Omega, \vec{q} = 0) = \frac{g^2 \mu_B^2 m}{2e^2} \sigma_{sH}(\Omega, \vec{q} = 0), \quad (1.57)$$

которое является главным результатом данного раздела. Заметим, что соотношение (1.57) верно для линейного отклика на однородные в пространстве возмущения ($\vec{q} = 0$) на произвольной частоте Ω . В пределе $\vec{q} = 0$ мнимая часть обеих магнитной восприимчивости и спин-холловской проводимости равна нулю.

В статье [19] подобное соотношение между спин-холловской проводимостью и восприимчивостью Паули обсуждалось для невзаимодействующего электронного газа.

Функция отклика Ферми-жидкости обычно зависит от отношения Ω/qv_F . Например, в нормальной изотропной Ферми-жидкости $\chi = 0$, если предел $q \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow 0$ взят с отношением $qv_F/\Omega \rightarrow 0$, как следствие сохранения полного спина. Обычная восприимчивость Паули $\chi_{Pauli} = 2\mu_B^2 \nu(\epsilon_F)$ получается в результате противоположной последовательности пределов, $\Omega/qv_F \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$ [20]. Мы нашли, что $\chi_{\parallel} = \frac{1}{2}\chi_{Pauli}$ и $\chi_{zz} = \chi_{Pauli}$ при $qv_F/\Omega = 0$

²⁾Мы следуем определению восприимчивости $M_y(t) = \frac{g\mu_B}{2} \langle \hat{S}_y(t) \rangle = \int_{-\infty}^t \chi_{\parallel}(t-t') H_y(t') dt'$, которая в случае косинусоидального магнитного поля преобразуется к виду $M_y(t) = (\chi_{\parallel}(-\Omega) e^{i\Omega t} + \chi_{\parallel}(\Omega) e^{-i\Omega t}) H_{0y}$, $M_y(\Omega) = \chi_{\parallel}(\Omega) H_y(\Omega)$, $\chi_{\parallel} = \frac{1}{2}(\chi_{xx} + \chi_{yy})$.

и $\Omega \rightarrow 0$. В соотношении (1.57), предел нулевой частоты восприимчивости $\chi(\Omega \rightarrow 0) = \frac{1}{2}\chi_{Pauli}$ и спин-холловского отклика $\sigma_{sH}(\Omega \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi e}$ получается путем взятия сначала предела $q \rightarrow 0$ при отличном от нуля Ω , а затем устремления Ω к нулю. Поэтому мы ожидаем, что соотношение (1.57) будет верно при $qv_F/\Omega \ll 1$.

Мы вычислили спиновые восприимчивости и спин-холловские проводимости для чистой системы невзаимодействующих фермионов более высокого спина j , уравнение (1.58), и убедились, что они удовлетворяют соотношению (1.57). Интересно, что в случае идеального двумерного газа фермионов произвольного полуцелого спина j со взаимодействием Рашбы, величина спин-холловской константы также универсальна и растет с j :

$$\sigma_{sH}(j) = \frac{e}{2\pi} \sum_{m=-j}^j m^2. \quad (1.58)$$

1.3.2 Поправки от взаимодействия к спин-холловской проводимости

В этом подразделе мы вычисляем поправки от взаимодействия к спин-холловской проводимости (1.1) для чистой системы в пределе нулевой частоты: $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \delta\sigma_{sH}(\Omega)$. Мы используем технику Келдыша [14]. В самом низком порядке по электрон-электронному взаимодействию $U(|\vec{r}'|)$, вклад в $\delta\sigma_{sH}(\Omega)$ вносят три диаграммы, показанные на Рис. 1.4.

Мы выбираем калибровку для однородного электрического поля $\vec{E}(t) = \vec{E}(\Omega)e^{-i\Omega t}$, вектор-потенциал зависящий от времени $\vec{A}(t) = \vec{A}(\Omega)e^{i\Omega t}$, где $\vec{A}(\Omega) = -ic\vec{E}(\Omega)/\Omega$. Используя технику Келдыша, усредняем оператор спинового тока по электронному состоянию, возмущенному как электромагнитным гамильтонианом, $\hat{H}_{em} = -\frac{1}{c} \int d^2\vec{r} \hat{j}_\nu(\vec{r})(t)$, так и электрон-электронным взаимодействием $\frac{1}{2} \int \int \psi_\alpha^\dagger(\vec{r})\psi_\beta^\dagger(\vec{r}')U(|\vec{r}-\vec{r}'|)\psi_\beta(\vec{r}')\psi_\alpha(\vec{r}) d^2\vec{r}d^2\vec{r}'$, в первом порядке по теории возмущений. Поправка к спин-холловской проводимости от

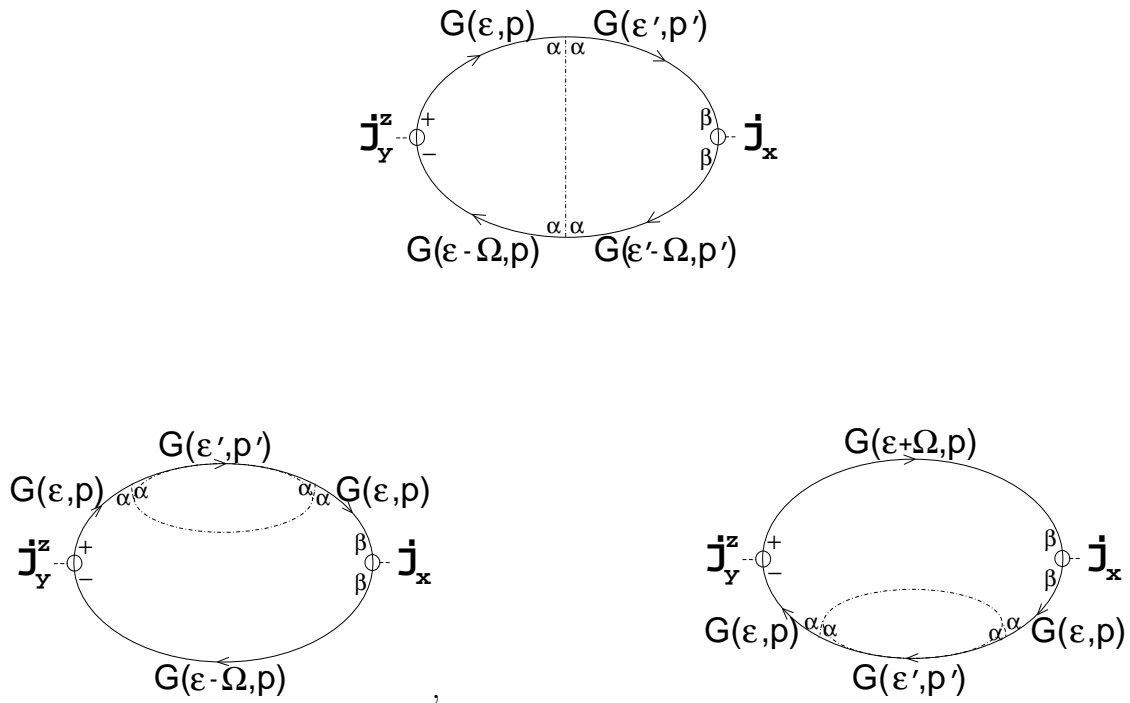


Рис. 1.4: Поправка к спин-холловской проводимости от электрон-электронного взаимодействия дается суммой трех диаграмм, которые имеют одинаковый знак и коэффициент. Индексы $+$, $-$, α , β соответствуют пространству Келдыша. Пунктирные линии соответствуют взаимодействию $U(|\vec{p} - \vec{p}'|)$. Диаграммы (следуя сверху вниз и слева направо) соответствуют выражениям A , B , C в тексте.

электрон-электронного взаимодействия $\delta\sigma_{sH}$ тогда находится из соотношения $\langle \hat{j}_\mu^z(\Omega) \rangle = \epsilon_{\mu\nu}(\sigma_{sH}(\Omega) + \delta\sigma_{sH}(\Omega))E_\nu(\Omega)$, и имеет вид:

$$\delta\sigma_{sH}(\Omega) = \frac{e}{2V\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{d\epsilon'}{2\pi} \text{Tr} [A + B + C]_{-+} U(|\vec{p} - \vec{p}'|),$$

где

$$A = J_y^z \mathcal{G}(\epsilon - \Omega, \vec{p}) [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon' - \Omega, \vec{p}') \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon', \vec{p}')]_+ \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}),$$

$$B = J_y^z \mathcal{G}(\epsilon - \Omega, \vec{p}) \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}) [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon', \vec{p}')]_+ \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}),$$

$$C = J_y^z \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}) [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon', \vec{p}')]_+ \mathcal{G}(\epsilon, \vec{p}) \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon + \Omega, \vec{p}),$$

(1.59)

где τ_z - матрица 4x4 - произведение матриц Паули $\hat{\sigma}^z$ в пространстве Келдыша и единичной матрицы в спиновом пространстве. Индексы $-+$ соответствуют пространству Келдыша. Усредненная Келдышевская функция Грина $\mathcal{G}(\epsilon, \vec{p})$ - матрица 4x4, определенная в уравнении (1.14), в котором сделана замена $N(\epsilon) \rightarrow N(p)$. В этом разделе мы можем выбрать электронное распределение $N(p)$ как функцию импульса p из-за сохраненной трансляционной симметрии (нет беспорядка). Для опережающей и запаздывающей функций Грина мы полагаем в уравнении (1.11) $\tau \rightarrow \infty$. Операторы тока в уравнении (1.59) - произведения матриц (1.40, 1.41) и единичной матрицы в пространстве Келдыша. Tr в уравнении (1.59) действует только в спиновом пространстве, и все операторы, включая функции Грина, выписаны в спиновом базисе.

Поскольку функция распределения хорошо определена для двух Ферми-окружностей металла Рашбы, удобно перейти к киральному базису, в котором функции Грина и функция распределения диагональны. При преобразовании операторов и функций Грина от спинового к киральному базису при помощи унитарной матрицы $U(p)$, определенной в (1.4): $\hat{J}^{(sp)}(p) = U(p) \hat{J}^{(ch)}(p) U^\dagger(p)$,

выражения для трех диаграмм (1.59) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
A &= J_y^z \mathcal{G}(\epsilon - \Omega, p) \mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon' - \Omega, p')] \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon', p') \Big|_+ \mathbf{w}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \mathcal{G}(\epsilon, p), \\
B &= J_y^z \mathcal{G}(\epsilon - \Omega, p) \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon, p) \mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon', p')] \Big|_+ \mathbf{w}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \mathcal{G}(\epsilon, p), \\
C &= J_y^z \mathcal{G}(\epsilon, p) \mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [\tau_z, \mathcal{G}(\epsilon', p')] \Big|_+ \mathbf{w}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \mathcal{G}(\epsilon, p) \tau_z J_x \mathcal{G}(\epsilon - \Omega, p), \quad (1.60)
\end{aligned}$$

и в них появляются дополнительные множители $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = U^+(p)U(p')$, “сидящие” на кулоновских линиях. Подразумевается, что $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ домножены на единичную матрицу в пространстве Келдыша (в киральном пространстве $U^+(p)U(p')$ - матрицы 2×2 , в пространстве Келдыша - числа).

После взятия в матричном произведении (1.59) $-+$ элемента в пространстве Келдыша, в киральном базисе (A, B, C даются уравнением (1.60)) получаем:

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_{sH}(\Omega) &= \frac{\epsilon}{2V\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \left\{ \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{d\epsilon'}{2\pi} \text{Tr} [J_y^z(p) \mathbf{a} G^A(\epsilon)] + \right. \\
&+ \left. \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr} [J_y^z(p) G^R(\epsilon - \Omega) \mathbf{b} G^A(\epsilon) - G^R(\epsilon) \mathbf{c} G^A(\epsilon + \Omega) J_y^z(p)] \right\} U(|\vec{p} - \vec{p}'|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left[N(p), G^R(\epsilon - \Omega) \mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [N(p'), G^R(\epsilon' - \Omega) J_x(p')] \Big|_- G^A(\epsilon') \mathbf{w}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \right] \Big|_-, \\
\mathbf{b} &= J_x(p) [G^R(\epsilon) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), N(p)] \Big|_- + [J_x(p) G^A(\epsilon), N(p)] \Big|_- \mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \\
\mathbf{c} &= \mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [N(p), G^R(\epsilon) J_x(p)] \Big|_- + [N(p), \mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') G^A(\epsilon)] \Big|_- J_x(p),
\end{aligned} \quad (1.61)$$

где взят интеграл по ϵ' для диаграмм B и C: матричное произведение $\frac{1}{2} [\tau_z, \hat{G}(\epsilon', p')] \Big|_+$, после интегрирования по ϵ' - диагональная в пространстве Келдыша матрица $\text{diag}(iN(p'), -iN(p'))$, поскольку $\int \frac{d\epsilon}{2\pi} (G^A(\epsilon, p) - G^R(\epsilon, p)) = iN(p)$. В уравнении (1.61) введено обозначение $\mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = U^+(p)U(p')N(p')U^+(p')U(p)$. Заметим, что в уравнении (1.61) и функции Грина, и функции распределения, и операторы тока записаны в киральном базисе³: $G^{R,A} = \text{diag}(G_+^{(R,A)}, G_-^{(R,A)})$, $G_\lambda^{(R,A)}(\epsilon) = G_\lambda^{(R,A)}(\epsilon, p) =$

³Если, например, выражение \mathbf{a} в уравнении (1.61) записать в спиновом базисе, то в нем не будет

$1/(\epsilon - p^2/2m + \lambda\alpha p \pm i0)$ (уравнение (1.11)), $N(p) = \text{diag}(N_+(p), N_-(p))$; операторы токов в киральном базисе:

$$\begin{aligned}\hat{j}_\nu^{(ch)} &= \frac{p_\nu}{p} \left(\frac{p}{m} - \alpha \hat{\sigma}^z \right) + \frac{p_\mu}{p} \hat{\sigma}^y \epsilon^{z\mu\nu}, \\ \hat{j}_y^z &= \frac{p_y}{m} \hat{\sigma}^x,\end{aligned}\tag{1.62}$$

получены поворотом $\hat{j}^{(ch)} = U^+ \hat{j}^{(sp)} U$ операторов тока в спиновом базисе $\hat{j}^{(sp)}$, уравнения (1.40, 1.41).

При преобразовании выражений **b** и **c** в уравнении (1.61) мы воспользовались равенством $N(p)G^{R,A}(\epsilon) = G^{R,A}(\epsilon)N(p)$: в киральном базисе функции Грина и функции распределения коммутируют.⁴

Первая диаграмма *A* раскладывается на произведение левой и правой части, зависящих соответственно от энергий ϵ и ϵ' : интегралы по ϵ, ϵ' в обеих частях берутся независимо.

Взятие Tr и вычисление интегралов в (1.61) в пределе $\Omega \rightarrow 0$ приводит к следующему результату для поправки к статической проводимости:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{sH} &= \\ &-e \int \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\vec{p}'}{(2\pi)^2} \delta N(p) \delta N(p') U(|\vec{p} - \vec{p}'|) F(\vec{p}, \vec{p}').\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\delta N(p) &= N_+(p) - N_-(p) \text{ и} \\ F(\vec{p}, \vec{p}') &= \frac{\cos(\varphi - \varphi') \{-p^2 + pp' \cos(\varphi - \varphi')\}}{8m\alpha^2 p^2 p'^2},\end{aligned}\tag{1.63}$$

где $N_\pm(p)$ - функции распределения на двух Ферми-окружностях различных киральностей. Для нулевой температуры $N_\pm(p) = \theta(-p + p_{F\pm})$. Наш результат множителей $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, и функции Грина будут недиагональны и будут даваться формулами (1.12, 1.13), операторы токов - формулами (1.40, 1.41) (спиновый базис).

⁴Две нижние диаграммы *B* и *C* на Рис. 1.4 подобны, если их обходить в противоположных направлениях. Соответствующие им вклады в уравнении (1.61) также подобны, если их считать в противоположных направлениях, с точностью до замены опережающих функций Грина на запаздывающие. Вычисление вкладов *B* и *C* дает одинаковое значение.

тат (1.63) согласуется с результатом [21]. Выражение в фигурных скобках в уравнении (1.63) разбивается на сумму трех слагаемых: $p^2 + pp' \cos(\varphi - \varphi')$, $-p^2$, $-p'^2$, соответствующих вкладам соответственно от диаграмм A, B, C .

Явное интегрирование по импульсам в выражении (1.63) было выполнено для малого спин-орбитального взаимодействия $\alpha/v_F \ll 1$ в двух предельных случаях: короткодействующего двухчастичного взаимодействия (потенциал Кулона, экранированный на длине κ^{-1} , меньшей чем межэлектронное расстояние), и полного дальнедействующего кулоновского взаимодействия. В Фурье-пространстве эти потенциалы взаимодействия записываются как $U_1(|\vec{p} - \vec{p}'|) = \frac{2\pi e^2}{\kappa\epsilon}$ и $U_2(|\vec{p} - \vec{p}'|) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon|\vec{p} - \vec{p}'|}$. Окончательные выражения для σ_{sH} в этих двух случаях следующие:

$$\sigma_{sH}^{(\text{short})} = \frac{e}{4\pi\hbar} \left[1 - \frac{me^2}{2\epsilon\kappa} \right] \quad (1.64)$$

для точечного потенциала, и

$$\sigma_{sH}^{(\text{Coulomb})} = \frac{e}{4\pi\hbar} \left[1 - \frac{2me^2}{3\pi\epsilon p_F} \right] \quad (1.65)$$

для потенциала Кулона; через ϵ обозначена диэлектрическая проницаемость. Заметим, что поправка к спин-холловской проводимости не зависит от спин-орбитальной константы α (в уравнении (1.65) поправками порядка $(\alpha/v_F)^2 \ll 1$ пренебрегли), и пропорционально стандартному параметру кулоновского взаимодействия $e^2/\epsilon\hbar v_F$.

Для полноты мы посчитали три диаграммы, подобные показанным на Рис. (1.4), соответствующие поправке от взаимодействия к продольной восприимчивости. Мы нашли, что относительные поправки к продольной восприимчивости совпали с выражениями (1.64, 1.65), в согласии с общим соотношением (1.2).

1.4 Выводы

Мы обобщили результат Inoue и др. [4] $\sigma_{sH} = 0$ для случая произвольной дисперсии электронов, произвольной силы беспорядка и произвольной зависимости скорости Рашбы от импульса $\alpha(p)$, что значительно расширяет его диапазон применимости. В частности, мы нашли, что исчезновение спин-холловской проводимости в объемных образцах с примесями не ограничено случаем равных Ферми-скоростей на разных киральных ветвях. Наш результат (1.24), согласуется с [5, 6, 7]. Кроме того, мы нашли общие аргументы в пользу нулевой статической объемной спин-холловской проводимости в присутствии произвольного немагнитного беспорядка и произвольного сохраняющего спин электрон-электронного взаимодействия.

В разделе 1.3 мы показали, что зависящая от частоты спин-холловская проводимость и Паули восприимчивость чистого взаимодействующего двумерного электронного газа пропорциональны друг другу, с коэффициентом пропорциональности, содержащим лишь зонную массу, фактор Ланде и магнетон Бора. Мы вычислили вызванную взаимодействием поправку первого порядка к спин-холловской проводимости и нашли, что она пропорциональна стандартному безразмерному параметру взаимодействия.

Эти результаты опубликованы в работе 2 (см. раздел “Работы, представленные на защиту”).

Мы ожидаем, что наши результаты для чистого электронного газа со спариванием Рашбы будут непосредственно применимы для субмикронных образцов с размером меньше чем упругая длина рассеяния. Влияние беспорядка на σ_{sH} в присутствии электрон-электронных взаимодействий было изучено в более поздней работе [21].

Глава 2

Фазовая диаграмма поверхностного сверхпроводника в продольном магнитном поле

2.1 Введение

В слоистых сверхпроводниках, а также в сверхпроводниках с кристаллической решеткой полярного типа возможно отсутствие центра инверсии. Свойства сверхпроводников без центра инверсии существенно зависят от спин-орбитального взаимодействия электронов. Недавно поступили сообщения об экспериментальных наблюдениях сверхпроводящих состояний, локализованных на поверхности металлов и даже диэлектриков. Островки поверхностной сверхпроводящей фазы наблюдались в поверхностно допированном кристалле $WO_3 : Na$ при критической температуре $T_c = 91.5K$ [25]. Спин-орбитальное взаимодействие на границе раздела, известное также как взаимодействие Рашбы, существенно модифицирует сверхпроводящее состояние. В обычных сверхпроводниках имеет место иерархия энергетических масштабов $\epsilon_F \gg \hbar\omega_D \gg T_c$, где ϵ_F - энергия Ферми, ω_D - Дебаевская частота, T_c - температура сверхпроводящего перехода. Спин-орбитальное взаимодействие характеризуется скоростью α и энергией в металле αp_F , где p_F - импульс

Ферми. Может быть как $\alpha p_F \gg T_c$, так и $\alpha p_F \ll T_c$. Второй случай слабого спин-орбитального взаимодействия был рассмотрен в работах [27, 28], однако на поверхности спин-орбитальное взаимодействие усилено скачком химического потенциала и αp_F может достигать значений $0.1eV$. Теория сверхпроводника при сильном спин-орбитальном взаимодействии была построена в статье Горькова и Рашбы [20]. Такое сверхпроводящее состояние должно обладать рядом необычных свойств благодаря тому, что на поверхности кристалла нарушена симметрия “верх-низ”; волновая функция конденсата является в этом случае смесью синглетной и триплетной волновой функции [27, 20]. При низких температурах восприимчивость Паули увеличена по сравнению с обычными сверхпроводниками [20]; парамагнитный предел в параллельном магнитном поле смещен в сторону намного более высоких значений поля благодаря возникновению неоднородного сверхпроводящего состояния [29], подобного предсказанному Ларкиным-Овчинниковым и Фульде-Феррелом [30, 31] (LOFF) для ферромагнитного сверхпроводника. Йип [32] предсказал необычные свойства такого сверхпроводника в параллельном магнитном поле, а именно существование сверхпроводящего тока перпендикулярного направлению поля и пропорционального полю. Все эти свойства вытекают из кирального расщепления спектра электронов на поверхности благодаря присутствию спин-орбитального члена Рашбы [1]; величина этого расщепления αp_F мала по сравнению с энергией Ферми, но может быть довольно большой по сравнению с другими энергиями в задаче. Задача о неоднородном состоянии в спин-орбитальном сверхпроводнике отличается от задачи Ларкина-Овчинникова в связи с тем, как магнитное поле меняет Ферми-поверхность. В LOFF задаче Ферми-поверхности, соответствующие спину вверх или спину вниз, увеличиваются или уменьшаются в радиусе; а в спин-орбитальном сверхпроводнике происходит параллельный перенос Ферми-поверхностей, что благоприятствует возникновению неоднородного

родного состояния. В работе [33], исходя из феноменологической модели, для спин-орбитального сверхпроводника была показана возможность существования состояния типа бегущей волны - киральная фаза. Возможность такого состояния была рассмотрена также в задаче Ларкина-Овчинникова, которые обнаружили, что оно не является сверхпроводящим, а сверхпроводящая плотность в нем обращается в ноль [30]. Как было показано [34], неоднородное состояние LOFF подавляется примесями, поэтому представляется интересным изучить влияние примесей на спин-орбитальную сверхпроводимость и неоднородное состояние. Линия перехода от нормального в сверхпроводящее состояние $T_c(h)$ была определена в [29]; однако переход между обычным однородным сверхпроводящим состоянием БКШ, существующем в низких магнитных полях и состоянием типа LOFF, возникающим в высоких полях изучен не был.

В этой Главе детально изучается фазовая диаграмма поверхностного сверхпроводника в параллельном магнитном поле h , исходя из микроскопической модели. Показано, что при достаточно низких (по сравнению с парамагнитным пределом) значениях поля $h \sim T_c/\mu_B$ поведение этой системы довольно сильно отличается от двумерной модели LOFF [36]. А именно, демонстрируется существование “кирального” состояния с параметром порядка $\Delta \propto \exp(\mathbf{Q}r)$ (где $\mathbf{Q} \perp \mathbf{h}$) и $Q \sim \mu_B h/v_F$ в значительной части фазовой диаграммы, которая изображена в итоге на Рис. 2.5. Мы доказали, что ток в основном состоянии равен нулю в противоречии с предсказаниями Йипа [32]. Мы доказали, что сверхпроводящая плотность всюду отлична от нуля в киральной фазе. Однако на границе раздела однородного БКШ и киральной фазы предсказывается возможность разрушения сверхпроводимости; изучена эволюция фазовой диаграммы в присутствии примесей. Как и в обычной LOFF фазе, примеси разрушают неоднородное состояние. Однако в подтверждение результатов Клемма и Лютера [35] найдено увеличение верхнего кри-

тического поля для однородного состояния БКШ.

2.2 Модель двумерного спин-орбитального сверхпроводника

На поверхности кристалла трансляционная симметрия понижена, а симметрия инверсии нарушена, даже если она присутствует в объеме. (Компонента импульса электрона \hat{p} , параллельная поверхности сохраняется благодаря существующей двумерной трансляционной симметрии.) В результате может появиться электрическое поле перпендикулярное поверхности. Спин электрона цепляется за это электрическое поле посредством релятивистского спин-орбитального взаимодействия, известного в этом случае как взаимодействие Рашбы: $H_{so} = \alpha \left[\hat{\sigma} \times \hat{p} \right] \cdot \vec{n}$, где $\alpha > 0$ - константа спин-орбитального взаимодействия, имеющая размерность скорости, \vec{n} , - единичный вектор, перпендикулярный к поверхности, $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z)$ - матрицы Паули. Это взаимодействие явно нарушает симметрию инверсии. Оператор спина электрона не коммутирует с оператором Рашбы, таким образом проекция спина не есть хорошее квантовое число. С другой стороны, оператор киральности $[\hat{\sigma} \times \hat{e}] \cdot \vec{n}$ коммутирует с гамильтонианом; здесь $\hat{e} = \hat{p}/p$ - оператор направления импульса, которому соответствует собственное число $\vec{e}_p = (\cos \varphi_p, \sin \varphi_p)$, где φ_p - угол между импульсом электрона и осью x . Собственное значение оператора киральности $\lambda = \pm 1$ вместе с импульсом электрона составляют квантовые числа электронного состояния (\vec{p}, λ) . Член Рашбы сохраняет двукратное вырождение, и состояния электрона (\vec{p}, λ) и $(-\vec{p}, \lambda)$ имеют одинаковую энергию.

В этой Главе мы рассматриваем самую простую модель поверхностного сверхпроводника: модель Горькова для двумерного металла со включенным членом Рашбы [20], в пределе $\alpha p_F \gg T_{co}$. Гамильтониан, написанный в ко-

ординатном представлении, имеет вид

$$\hat{H} = \int \psi_{\alpha}^{+}(\vec{r}) \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} \delta_{\alpha\beta} + \alpha \left[\hat{\vec{\sigma}}_{\alpha\beta} \times \hat{P} \right] \cdot \vec{n} - g\mu_B \vec{h} \cdot \hat{\vec{\sigma}}_{\alpha\beta} \right) \psi_{\beta}(\vec{r}) d^2r - \frac{U}{2} \int \psi_{\alpha}^{+} \psi_{\beta}^{+} \psi_{\beta} \psi_{\alpha} d^2r, \quad (2.1)$$

где m - масса электрона; α, β - спиновые индексы; $\hat{P} = -i\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})$ - оператор импульса электрона в присутствии бесконечно малого вектор-потенциала в плоскости $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Мы включили в гамильтониан Зеемановское взаимодействие с однородным внешним магнитным полем \vec{h} , параллельным поверхности, и считаем, что \vec{h} направлено по оси x . Вектор-потенциал поля в плоскости может быть выбран имеющим только z -компоненту поэтому он выпадает из члена для кинетической энергии двумерного электрона. μ_B - магнетон Бора, g - фактор Ланде. Ниже везде мы используем обозначение $H = g\mu_B h$. Волновая функция электрона может быть разложена по базису плоских волн: $\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}} a_{\alpha}(\vec{p})$, и одночастичная часть гамильтониана (2.1) в импульсном представлении может быть написана как сумма \hat{H}_0 и \hat{H}_{em} :

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{p}} a_{\alpha}^{+}(\vec{p}) \left(\frac{p^2}{2m} \hat{1} + \alpha \left[\hat{\vec{\sigma}}_{\alpha\beta} \times \vec{p} \right] \cdot \vec{n} - \vec{H} \cdot \hat{\vec{\sigma}}_{\alpha\beta} \right) a_{\beta}(\vec{p}) \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_{em} = \sum_{\vec{p}} a_{\alpha}^{+}(\vec{p}) \left(-1/c \hat{j} \vec{A} \right) a_{\beta}(\vec{p}).$$

здесь \hat{j} - оператор тока в спиновом представлении:

$$\hat{j} = -e(\vec{p}/m + \alpha[\hat{\vec{\sigma}} \times \vec{n}]) - \frac{e^2}{2mc} \vec{A}. \quad (2.3)$$

\hat{H}_0 может быть диагонализирован преобразованием $a_{\alpha}(\vec{p}) = \eta_{\lambda\alpha}(\vec{p}) \hat{a}_{\lambda\mathbf{p}}$ с двухкомпонентным спинором

$$\eta_{\lambda}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda \exp(i\varphi_{\mathbf{p}}(H)) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$\varphi_{\mathbf{p}}(H) = \arcsin \frac{\alpha p_y - H}{\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2}}, \quad (2.5)$$

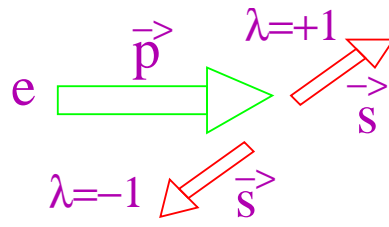


Рис. 2.1: Киральность $\lambda = \pm 1$ соответствует повороту спина электрона перпендикулярно вправо и перпендикулярно влево от направления импульса электрона.

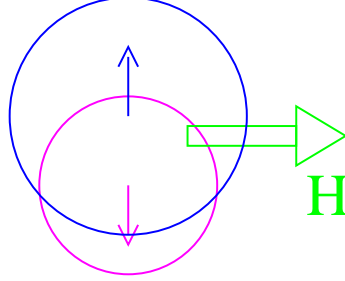


Рис. 2.2: При приложении слабого внешнего магнитного поля $H \ll \alpha p_F$ вдоль оси x , две Ферми-окружности, соответствующие двум киральным ветвям $\lambda = \pm 1$, смещаются в противоположных y -направлениях на величину $Q = \pm H/v_F$. В меру параметра α/v_F окружность, соответствующая одной киральности, больше, чем соответствующая другой.

является модификацией угла $\varphi_{\mathbf{p}}$ в присутствии продольного магнитного поля. Собственные значения гамильтониана (2.2), соответствующие киральностям $\lambda = \pm 1$ имеют вид

$$\epsilon_{\lambda}(\vec{p}) = p^2/2m - \lambda \sqrt{\alpha^2 |\mathbf{p}|^2 - 2\alpha p_y H + H^2}, \quad (2.6)$$

и следовательно, состояния электронов с одинаковым импульсом, но принадлежащим разным $\lambda = \pm 1$ Ферми-окружностям, энергетически разделены величиной $2\alpha p_F$, с радиусом $p_F = \sqrt{2m\mu + m^2\alpha^2} \pm m\alpha$, где $\mu \gg m\alpha^2$ - химический потенциал, см. Рис. 2.1. Плотности состояния на двух Ферми-окружностях почти одинаковы, $\nu_{\pm} = \frac{m}{2\pi} \left(1 \pm \frac{\alpha}{v_F}\right)$, и здесь мы пренебрегаем различием $\nu_+ - \nu_-$. Когда прикладывается слабое внешнее магнитное поле $H \ll \alpha p_F$ вдоль оси x , эти две Ферми-окружности смещаются в противоположных y -направлениях на величину $Q = \pm H/v_F$, как показано на Рис. 2.2.

Двухчастичный гамильтониан взаимодействия в (2.1) в импульсном пред-

ставлении имеет вид:

$$-\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} a_{\alpha\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^+ a_{\beta-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^+ a_{\beta-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2} a_{\alpha\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2}, \quad (2.7)$$

и может быть упрощен в киральном базисе (2.4) в предположении $H \ll \alpha p_F \ll \mu$. В длинноволновом пределе $q \ll p_F$ он может быть факторизован следующим образом:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{U}{4} \sum_{\mathbf{q}} \hat{A}^+(\vec{q}) \hat{A}(\vec{q}), \quad (2.8)$$

где

$$\hat{A}(\vec{q}) = \sum_{\mathbf{p}\lambda} \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} a_{\lambda\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \quad (2.9)$$

есть оператор уничтожения пары.

Для того, чтобы вычислить термодинамический потенциал $\Omega = -T \ln Z$, мы используем технику функционального интегрирования во мнимом времени по Грассмановым электронным полям $a_{\lambda,\mathbf{p}}, \bar{a}_{\lambda,\mathbf{p}}$ и вводим дополнительное комплексное поле $\Delta(\mathbf{r}, \tau)$, расщепляющее член H_{int} , [38]. Эффективный Лагранжиан имеет вид:

$$L[a, \bar{a}, \Delta, \Delta^*] = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \bar{a}_{\lambda\mathbf{p}} (\partial_\tau - \epsilon_\lambda(\vec{p})) a_{\lambda\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{q}} \left[-\frac{|\Delta_{\mathbf{q}}|^2}{U} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\lambda} (\Delta_{\mathbf{q}} \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \bar{a}_{\lambda,\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \bar{a}_{\lambda,-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + \Delta_{\mathbf{q}}^* \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda,-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} a_{\lambda,\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) \right]. \quad (2.10)$$

Термодинамический потенциал $\Omega = -T \ln Z$ описывает систему в равновесии, где Z - статистическая сумма. Мы выражаем Ω как предел производящего функционала $\Omega = \Omega[\eta, \bar{\eta}]|_{\eta \rightarrow 0}$:

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{\Omega[\eta, \bar{\eta}]}{T} \right) &= \int \mathcal{D}\Delta \mathcal{D}\Delta^* \exp \left(-\frac{\Omega[\eta, \bar{\eta}, \Delta, \Delta^*]}{T} \right) = \\ &= \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\bar{a} \mathcal{D}\Delta \mathcal{D}\Delta^* \exp \left(\int_0^{1/T} [L[a, \bar{a}, \Delta, \Delta^*] d\tau + \right. \\ &+ \left. \int (\bar{\eta}(\tau\mathbf{r}) a(\tau\mathbf{r}) + \bar{a}(\tau\mathbf{r}) \eta(\tau\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right] d\tau \right). \quad (2.11) \end{aligned}$$

Ниже мы будем работать в приближении среднего поля, которое управляется малостью параметра Гинзбурга G_i . Для чистого двумерного сверхпроводника $G_i \sim T_c/E_F$ и может рассматриваться как маленькое, хотя и не пренебрежимое (мы обсуждаем флуктуационные эффекты в последнем разделе данной Главы).

Средне-полевое приближение эквивалентно приближению седловой точки для функционального интеграла по Δ и Δ^* (первое уравнение в (2.11)), таким образом мы будем изучать минимум функционала $\Omega[\Delta, \Delta^*]$, появляющегося после Гауссова интегрирования по Грассмановым полям:

$$\frac{\delta\Omega[\Delta, \Delta^*]}{\delta\Delta(\tau\mathbf{r})} = 0, \quad (2.12)$$

известное также как уравнение самосогласования. (Другими словами, в средне-полевым приближении первое уравнение в (2.11) ограничено окрестностью глобального минимума термодинамического потенциала $\Omega[\Delta, \Delta^*] = \Omega[\eta, \bar{\eta}, \Delta, \Delta^*]|_{\eta \rightarrow 0}$ относительно $\Delta(\mathbf{r})$.)

Далее используем метод функций Грина. Электронная функция Грина определяется как вариационная производная производящего функционала:

$$G(\tau\mathbf{r}, \tau'\mathbf{r}') = \frac{\delta\Omega[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}(\tau\mathbf{r})\delta\eta(\tau'\mathbf{r}')}|_{\eta \rightarrow 0}. \quad (2.13)$$

2.3 Сверхпроводящий фазовый переход

Вблизи фазового перехода из нормального металла в сверхпроводящее состояние параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ всюду мал на двумерной плоскости. Поэтому термодинамический потенциал Ω может быть разложен по степеням $\Delta(\mathbf{r})$ и его градиентам. Это разложение известно как функционал Гинзбурга-Ландау. Как показали Горьков и Барзыкин [29], основное состояние может быть неоднородным в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Соответственно мы рассматриваем параметр порядка как суперпозицию ко-

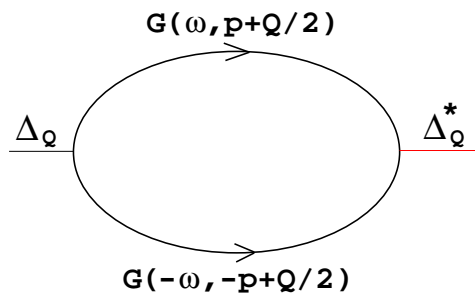


Рис. 2.3: Куперовская петля с проходящим импульсом Q . Возникновение неоднородного сверхпроводящего состояния.

нечного числа гармоник:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_i \Delta_{\mathbf{Q}_i}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{Q}_i \mathbf{r}), \quad (2.14)$$

где амплитуды $\Delta_{\vec{Q}_i}(\mathbf{r})$ - медленно меняющиеся в двумерном пространстве функции. В основном состоянии параметр порядка может быть с ненарушенной пространственной четностью, если $\Delta(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r}') = \Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r})$, и с нарушенной пространственной четностью и симметрией по обращению времени в противном случае. Соответствующий функционал Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_{sn} = & \int \left[\sum_i \alpha_{Q_i Q_i} |\Delta_{\mathbf{Q}_i}(\vec{r})|^2 + \right. \\ & \sum_{ijkl} \beta_{Q_i Q_j Q_k Q_l} \Delta_{\mathbf{Q}_i}(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_j}^*(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_k}(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_l}^*(\vec{r}) \delta_{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_l} + \quad (2.15) \\ & \sum_i c_{Q_i Q_i}^x \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2e}{c} A_x(\vec{r}) \right) \Delta_{\vec{Q}_i}(\vec{r}) \right|^2 + \\ & \left. c_{Q_i Q_i}^y \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2e}{c} A_y(\vec{r}) \right) \Delta_{\vec{Q}_i}(\vec{r}) \right|^2 \right] d^2 \vec{r}. \end{aligned}$$

В коэффициент α_{QQ} входит интеграл от Куперовской петли с переданным импульсом Q , которая показана на Рис. 2.3; а коэффициенты β_{QQQQ} и β_{QQ-Q-Q} даются интегралами, соответствующими четырехвершинным петлевым диаграммам (показанным на Рис. 2.4):

$$\alpha_{QQ} = \frac{1}{U} - \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda, \vec{p}} G_\lambda(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2) G_\lambda(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2); \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\beta_{QQQQ} &= T \sum_{\omega \vec{p} \lambda} G_{\lambda}^2 \left(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2 \right) G_{\lambda}^2 \left(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2 \right), \\ \beta_{QQ-Q-Q} &= T \sum_{\omega \vec{p} \lambda} G_{\lambda}^2 \left(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2 \right) G_{\lambda} \left(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) G_{\lambda} \left(-\omega, -\vec{p} - 3\vec{Q}/2 \right),\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$c_{QQ}^{\mu} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q_{\mu}^2} \alpha(Q \vec{e}_y + q_{\mu} \vec{e}_{\mu}),\tag{2.18}$$

где функция Грина нормального состояния электрона во внешнем магнитном поле $H \ll \alpha p_F$ в плоскости есть

$$G_{\lambda}(\omega, \vec{p}) = \frac{1}{i\omega - \xi - \lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}}},\tag{2.19}$$

здесь считаем, что дисперсия квазичастицы $\xi = p^2/2m - \lambda \alpha p_F - \mu$ мала по сравнению с αp_F . Интегралы по импульсам в (2.16) и (2.17) берутся в квазиклассическом приближении:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} = \nu(\epsilon_F) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi},\tag{2.20}$$

откуда получаем

$$\alpha_{QQ} = \frac{1}{U} - \pi \nu(\epsilon_F) T \max_Q \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + H_{\lambda}^2}},\tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\beta_{QQQQ} &= \frac{\nu(\epsilon_F)}{4} \pi T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{2\omega^2 - H_{\lambda}^2}{(\omega^2 + H_{\lambda}^2)^{5/2}}; \\ \beta_{QQ-Q-Q} &= \frac{\nu(\epsilon_F)}{2} \pi T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{(2\omega^2 + H_{\lambda}^2)}{\omega^2 (\omega^2 + H_{\lambda}^2)^{3/2}} \frac{H_{\lambda}}{v_F Q},\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}c_{QQ}^x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{v_F}{2} \right)^2 \pi \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega, \lambda} \frac{1}{(\omega^2 + H_{\lambda}^2)^{3/2}}, \\ c_{QQ}^y &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_F}{2} \right)^2 \pi \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega, \lambda} \frac{2H_{\lambda}^2 - \omega^2}{(\omega^2 + H_{\lambda}^2)^{5/2}},\end{aligned}\tag{2.23}$$

где $H_{\lambda} = \lambda H + v_F Q/2$. Заметим, что $\beta_{QQQQ} = \beta_{-Q-Q-Q-Q}$ - коэффициенты, стоящие соответственно перед членами $|\Delta_Q|^4$ и $|\Delta_{-Q}|^4$ в функционале

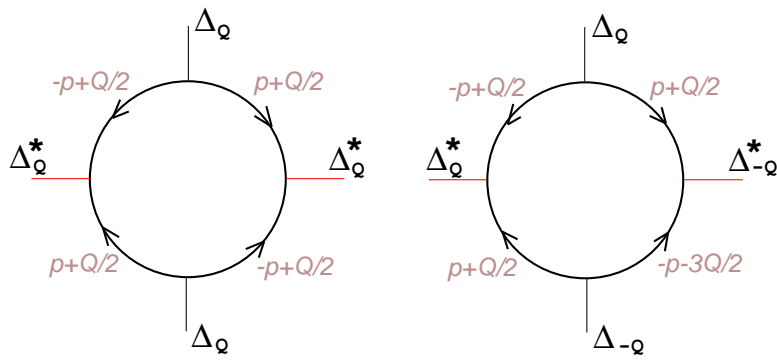


Рис. 2.4: Диаграммы, соответствующие членам четвертого порядка по Δ в разложении Гинзбурга-Ландау: $\beta_{QQQQ}|\Delta_Q|^4$ и $\beta_{QQ-Q-Q}|\Delta_Q|^2|\Delta_{-Q}|^2$.

Гинзбурга-Ландау(2.15); коэффициент, стоящий перед членом $|\Delta_Q|^2|\Delta_{-Q}|^2$ в (2.15) - это сумма четырех равных по величине коэффициентов $\beta_{QQ-Q-Q} = \beta_{Q-Q-QQ} = \beta_{-Q-QQQ} = \beta_{-QQQ-Q}$.

Условие $\alpha_{QQ} = 0$ определяет линию перехода второго рода (если $\beta_{QQQQ} > 0$) между нормальным металлом и сверхпроводником:

$$\frac{1}{U} = \nu(\epsilon_F)T \max_Q \sum_{\omega>0, \lambda} \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + (\lambda H + v_F Q/2)^2}}. \quad (2.24)$$

Для разных значений H , максимум по Q в правой части уравнения (2.24) достигается либо на $Q = 0$, либо на отличном от нуля $Q = \pm|Q|$. Положение $T_c(H)$ линии, найденное численным решением уравнения (2.24), показано на Рис. 2.5, на котором и температура T_c и магнитное поле H в плоскости нормированы критической температурой в нулевом магнитном поле: $T_{c0} = 2\omega_D \exp(-1/\nu U + \gamma)/\pi$, где $\gamma = 0.577$ - постоянная Эйлера. Линии $T_c(H)$ соответствуют две асимптотики, найденные в [29]:

$$\log \frac{T_c(H)}{T_{c0}} = -\frac{7\zeta(3)H^2}{8\pi^2 T_{c0}^2} \quad \text{при } H/T_{c0} \rightarrow 0;$$

$$\frac{T_c(H)}{T_{c0}} = \frac{\pi T_{c0}}{2e^\gamma H} - \frac{H}{4\alpha\rho_F} \quad \text{при } H/T_{c0} \gg 1, \quad H/(\alpha\rho_F) \ll 1. \quad (2.25)$$

Последняя асимптотика получена при учете следующего малого члена по H в знаменателе функции Грина (2.19) $H^3/(\alpha\rho_F)^2$, и из нее следует значение верхнего критического поля $H_{c2} = \sqrt{2\Delta(0)\alpha\rho_F}$. Точка Лифшица \mathcal{L} отделяет

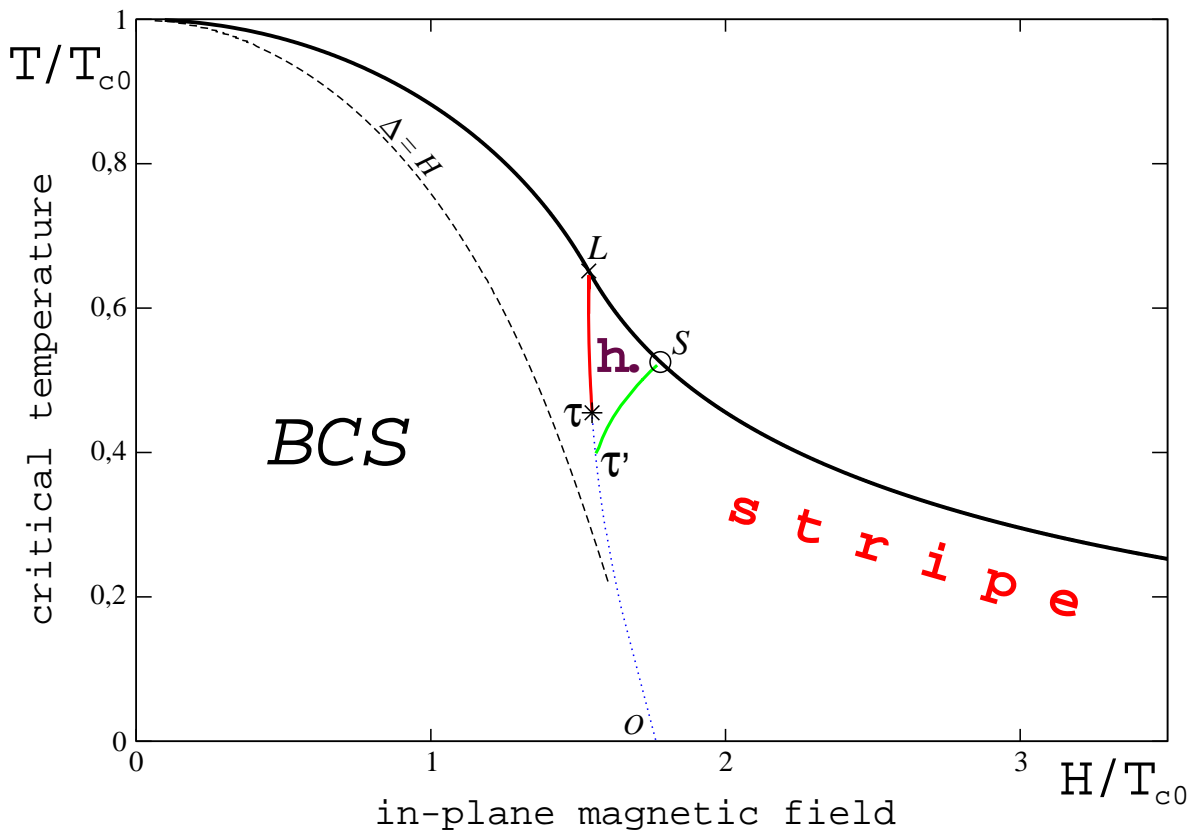


Рис. 2.5: Линия сверхпроводящего фазового перехода $T_c(H)$ (жирная) и две линии фазового перехода второго рода в чистом случае: \mathcal{LT} линия между однородным и “киральным” состоянием и линия устойчивости “кирального” состояния \mathcal{ST}' . “Киральное” состояние помечено буквой **h.** (“helical”). Пунктирная линия отделяет от области “бесцелевой” сверхпроводимости. Точечная линия обозначает границу устойчивости БКШ состояния.

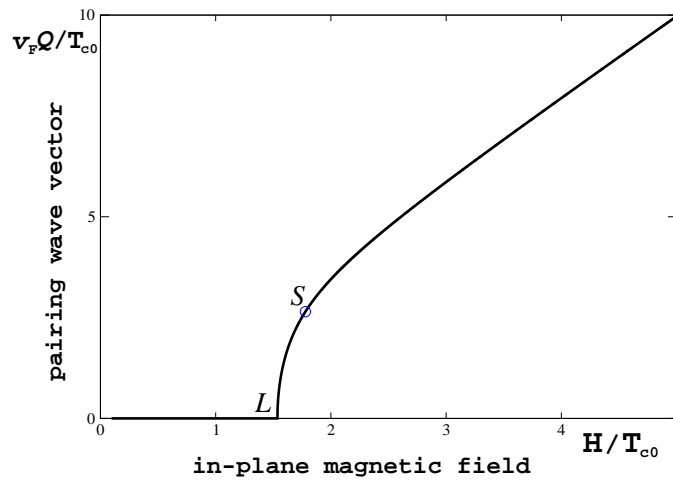


Рис. 2.6: Волновой вектор Куперовской пары Q на линии $T_c(H)$. Кругом обозначена симметричная точка \mathcal{S} .

решения с $Q = 0$ и $Q \neq 0$ на линии $T_c(H)$, а также конец фазового перехода второго рода между двумя сверхпроводящими фазами. Координаты \mathcal{L} точки $(H_L, T_L) = (1.536, 0.651)T_{c0}$. Так как α_{QQ} (Eq.(2.21)) симметрично по замене $-Q \rightarrow Q$, оно всегда имеет экстремум в точке $Q = 0$. Поэтому аналитически точка Лифшица \mathcal{L} может быть определена как точка, где этот экстремум меняется с \max на \min при понижении температуры:

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_{QQ}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} = 0,$$

Это условие дает отношение $H_L/T_L \approx 2.36$, которое согласуется с отношением значений для H_L и T_L , найденных через численное решение (2.24).

На Рис. 2.6 показан волновой вектор Куперовской пары Q на линии $T_c(H)$ как функция магнитного поля H в плоскости. Этот волновой вектор является параметром порядка вблизи \mathcal{L} точки: $v_F Q(H) \sim \sqrt{H^2 - H_L^2}$. Мы находим асимптотику

$$v_F Q = 2H - \frac{\pi^4 T_{c0}^4}{7\zeta(3)e^{2\gamma} H^3} \quad \text{при } H/T_{c0} \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Обратим внимание, что $Q = 2H/v_F$ - вектор, на который разъезжаются две $\lambda = \pm 1$ Ферми-поверхности при приложении параллельного магнитного поля. Вблизи $T_c(H)$ линии коэффициент α может быть разложен:

$$\alpha(T, H) \approx \nu(\epsilon_F) \frac{T - T_c(H)}{2T} \sum_{\lambda} Y(T_c(H), H_{\lambda}), \quad (2.27)$$

где $Y(T, \Delta)$ - функция Йосиды, $\omega_n = \pi T(2n+1)$ - Мазубаровская частота. При $H > H_L$ ниже $T_c(H)$ линии возникает неоднородная сверхпроводящая фаза. Из вида (2.24) ясно, что чуть ниже $T_c(H)$ линии в $\Delta(\mathbf{r})$ входят не больше, чем две гармоники: $\Delta(y) = \Delta_+ e^{iQy} + \Delta_- e^{-iQy}$.

Ниже линии перехода $T_c(H)$ плотность термодинамического потенциала Ω в сверхпроводящем состоянии меньше, чем в нормальном, на величину

$$\Omega_{sn} = \alpha(T, H)|\Delta|^2 + \beta_s(T, H)|\Delta|^4 + \beta_a(T, H)(|\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2, \quad (2.28)$$

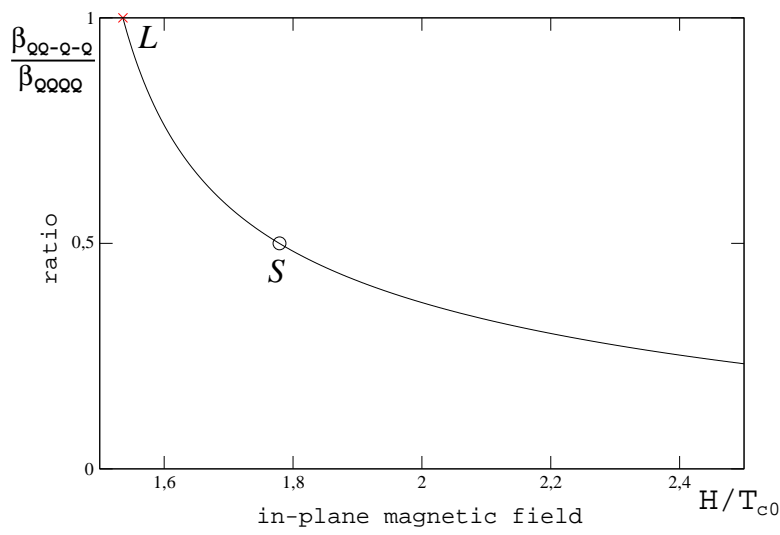


Рис. 2.7: Отношение коэффициентов β_{QQ-Q-Q} и β_{QQQQ} . В симметричной точке \mathcal{S} , обозначенной на рисунке кружком, это отношение равно $1/2$. В точке Лифшица \mathcal{L} отношение равно 1.

где $|\Delta|^2 = |\Delta_+|^2 + |\Delta_-|^2$. Уравнение (2.28) получено из (2.15), если в нем оставить только две гармоники и сделать замену $|\Delta_+|^2 = \Delta_{\mathbf{Q}}\Delta_{\mathbf{Q}}^*$, $|\Delta_-|^2 = \Delta_{-\mathbf{Q}}\Delta_{-\mathbf{Q}}^*$; коэффициенты $\beta_{s,a}$ составлены из интегралов (2.22) для четырехвершинных петлевых диаграмм:

$$\beta_s(T, H) = \beta_{QQQQ}/2 + \beta_{QQ-Q-Q}; \quad (2.29)$$

$$\beta_a(T, H) = \beta_{QQQQ}/2 - \beta_{QQ-Q-Q};$$

В симметричной точке \mathcal{S} , определяемой условием $\beta_a(T_c(H), H) = 0$, свободная энергия (2.28) зависит только от $|\Delta|^2$ и инвариантна относительно $U(2)$ вращений спинора параметра порядка (Δ_+, Δ_-) . Координаты \mathcal{S} точки: $(H_S, T_S) = (1.779, 0.525)T_{c0}$, соответствующий волновой вектор в ней $v_F Q_S = 2.647T_c(0)$. При $H < H_S$ находимся в области $\beta_a < 0$, и минимум свободной энергии при $T < T_c(H)$ достигается либо на $\Delta_+ = 0$, либо на $\Delta_- = 0$, получаем “киральное” состояние. При $H > H_S$ - $\beta_a > 0$ и минимум свободной энергии достигается на $|\Delta_+| = |\Delta_-|$, то есть возникает фаза типа LOFF с $\Delta(y) \propto \cos(Qy)$, устойчивая в высоких магнитных полях, которую называем “полосатая структура”.

2.4 Свойства сверхпроводника вблизи симметричной точки

После преобразования растяжения координат $x = x\sqrt{c_x/c_y}$ и $y = y\sqrt{c_y/c_x}$ (при котором площадь сохраняется), в симметричной точке функционал Гинзбурга-Ландау примет вид

$$F_s - F_n = \int d^2\mathbf{r} \left(\sqrt{c_x c_y} (|\partial_\mu \Delta_+|^2 + |\partial_\mu \Delta_-|^2) + \beta_s (\Delta_0^2 - |\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2 - \beta_s \Delta_0^4 \right), \quad (2.30)$$

где $\Delta_0^2 = -\frac{\alpha}{2\beta_s}$ есть равновесное значение параметра порядка. Член четвертого порядка в GL (2.28) может быть разделен на симметричную и анизотропную часть: $\beta_a(T, H)(|\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2$, и в симметричной точке коэффициент $\beta_a(T_S, H_S) = 0$. Коэффициенты c_x, c_y даются выражениями (2.23), и их отношение в точке \mathcal{S} равно $c_x/c_y = 1.7232$. Минимум энергии (2.30) достигается в однородном состоянии при условии $|\Delta_+|^2 + |\Delta_-|^2 = \Delta^2$. Если $z_1 = \Delta_+/\Delta$ и $z_2 = \Delta_-/\Delta$, то в симметричной точке спинор параметра порядка (z_1, z_2) ($|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$) пробегает сферу S^3 и эквивалентен четырех-компонентному вектору $\vec{\mathcal{N}}$. Градиентная часть энергии Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} n_s \int (\partial_\mu \vec{\mathcal{N}})^2 d^2\vec{r}. \quad (2.31)$$

Уравнение ренорм-группы на заряд $\left(\frac{\hbar^2}{2m} n_s\right)^{-1}$ для N -компонентного единичного поля было найдено Поляковым [39] и для нашего случая $N = 4$ имеет вид:

$$\frac{dn_s}{dx} = -\frac{4Tm}{\pi\hbar^2} \quad (2.32)$$

где $x = \log(L/\xi)$. Анизотропия $\beta_a(T, H)(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2 - \mathcal{N}_3^2 - \mathcal{N}_4^2)^2$ подчиняется РГ уравнению:

$$\frac{d\beta_a}{dx} = -\frac{8Tm}{\pi\hbar^2 n_s} \beta_a \quad (2.33)$$

Уравнение ренорм-группы справедливо до масштаба $L_{anis}^2 = \xi^2 T_c^2 \beta_s / (\Delta^2 \beta_a)$.

Таким образом находим

$$n_s = n_s^0 - \frac{2Tm}{\pi\hbar^2} X, \quad (2.34)$$

где

$$X = \log \left(\frac{1}{1 - T/T_c} \frac{\beta_s}{\beta_a} \right) \quad (2.35)$$

Перенормировка коэффициента β_s пренебрежимо мала, поскольку флуктуации продольной компоненты Δ малы. Анизотропия перенормируется как

$$\beta_a = \beta_a^0 \left(1 - \frac{4Tm}{\pi\hbar^2 n_s^0} X \right)^4. \quad (2.36)$$

Изучим возможность точечных дефектов в параметре порядка. Градиентная энергия физического дефекта должна быть конечна. Анизотропная энергия станет ∞ , если не удовлетворяется условие минимума на больших расстояниях от дефекта. Например левее симметричной точки \mathcal{S} имеем либо $|z_1| = 1$ либо $|z_2| = 1$. Это подмножество пространства вырождения параметра порядка, соответствующего анизотропной энергии, S^1 . Правее симметричной точки пространство вырождения параметра порядка, соответствующего анизотропной энергии, $S^1 \otimes S^1$. Напротив, в коре дефекта параметр порядка может принимать любое значение на пространстве вырождения S^3 симметрической части энергии.

В таком физическом случае наличие топологического дефекта определяется неединичными элементами группы гомотопии $\pi_2(S^3, S^1) = Z$ или $\pi_2(S^3, S^1 \otimes S^1) = Z \otimes Z$. Действительно, отображение, соответствующее физическому дефекту, это отображение диска с границей S^1 , которая соответствует далекой от дефекта области плоскости. Граница S^1 пространства R^2 отображается на подмножество S^1 вырождения анизотропной энергии из S^3 ($z_1 = e^{i\psi}$). А это есть относительная гомотопическая группа $\pi_2(S^3, S^1) = Z$. Если бы не было анизотропии, то любую конфигурацию параметра порядка на плоскости можно стянуть в однородное состояние, так как $\pi_2(S^3) = 0$.

В нашем случае на бесконечности направление спинора (z_1, z_2) фиксировано анизотропным членом в энергии, и значит нельзя стянуть дефект в точку.

Проекция Хопфа разделяет спинор параметра порядка $z \in S^3$ на вектор $\vec{n} = z^\dagger \hat{\sigma} z \in S^2$ сфере и общую фазу $\chi \in U(1)$. Общая фаза канонически сопряженная величина плотности электронов, а значит заряду. Напротив, вектор \vec{n} - нейтральное поле. Если запаараметризовать спинор параметра порядка как

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{i\chi} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

то для единичного вектора \vec{n} имеем параметризацию на сфере S^2 через углы Эйлера:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Тогда градиентная энергия (2.31) может быть представлена как сумма градиентной энергии \vec{n} -поля и кинетического члена:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2}{4m} n_s \int \partial_\mu z^\dagger \partial_\mu z \, d^2\vec{r} = \\ &= \frac{\hbar^2}{4m} n_s \int \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{n})^2 + \mathcal{A}_\mu^2 \right] d^2\vec{r}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где

$$\mathcal{A}_\mu = -i(z^\dagger \partial_\mu z - z \partial_\mu z^\dagger) = (\partial_\mu \chi - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \cos \theta). \quad (2.40)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что имеет место равенство

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{R^2} \vec{n} [\partial_x \vec{n} \times \partial_y \vec{n}] d^2\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\infty} \vec{\mathcal{A}} \cdot d\vec{l}. \quad (2.41)$$

Заметим, что правее точки \mathcal{S} , где анизотропия легкая плоскость и $\theta = \frac{\pi}{2}$, получаем $\delta\chi = 2\pi Q$, для топологического заряда $Q = 1$ общая фаза χ меняется на 2π при обходе по контуру вокруг дефекта.

Мы взяли пробное решение

$$z_1 = \frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{|R|^2 + r^2}}, \quad z_2 = \frac{R}{\sqrt{|R|^2 + r^2}}, \quad (2.42)$$

которому соответствует топологический заряд (2.41) $Q = 1$, и которое удовлетворяет граничным условиям левее симметричной точки ($\beta_a < 0$): на больших расстояниях выживает только одна компонента $z_1 = \frac{\Delta_+}{|\Delta|} = e^{i\varphi}$. Решение (2.41) двухпараметрическое: обладает произвольным параметром R , который можно домножить на любое комплексное число. Пробная функция (2.42) - это анзац Белавина-Полякова для нелинейной сигма-модели $\epsilon = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \vec{n})^2 d^2\vec{r}$, так называемая топологическая текстура скирмион с ненулевым индексом отображения сферы вырождения параметра порядка S^2 на реальную двумерную плоскость R^2 . Текстура доставляет нелинейной сигма-модели глобальный минимум в своем топологическом классе ввиду общего неравенства $\epsilon_{texture} \geq 4\pi Q$ (непосредственное вычисление показывает $\epsilon_{texture} = 4\pi Q$ и $Q = 1$).

Подчеркнем еще раз, что для нашей задачи (2.39) решение (2.42) не доставляет минимума, а является пробной функцией - соответствующей непрерывному вихрю с неразрушенной сверхпроводимостью в коре, пропускающему один квант потока. Мы находим энергию этого пробного непрерывного вихря:

$$\epsilon_{cont} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left(\log \lambda / L_{anis} + 0.5 + |\beta_a| L_{anis}^2 / \xi^2 \right), \quad (2.43)$$

где β_a - маленькая анизотропия, и сравниваем ее с энергией сингулярного вихря Абрикосова:

$$\epsilon_A \sim \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left(\log \frac{\lambda}{\xi} + 1.2 \right). \quad (2.44)$$

Сравнивая (2.43) и (2.44), видим, что при $|\beta_a| \ll 1$ а значит $L_{anis} \gg \xi$ энергия непрерывного вихря меньше энергии сингулярного на величину $\propto \log \frac{L_{anis}}{\xi} = \log \sqrt{\frac{\beta_s}{|\beta_a|}}$.

Энергия вихря, доставляющего глобальный минимум (2.30) в точке \mathcal{S} (если в последнем учесть и анизотропный член), еще ниже (2.43) и получается вариацией функционала ГЛ, и далее численным решением получающегося дифференциального уравнения. Таким образом, (2.43) - верхняя оценка для энергии непрерывного вихря в симметричной точке.

Анизотропия легкая плоскость. Правее точки \mathcal{S} параметр порядка есть $\vec{n} \cdot e^{i\chi}$, где χ - общая фаза. Пространство вырождения для вектора \vec{n} - это окружность S_1 (экватор сферы S_2); для общей фазы χ пространство вырождения тоже окружность. Если взять контур на реальной плоскости вокруг дефекта - вихря, то на этом контуре параметр порядка непрерывен:

1) обычный абрикосовский вихрь: $\vec{n}=\text{const}$, а χ меняется от 0 до 2π ;

2) дефект поля \vec{n} дисклинация: $\chi=\text{const}$, \vec{n} поворачивается от 0 до 2π ; никакого проникновения поля с этим вихрем не связано; он тоже имеет логарифмическую энергию.

3) полуквантовый вихрь: \vec{n} поворачивается от 0 до π и общая фаза χ поворачивается 0 до π при обходе по контуру вокруг дефекта. Эта конфигурация параметра порядка тоже непрерывная : $\vec{n}e^{i\chi} = -\vec{n}e^{i(\chi+\pi)}$, но поле \vec{n} и поле χ имеют разрыв вдоль линии разреза, начинающейся с дефекта в реальном пространстве. Физический же смысл имеет только поле $\vec{n} \cdot e^{i\chi}$. Заметим, что общая фаза χ набегаает в этом вихре на π , а значит, поток магнитного поля есть половинка от потока в вихре Абрикосова, поэтому-то он и “полуквантовый”. Полуквантовые вихри бывают 4 типов: вектор \vec{n} может вращаться на 180° как по часовой стрелке, так и против, и этому соответствует заряд $\pm 1/2$. Но и общая фаза может либо увеличиваться от 0° до 180° , либо уменьшаться от 0° до -180° при обходе вокруг вихря, и этому соответствует другой заряд $\pm 1/2$. Два вихря с противоположными обоими зарядами притягиваются и могут аннигилировать. Обычный непрерывный вихрь может распасться на два полуквантовых вихря с противоположными первыми зарядами (соответ-

ствующим \vec{n}), но одинаковыми вторыми зарядами (соответствующими фазе χ или токам).

Анизотропия легкая ось. Левее точки \mathcal{S} , когда параметр порядка или $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$, может быть доменная стенка, разделяющая области с $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$. Можно посчитать энергию доменной стенки на единицу ее длины, ответ порядка $\sqrt{c_x \beta_a}$. Такая доменная стенка была рассмотрена в [37] и было показано, что обычный одноквантовый вихрь будет садиться на доменную стенку. В центре доменной стенки параметр порядка принимает значения из подмножества S_1 экватора сферы. Отображение линии доменной стенки, т. е. S_1 на S_1 экватор характеризуется целым числом Z , - это и есть число квантов потока (со знаком) в вихрях притянутых на доменную стенку.

2.5 Фазовая диаграмма

Теперь мы сосредоточимся на свойствах “кирального” состояния значительно ниже $T_c(H)$, и получим местоположения линий фазовых переходов и линий устойчивости однородного и кирального состояний \mathcal{LT} , \mathcal{ST}' и \mathcal{TO} . Это вычисление возможно благодаря тому, что $|\Delta|^2 = \text{const}$ в “киральном” состоянии, и таким образом явно можно выписать аналитические уравнения, определяющие $|\Delta|$ и соответствующий Q глубоко внутри сверхпроводящего состояния. Термодинамический потенциал в “киральном” состоянии может быть вычислен:

$$\Omega_{hel} = \frac{\Delta^2}{U} - \nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega, \lambda} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2} - |\omega| \right) \frac{d\varphi}{2}, \quad (2.45)$$

а уравнения, определяющие $|\Delta|$ и Q определяются из стационарных условий:

$$\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \Delta} = \frac{2\Delta}{U} - \nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega, \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} &= -\frac{v_F}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda\omega} \int_0^{2\pi} i \frac{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi) \sin \varphi}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{d\varphi}{2} = \\ &= \frac{v_F}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda\omega} f(H_\lambda, \omega) = 0.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Интегралы по углу φ могут быть преобразованы к эллиптическим интегралам (подробнее см. Приложение А). После такого преобразования два стационарных условия для “киральной” фазы имеют вид:

$$\frac{1}{U} = 2\nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{\mathbf{K}(k)}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}}; \quad (2.48)$$

$$\sum_{\omega>0,\lambda} f(H_\lambda, \omega) = 0, \quad (2.49)$$

где модуль Якоби

$$k = \frac{2\sqrt{\Delta|H_\lambda|}}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}}; \quad (2.50)$$

функция $f(H_\lambda, \omega)$ выражается через полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$f(H_\lambda) = \frac{1}{H_\lambda} \left((\omega^2 + H_\lambda^2 + \Delta^2) \frac{\mathbf{K}(k)}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}} - \sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right). \quad (2.51)$$

При $\Delta = 0$ первое уравнение самосогласования (2.48) сводится к уравнению (2.24), определяющему сверхпроводящий фазовый переход, а второе стационарное условие (2.49) сводится к условию \max_Q для правой части уравнения (2.48).

Из термодинамического потенциала для “кирального” состояния (2.45) можно исключить зависимость от Δ при помощи уравнения (2.48). Тогда термодинамический потенциал станет функцией только Q , и при маленьком Q может быть разложен по степеням Q :

$$\Omega_{hel}(Q) = \Omega_{hel}(0) + aQ^2 + bQ^4 + cQ^6, \quad (2.52)$$

где $c > 0$,

$$a = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Q^2} = \left(\frac{v_F}{2} \right)^2 \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda, \omega} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta^2 \sin^2 \varphi}{((\omega + i\lambda H \sin \varphi)^2 + \Delta^2)^{3/2}} \frac{d\varphi}{2}, \quad (2.53)$$

$$b = \frac{d^4 E}{dQ^4} = \frac{\partial^4 \Omega}{\partial Q^4} - 3 \frac{\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \Delta \partial Q^2} \right)^2}{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Delta^2}}.$$

Условие $a = 0$, $b > 0$ определяет линию Лифшица \mathcal{LT} - линию перехода второго рода, которая оканчивается в точке \mathcal{T} , где коэффициент $b = 0$ меняет знак. Используя уравнения (2.48, 2.49), мы вычисляем координаты \mathcal{T} точки: $(H, T) = (1.547, 0.455)T_{c0}$. Ниже точки \mathcal{T} , при понижении температуры, $b < 0$ и имеет место переход первого рода из однородного состояния. Таким образом, точка \mathcal{T} - это критическая точка переходов второго рода, и, согласно [40], в этой точке кривая перехода второго рода должна смыкаться с кривой перехода первого рода без излома.

Однородный сверхпроводник, существующий при полях левее линии Лифшица, может стать бесщелевым при повышении температуры. Известно [13], что полюс функции Грина соответствует спектру квазичастицы: $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} - \lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}}$. Откуда видим, что не все пары имеют одинаковую энергию связи и минимальная энергия связи (энергетическая щель) может обратиться в ноль. Таким образом, при $H \geq \Delta$ имеем бесщелевую сверхпроводимость. Линия $H = \Delta$ - линия перехода в бесщелевую сверхпроводимость, - показана на Рис. 2.5 пунктиром.

Линия устойчивости \mathcal{LO} БКШ состояния может быть определена и другим способом, - вычислением вариации термодинамического потенциала при слабой статической модуляции параметра порядка вида $\delta \Delta(\vec{r}) = \Delta_{-q} \exp(-iqy) + \Delta_q \exp(iqy)$, где $q = v_F Q$ - маленький волновой вектор, на котором возникает неоднородное состояние (присутствие двух Фурье-гармоник в возмущении обязано четности по Q стационарных условий в киральной фа-

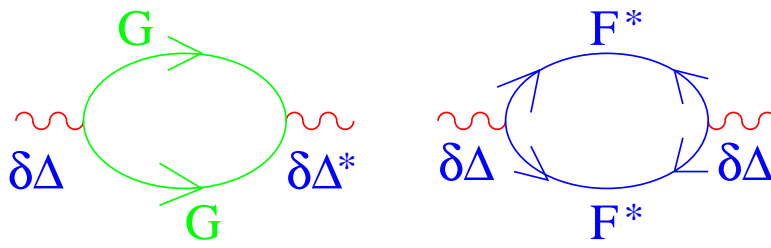


Рис. 2.8: Диаграммы, определяющие зависимость свободной энергии от $\delta\Delta_q$.

зе):

$$\delta\Omega_{\delta\Delta} = \vec{u}^+ \hat{\mathcal{C}}(q) \vec{u}, \quad (2.54)$$

где мы ввели спинор возмущения $\vec{u} = (\delta\Delta_{-q}, \delta\Delta_q^*)$, и “куперовскую матрицу”

$$\hat{\mathcal{C}}(q) = \frac{\hat{1}}{U} - \sum_{\omega > 0, \lambda, \mathbf{p}} \begin{pmatrix} G_\lambda(p - q/2)G_\lambda(-p - q/2) & F_\lambda(p - q/2)F_\lambda(-p - q/2) \\ F_\lambda^*(p - q/2)F_\lambda^*(-p - q/2) & G_\lambda(p + q/2)G_\lambda(-p + q/2) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

здесь функции Грина соответствуют основному БКШ состоянию:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{i\omega - \lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i\lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\ \mathcal{F}_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right) &= \frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i\lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} = \\ &= -\mathcal{F}_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Куперовские петли, соответствующие возмущению (2.54), показаны на Рис. 2.8.

Матрица $\hat{\mathcal{C}}$ имеет два собственных значения $\epsilon_2(q) > \epsilon_1(q)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(q) &= \frac{1}{U} - \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda} \nu(\epsilon_F) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2}} \frac{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2 - i\tilde{\omega} \frac{q}{2} \sin \varphi}{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2 + (\frac{q}{2} \sin \varphi)^2} \approx \\ &\approx \epsilon_1(0) + \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda} \nu(\epsilon_F) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{i\tilde{\omega}}{(\tilde{\omega}^2 + \Delta^2)^{3/2}} \frac{q}{2} \sin \varphi + \frac{1}{(\tilde{\omega}^2 + \Delta^2)^{3/2}} \left(\frac{q}{2} \sin \varphi \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

где введено обозначение $\tilde{\omega} = \omega + i\lambda H \sin \varphi$; во второй строчке сделано разложение до второй степени по q . Два собственных значения соответствуют

существованию двух типов возмущения,- продольных $\delta\Delta_q \sim \Delta$ и фазовых $\delta\Delta_q \sim i\Delta$:

$$\delta\Delta_q = \frac{\Delta}{|\Delta|} |\delta\Delta|_q + i\Delta\delta\varphi_q, \quad (2.58)$$

(мы создали маленькую неоднородность на фоне основного БКШ состояния $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$:

$$\Delta(\vec{r}) = (|\Delta| + |\delta\Delta|(\vec{r}))e^{i\varphi+i\delta\varphi(\vec{r})} \approx \Delta + \frac{\Delta}{|\Delta|} |\delta\Delta|(\vec{r}) + i\Delta\delta\varphi(\vec{r}).$$

Заметим, что $\delta\varphi$ - действительное, и $\delta\varphi_q = \int \delta\varphi e^{i\vec{q}\vec{r}} d^2\vec{r} = \delta\varphi_{-q}^*$.)

После взятия интеграла по $\varphi_{\mathbf{p}}$ в (2.57) получаем, что выполнено уравнение самосогласования для параметра порядка Δ (2.48) для $Q = 0$, а значит - статическая фазовая мода - бесщелевая:

$$\epsilon_1(q = 0) = 0. \quad (2.59)$$

В уравнении для энергии возмущения (2.57) коэффициент перед линейным по q членом обращается в ноль при одновременной замене $\lambda \rightarrow -\lambda$, $\sin \varphi \rightarrow -\sin \varphi$, поэтому $\epsilon_1(q)$ имеет всегда экстремум при $q = 0$. Мы ищем линию, на которой этот экстремум меняется с \min на \max при увеличении магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1(q)}{\partial q^2} = 0, \quad (2.60)$$

и это есть второе условие для фазового перехода из БКШ в “киральное” состояние. После взятия интегралов по $\varphi_{\mathbf{p}}$, (2.60) имеет вид:

$$\sum_{\omega > 0} \left(J + 2\omega \frac{\partial}{\partial \omega} J + \frac{\Delta^2 - \omega^2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \Delta} J \right) = 0, \quad (2.61)$$

где J -ядро уравнения (2.48) при $Q = 0$:

$$J = \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{4\Delta H}{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \right)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}}.$$

Заметим, что коэффициент при Q^2 в разложении сверхпроводящей энергии киральной фазы (2.52) совпадает с коэффициентом при q^2 в разложении энергии фазового возмущения (2.57) с точностью до умножения на Δ^2 . Таким

образом, условия (2.53) и (2.60), определяющие границу стабильности БКШ состояния, равносильны. Мы решаем численно систему двух уравнений: уравнение (2.59) (которое сводится к уравнению (2.48) при $Q = 0$) и второе уравнение - (2.61); получаем линию \mathcal{LO} фазового перехода между однородной БКШ фазой и комплексным параметром порядка, показанную на Рис. 2.5. Обратим внимание, что было доказано \mathcal{LT} - линия фазового перехода второго рода, а ниже точки \mathcal{T} начинается переход первого рода, так что \mathcal{TO} - это своего рода область локальной устойчивости БКШ состояния. Действительная линия перехода первого рода \mathcal{TO}' лежит при более низких значениях магнитного поля ($H_{O'} < H_O = 1.76T_{c0}$).

Линия устойчивости \mathcal{ST}' “кирального” состояния определена посредством вычисления вариации термодинамического потенциала при слабой статической модуляции параметра порядка вида

$$\delta\Delta(\vec{r}) = v_{-q} \exp(-iqy) + v_{q+2Q} \exp(i(q+2Q)y)$$

(присутствие двух Фурье-гармоник в возмущении обязано неоднородности основного “кирального” состояния):

$$\delta\Omega_{\delta v} = \vec{v}^+ \hat{\mathcal{A}}(q) \vec{v}, \quad (2.62)$$

где $\vec{v} = (\delta v_{-q}, \delta v_{q+2Q}^*)$ - спинор возмущения, а “куперовская матрица возмущения дается

$$\hat{\mathcal{A}}(q) = \frac{\hat{1}}{U} - \sum_{\omega > 0, \lambda, \mathbf{p}} \begin{pmatrix} G_\lambda(p - q/2)G_\lambda(-p - q/2) & F_\lambda(p - q/2)F_\lambda(-p - q/2) \\ F_\lambda^*(p - q/2)F_\lambda^*(-p - q/2) & G_\lambda(p + q/2 + Q)G_\lambda(-p + q/2 + Q) \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Квазичастичные возбуждения формируются на основе неоднородного “кирального” состояния, поэтому Куперовские петли в матрице $\hat{\mathcal{A}}(q)$ сделаны из

“киральных” функций Грина:

$$\begin{aligned}
 G_\lambda \left(\omega, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{i\omega - (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\
 F_\lambda \left(\omega, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= \frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} = \\
 &= -F_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{-i\omega + (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\
 F_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} \tag{2.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) &= -\frac{i\omega - (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\
 G_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) &= \\
 &= -\frac{-i\omega + (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} \tag{2.66}
 \end{aligned}$$

Матрица $\hat{\mathcal{A}}$ имеет два собственных значения $\epsilon_1(q) < \epsilon_2(q)$:

$$\epsilon_{2,1}(q) = \left(\frac{1}{U} - \frac{g_{-q} + g_{q+2Q}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{g_{-q} - g_{q+2Q}}{2} \right)^2 + |f_{-q}|^2},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} - \frac{g_{-q} + g_{q+2Q}}{2} &= \sum_{\omega>0,\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 - (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2} \right), \\ \frac{g_{-q} - g_{q+2Q}}{2} &= \sum_{\omega>0,\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \frac{2i(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)(\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2}, \\ f_{-q} &= \sum_{\omega>0,\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \frac{\Delta^2}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь $g_{-q} = \sum_{\omega>0,\mathbf{p},\lambda} G_{\lambda,\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} G_{\lambda,-\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}$ и $g_{q+2Q} = \sum_{\omega>0,\mathbf{p},\lambda} G_{\lambda,\mathbf{p}+\mathbf{q}/2+Q} G_{\lambda,-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2+Q}$ - Куперовские петли из нормальных функций Грина, а $f_{-q} = \sum_{\omega>0,\mathbf{p},\lambda} F_{\lambda,\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} F_{\lambda,-\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}$ - Куперовская петля из аномальных функций Грина, $1/U$ берется из уравнения самосогласования (2.46).

Интегралы (2.67) можно выразить через эллиптические интегралы первого и второго рода, подробнее см. Приложение Б.

Линия устойчивости “кирального” состояния \mathcal{ST}' определяется как множество точек на фазовой диаграмме, в которых возникновение моды δv становится энергетически выгодным: $\min_q \epsilon_1(q) = 0$. Мы решаем численно четыре уравнения одновременно: два уравнения самосогласования (2.48, 2.49), которые определяют равновесные Δ и Q , совместно с двумя уравнениями

$\partial_q \epsilon_1(q) = 0$ и $\epsilon_1(q) = 0$ ($\epsilon_1(q)$ дается (2.67)).

Подчеркнем, что линия \mathcal{ST}' действительно соответствует фазовому переходу из “кирального” состояния, *если* этот переход - второго рода; другой возможный сценарий - это переход первого рода от “кирального” к пространственно-четной и симметричной по обращению времени полосатой структуре, который происходит при слегка более низких значениях поля H для данного T .

В частности, мы нашли, что вблизи $T_c(H)$ имеет место фазовый переход *второго* рода, оценивая члены восьмого порядка по $|\Delta_Q|$ в функционале Гинзбурга-Ландау. А именно, если запараметризовать спинор параметра порядка вблизи симметричной точки как

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Delta e^{i\chi} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

то анизотропная часть в разложении Гинзбурга-Ландау примет вид

$$f(\kappa) = \beta_a \Delta^4 \cos^2 \theta + \kappa \Delta^8 \cos^4 \theta.$$

От знака коэффициента κ перед членом $\cos^4 \theta$ зависит какого рода переход вблизи линии $T_c(H)$. Если удерживать члены не выше восьмого порядка, то функционал Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\begin{aligned} F_{sn} &= \alpha \Delta^2 + \beta_s \Delta^4 + \beta_a (u^2 - v^2)^2 + \\ &+ \frac{(C_1 + C_2)}{4} \Delta^6 + \frac{(3C_1 - C_2)}{4} \Delta^2 (u^2 - v^2)^2 + \\ &+ \frac{(D_1 + D_2 + D_3/2)}{8} \Delta^8 + \frac{(6D_1 - D_3)}{8} (u^2 - v^2)^2 \Delta^4 + \\ &+ \frac{(D_1 - D_2 + D_3/2)}{8} (u^2 - v^2)^4 + \\ &+ E_{3Q}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

где $\beta_{s,a}$ определены в (2.29), а

$$E_{3Q} = \mathcal{V}^+ A \mathcal{V} + (X^+ \mathcal{V} + \mathcal{V}^+ X) \quad (2.70)$$

и матрица A и вектор X содержат численные значения l_i для петель с двумя, четырьмя и шестью вершинами (подробнее см. Приложение В):

$$A = \begin{pmatrix} l_7 + l_9|u|^2 + l_{10}|v|^2 & l_{11}uv \\ l_{11}u^*v^* & l_7 + l_{10}|u|^2 + l_9|v|^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}^+ = (u_{3Q}^*, v_{-3Q}), \quad X^+ = (x^*, y),$$

$$x = l_8u^2v^* + l_{12}u^2v^*|u|^2 + (l_{13} + l_{14})u^2v^*|v|^2;$$

$$y = l_8v^2u^* + l_{12}v^2u^*|v|^2 + (l_{13} + l_{14})v^2u^*|u|^2. \quad (2.71)$$

В функционале Гинзбурга-Ландау в E_{3Q} удержаны все члены, содержащие гармоники u_{3Q} и (либо) v_{-3Q} и дающие вклад не выше, чем восьмого порядка по $u_{\pm Q}$. И этого достаточно, поскольку учет в (2.69) как более высоких гармоник (следующая пара, которая непрерывно появляется при понижении температуры, это (u_{5Q}^*, v_{-5Q})), так и членов, содержащих более высокие степени $u_{\pm 3Q}$, чем вторая (а следующая - это четвертая, из законов сохранения импульса в петле) даст вклад только более высокого порядка, чем восьмой по $u_{\pm Q}$. Значения u_{3Q} и v_{-3Q} , на которых достигается минимум сверхпроводящей энергии, находятся из условия $\frac{\partial E_{3Q}}{\partial \mathcal{V}} = 0$. Из последнего следует

$$\mathcal{V} = -A^{-1}X \quad (2.72)$$

и, соответственно,

$$E_{3Q} = -X^+ A^{-1}X. \quad (2.73)$$

Выражение (2.73) можно разложить по степеням малых $U = |u|^2$ и $V = |v|^2$:

$$E_{3Q} = d_2 \cdot (|u|^6|v|^2 + |u|^2|v|^6) + d_3 \cdot |u|^4|v|^4, \quad (2.74)$$

где

$$d_2 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 E_{3Q}}{\partial U^3} \frac{\partial E_{3Q}}{\partial V} = \frac{l_8(-2l_{12}l_7 + l_8l_9)}{l_7^2}$$

$$d_3 = \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \frac{\partial^2 E_{3Q}}{\partial U^2} \frac{\partial^2 E_{3Q}}{\partial V^2} = \frac{2l_8(-2(l_{13} + l_{14})l_7 + l_8(l_{10} + l_{11}))}{l_7^2}. \quad (2.75)$$

После несложных алгебраических преобразований, из (2.74) и (2.69) получим, что анизотропная часть с учетом членов восьмого порядка по $u_{\pm Q}$ сверхпроводящей энергии дается выражением

$$F_{sn}^{anis} = \beta_a(u^2 - v^2)^2 + \frac{1}{8}(D_1 - D_2 + D_3/2 - d_2 + d_3/2)(u^2 - v^2)^4, \quad (2.76)$$

где мы пренебрегли членами Δ/T_c по сравнению с 1. Мы получили (см. Приложение В) $D_1 - D_2 + D_3/2 - d_2 + d_3/2 = 0.0053 > 0$. Откуда и последовало, что переход второго рода.

Правее симметричной точки \mathcal{S} (при полях выше H_S), под линией сверхпроводящего перехода $T_c(H)$, при понижении температуры непрерывно индуцируются нечетные гармоники парами $\pm 3Q, \pm 5Q, \dots$ ввиду свойства закона сохранения импульса в коэффициентах разложения Гинзбурга-Ландау. При этом заметим, что если для полосатой структуры $u_Q = v_{-Q}^*$, то из уравнений (2.71, 2.72), а также из эрмитовости матрицы A следует, что $u_{3Q} = v_{-3Q}^*$, а значит пространственная четность и симметрия по обращению времени полосатой структуры с учетом высших гармоник сохраняется. Поэтому из симметричных соображений и ввиду того, что найденный нами переход второго рода из киральной фазы происходит в фазу, у которой тоже нарушена пространственная четность и симметрия по обращению времени, должен существовать еще один переход из последней в четную полосатую структуру. Этот переход будет начинаться в точке \mathcal{S} , но будет лежать чуть правее (более высокие значения поля) от линии \mathcal{ST}' .

Тот факт, что точки \mathcal{T} и \mathcal{T}' , различны, но близки друг к другу - в пользу существования критической точки \mathcal{K} на линии \mathcal{ST}' (подобной точке \mathcal{T} на линии \mathcal{LO}), ниже которой фазовый переход от кирального в состояние типа LOFF становится переходом слабо первого рода.

2.6 Ток и электромагнитный отклик в киральной фазе

Вид параметра порядка (2.14), состоящего из конечного числа гармоник и \mathbf{Q}_i отличных от нуля в основном состоянии, не означает, что надо сопоставлять электрический ток каждой комплексной гармонике. Мы показываем, что ток возникает только в неравновесном состоянии.

Сверхпроводящий ток может быть записан в следующем виде:

$$\vec{j}_s = \frac{e}{2} T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} G_{\lambda\lambda}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \omega) - \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} G_{\lambda\lambda}(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -\omega) \right), \quad (2.77)$$

где функция Грина электрона в киральном состоянии ($|\Delta(\mathbf{r})| = \text{const}$) со спектром одночастичного гамильтониана равным $\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}}$ дается

$$G_{\lambda\lambda}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \omega) = - \frac{i\omega + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\left(\omega + i \frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2} \right)^2 + \Delta^2}, \quad (2.78)$$

Термодинамический потенциал в киральном состоянии может быть явно выписан для произвольного спектра $\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}}$ электрона:

$$\Omega = - \frac{T}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \log \left[\left(\omega + i \frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2} \right)^2 + \Delta^2 \right], \quad (2.79)$$

а его производная - легко вычислена:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{Q}} = - \frac{T}{4} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \frac{i\tilde{\omega} \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \xi \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} \right)}{\tilde{\omega}^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad (2.80)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\tilde{\omega} = \omega + i \frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2}, \quad \xi = \frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{2}.$$

Подставляя в оператор тока (2.77) функцию Грина (2.78), и непосредственно сравнивая получающееся выражение со стационарным условием для киральной фазы (2.80), видим

$$\vec{j}_s = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \vec{Q}}. \quad (2.81)$$

Таким образом, прямое вычисление сверхпроводящего тока \vec{j}_s показало, что в любом порядке по α/v_F ток в равновесии равен нулю.

Мы вычислили электромагнитный отклик $\delta j_\alpha/\delta A_\beta = -\frac{e^2}{mc}n_s^{\alpha\beta}$ в киральном состоянии, используя стандартные диаграммные методы и формулы для токов $j_x^{(ch)}$, $j_x^{(ch)}$ в киральном базисе, уравнение (1.62), и получили:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{e^2}{c}T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(G^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) + F^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) \right) \cos^2 \varphi \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right)^2 A_x; \\ j_y &= \frac{e^2}{c}T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(G^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) + F^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) \right) \sin^2 \varphi \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right)^2 A_y \end{aligned} \quad (2.82)$$

и нашли

$$n_s^{yy} = 4 \frac{m}{\hbar} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Q^2}, \quad (2.83)$$

то есть пропорциональный параметру a из уравнения (2.52). Таким образом, на линии Лифшица \mathcal{LT} нет никакого линейного сверхпроводящего тока в направлении перпендикулярном к магнитному полю. Компонента n_s^{xx} нигде не исчезает в киральной области и порядка n_s БКШ состояния:

$$n_s^{xx} = \frac{4m}{\hbar^2} \left(\frac{v_F^2}{2} \Delta \frac{\partial}{\partial \Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \Delta} \right) - \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right). \quad (2.84)$$

Этот случай сильно отличается от классической LOFF задачи, где показано, что в киральном состоянии n_s везде обращается в ноль [30]. Различие - вероятно вследствие того, что в нашей задаче направление \mathbf{Q} фиксируется прикладываемым полем \mathbf{h} , в то время как для случая ферромагнитного сверхпроводника оно произвольно. Полученное поведение тензора $n_s^{\alpha\beta}$ указывает на существенно анизотропный электромагнитный отклик поверхностного сверхпроводника вблизи линии Лифшица \mathcal{LT} .

2.7 Преобразование состояния БКШ в “слабо киральную” фазу

Выражение (2.45) для термодинамического потенциала в киральной фазе было получено в пренебрежении членом αQ малым по сравнению с $v_F Q$ в энергии электрона. В этом приближении термодинамический потенциал был симметричен по замене Q на $-Q$ и, соответственно, разложение (2.52) шло по четным степеням Q . Если учитывать члены α/v_F , то в уравнении (2.45) надо заменить $H_\lambda = \lambda H + v_F Q/2$ на $\lambda H + v_F Q/2 - \lambda \alpha Q/2$, после чего второе стационарное условие (2.47) существенно изменится и примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} = \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda \omega} \left(\frac{v_F}{2} - \lambda \frac{\alpha}{2} \right) f(H_\lambda, \omega), \quad (2.85)$$

откуда следует, что теперь ни при каких значениях поля не будет достигаться минимум сверхпроводящей энергии на $Q = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0} &= -\alpha \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} f(H, \omega) = \\ &= -\frac{\alpha}{H} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \left[\frac{(\omega^2 + H^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) - \sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right] \neq 0, \end{aligned} \quad (2.86)$$

и разложение термодинамического потенциала по степеням Q будет содержать линейный член:

$$\Omega_{hel}(Q) = \Omega_{hel}(0) + \eta Q + \tilde{a} Q^2 + \dots, \quad (2.87)$$

где $\eta = \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0}$ и $\tilde{a} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0}$, а вторая производная дается выражением

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} &= \frac{v_F^2}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\partial f(H, \omega)}{\partial H} = \frac{v_F^2}{2H^2} \nu(\epsilon_F) T \times \\ &\sum_{\omega} \left[-\frac{(\omega^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) + \frac{(\omega^2 + \Delta^2)^2 + H^2(\omega^2 - \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} (\omega^2 + (H - \Delta)^2)} \mathbf{E}(k) \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

k - модуль Якоби (2.50).

Ввиду малости коэффициента η можем везде в области левее линии Лифшица \mathcal{LT} для сверхпроводящей энергии пользоваться разложением (2.87), из которого можем найти равновесный вектор слабой модуляции параметра порядка в этой области:

$$Q_{hel} = -\frac{\eta}{2\tilde{a}} = \frac{2\alpha H}{v_F^2} \times \frac{\sum_{\omega} \left[\frac{(\omega^2 + H^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) - \sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right]}{\sum_{\omega} \left[-\frac{(\omega^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) + \frac{(\omega^2 + \Delta^2)^2 + H^2(\omega^2 - \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} \sqrt{\omega^2 + (H - \Delta)^2}} \mathbf{E}(k) \right]} \quad (2.89)$$

Заметим, что в пределе $H \rightarrow 0$ выражения (2.86) и (2.88) можно разложить в ряд по H :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0} &\approx -\frac{\alpha}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\pi \Delta^2 H}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = -\frac{\alpha H}{2} \nu(\epsilon_F) (1 - Y(T, \Delta)), \\ \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} &\approx \frac{v_F^2}{4} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{v_F^2}{4} \nu(\epsilon_F) (1 - Y(T, \Delta)) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Таким образом, учет членов первого порядка по α/v_F в (2.45) преобразует однородную фазу в “слабо киральную” фазу с маленьким волновым вектором

$$Q_{hel} = 2\alpha H / v_F^2, \quad (2.91)$$

а линию перехода “второго рода” \mathcal{LT} расширяет до узкой области кроссовера. Формула (2.91) применима для маленьких магнитных полей $H < 0.5T_{c0}$. При более высоких полях зависимость вектора спаривания от магнитного поля становится нелинейной; в слабо киральной фазе левее линии Лифшица применима формула (2.89); график $Q_{hel}(H)$ показан на Рис. 2.9.

Согласно [41], градиент фазы конденсатной волновой функции определяет плотность сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s^{(1)} = \frac{e\hbar}{2m} n_s \vec{Q}_{hel}, \quad (2.92)$$

где n_s - плотность числа сверхпроводящих электронов, $e = -|e|$ - заряд электрона, а m - его истинная масса. Согласно (2.83) и (2.90), для слабых маг-

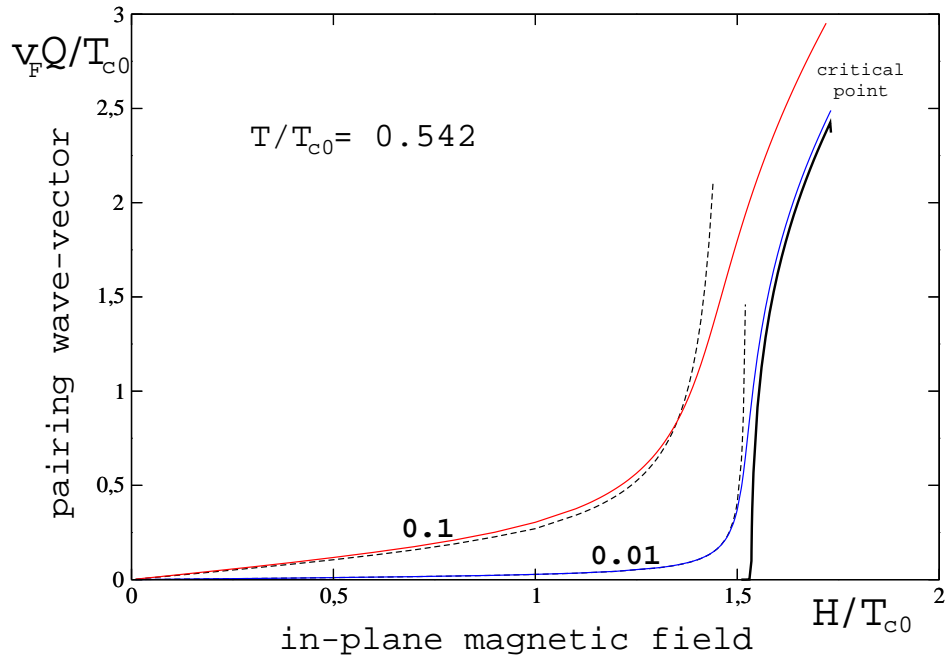


Рис. 2.9: Волновой вектор Куперовской пары как функция магнитного поля для постоянного значения температуры $T = 0.542T_{c0}$. Жирная линия построена в пренебрежении, а тонкие линии - при учете в сверхпроводящей энергии киральной фазы малых членов α/v_F . Пунктирные линии строятся по формуле (2.89), область применимости которой - малые Q . Графики построены для двух значений α/v_F равных 0.1 и 0.01.

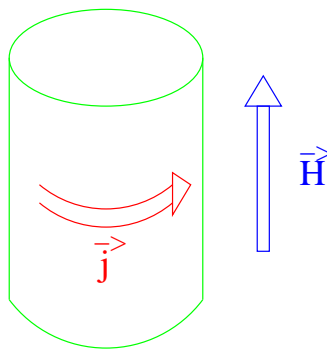


Рис. 2.10: Геометрическая конфигурация для сверхпроводящего листа (циклические граничные условия), при которой возможно протекание тока в основном состоянии в киральной фазе при включении продольного магнитного поля.

нитных полей

$$n_s^{yy} = \frac{mv_F^2}{\hbar} \nu(\epsilon_F)(1 - Y(T, \Delta)) \quad (2.93)$$

и, соответственно, ток в y - направлении, возникающий от градиента фазы, дается:

$$j_y^{(1)} = e\nu(\epsilon_F)\alpha(1 - Y(T, \Delta))H, \quad (2.94)$$

Недавно в литературе появилась статья [32], в которой утверждалось, что для нашей системы при приложении магнитного поля в плоскости потечет ток в перпендикулярном полю направлении. Действительно, вычисление тока в БКШ-состоянии дает ненулевое значение (совпадающее с [32]):

$$j_y^{(2)} = \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G_\lambda(\omega, \mathbf{p}) \hat{j}_y^{(chir)} = -e\nu(\epsilon_F)\alpha(1 - Y(T, \Delta))H, \quad (2.95)$$

где $\hat{j}_y^{(chir)}$ дается первой строчкой из (1.62).

Но следует помнить, что состояние БКШ, согласно (2.86), *не является* равновесным для любых значений поля. Основное состояние всегда неоднородно и при малых магнитных полях оно слабо киральное с вектором модуляции параметра порядка (2.91). Полный ток в равновесии, согласно (2.81), в киральной фазе всегда ноль. И в слабо киральной фазе, для малых магнитных полей $H < T_{c0}$, полный ток можно представить как сумму двух вкладов $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_s^{(1)} + \mathbf{j}_s^{(2)} = 0$, что наглядно физически: вклад $\mathbf{j}_s^{(1)}$ “доучитывает” сла-

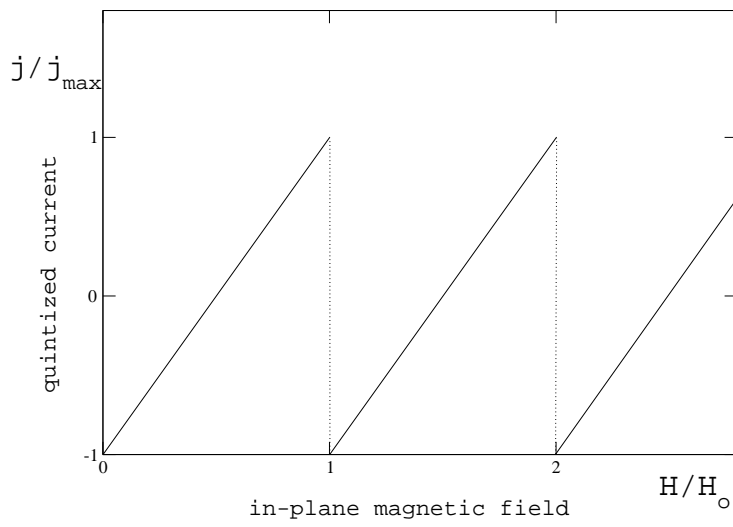


Рис. 2.11: пилообразная зависимость сверхпроводящего тока j на цилиндре от продольного магнитного поля H ; амплитуда $j_{max} = \frac{e\hbar}{2m}n_s/R$, период $H_o = v_F^2/(2\alpha R)$. Строго линейная зависимость, показанная на рисунке, имеет место в случае $H_o \ll T_{c0}$ и $T = 0$, когда можно пренебречь флуктуациями тока.

бую пространственную модуляцию параметра порядка. На самом деле будет происходить следующее: при приложении магнитного поля в плоскости ток не потечет, но на концах сверхпроводника можно будет наблюдать разность фаз $\Delta\chi = LQ_{hel}$.

Однако, если свернуть сверхпроводник в цилиндр, и приложить магнитное поле вдоль оси, то по поверхности цилиндра ток будет течь (см. Рис. 2.10), поскольку на фазу будет наложено условие квантования $\delta\chi = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Полный ток будет даваться суммой “тока от спин-орбиты” $\mathbf{j}_s^{(2)}$ и “тока от градиента квантованной фазы”:

$$j_{quant} = \frac{e\hbar}{2m}n_s \left(-Q_{hel} + \frac{2\pi n}{2\pi R} \right),$$

где R - радиус цилиндра, $Q_{hel} = 2\alpha H/v_F^2$. Целое число n будет расти с увеличением поля так, чтобы ток был минимален: $n = \text{целая часть}[H/H_o]$, где $H_o = \frac{v_F^2}{2\alpha R}$. Ток будет обращаться в ноль только при $H = nH_o$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Максимальное значение тока будет равно $j_{max} = \frac{e\hbar}{2m}n_s/R$. Зависимость тока от магнитного поля будет пилообразной как показано на Рис. 2.11.

2.8 Фазовая диаграмма в присутствии немагнитных примесей

В этом разделе мы изучаем влияние немагнитных примесей, характеризующихся временем τ между упругими столкновениями, на фазовую диаграмму. Взаимодействию между электронами и атомами примеси соответствует гамильтониан

$$\hat{H}_{int} = \sum_i \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) d^2\mathbf{r}. \quad (2.96)$$

В последнем волновую функцию электрона раскладываем по базису плоских волн $\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} a_\alpha(\mathbf{p})$; и считаем примеси точечными $u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = u\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$. Получаем примесный гамильтониан в импульсном представлении в спиновом базисе:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{V} \sum_i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} u e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{R}_i} \psi_\alpha^+(\mathbf{p}) \psi_\alpha(\mathbf{p}'). \quad (2.97)$$

Переход в киральный базис $a_\alpha(\mathbf{p}) = \eta_{\lambda\alpha}(\mathbf{p}) \hat{a}_{\lambda\mathbf{p}}$ задается матрицей из столбцов спинора (2.4); и примесный гамильтониан в киральном базисе имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{V} \sum_i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} u e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{R}_i} a_{\mathbf{p}\lambda}^+ M_{\lambda\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}'\mu}, \quad (2.98)$$

где

$$M_{\lambda\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda\mu e^{i(\varphi_p - \varphi_{p'})} \right). \quad (2.99)$$

После стандартной процедуры (см. [13], стр.328) для примесного гамильтониана в киральном представлении (2.98), мы находим функцию Грина в присутствии немагнитных примесей для нормального металла:

$$G_\lambda(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{i\omega - \xi(\mathbf{p}) - \lambda H \sin \varphi_p + \frac{i}{2\tau} \text{sgn}\omega}, \quad (2.100)$$

где

$$\frac{1}{2\tau} = \pi n_{imp} u^2 \nu(\epsilon_F), \quad (2.101)$$

n_{imp} - число атомов примеси в единице объема. Мы используем стандартный “крестовый” метод, в котором матрица (2.99) соответствует примесному кресту, а множитель $n_{imp}u^2$ - линии примеси. Куперовская петля в присутствии немагнитных примесей дается непересекающимися диаграммами, показанными на Рис. 2.12. Это - чередующаяся последовательность блоков из двух Гринских функций и линий примеси. Линия примеси несет нулевую частоту, что соответствует статическому примесному потенциалу, и рассеяние электрона на такой примеси упругое. Жирные функции Грина - функции Грина свободных “диффузных” электронов, то есть приняты во внимание процессы рассеяния отдельного квазичастичного возбуждения вблизи $T_c(H)$. В ведущем порядке в каждом блоке импульсы на верхних и нижних линиях - противоположны, а киральности одинаковы. Выражение (2.102), с точностью до численных множителей - матричный элемент возмущения (2.96). Если верхний и нижний электроны в одном блоке принадлежат Ферми-окружностям, соответствующим разным киральностям, то их энергия отличается на большую величину $2\alpha p_F$, и соответствующий вклад в лестничную диаграмму от формулы (2.104) либо порядка $T_{c0}/(\alpha p_F)$ для не очень большой концентрации примесей $1/\tau \propto T_{c0}$, либо порядка $1/(\tau \alpha p_F)$ для грязного предела $\alpha p_F \gg 1/\tau \gg T_{c0}$; такими вкладами мы пренебрегаем; физически их малость означает маленькую вероятность процесса рассеяния на одной и той же примеси двух электронов с равными и противоположными импульсами, но принадлежащие разным киральным ветвям. В очень грязном случае $1/\tau \propto \alpha p_F$, действительно, надо было бы учитывать рассеяние двух электронов разной киральности на одной и той же примеси, но мы этот предел не рассматриваем. Это уже другая задача, для которой функции Грина не равны (2.100).

Выражение для линии примеси, оканчивающейся двумя крестами:

$$V_{\lambda\mu}(\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = \frac{1}{4}n_{imp}u^2(1 + \lambda\mu e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}})^2. \quad (2.102)$$

Оно равняется $n_{imp}u^2 e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}} \cos^2 \frac{\varphi_{\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{p}'}}{2}$, если $\lambda = \mu$, либо $-n_{imp}u^2$

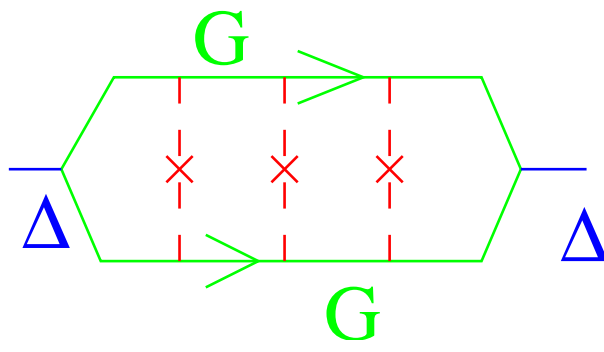


Рис. 2.12: Куперовская петля в присутствии примесей.

$e^{i\varphi_{\mathbf{p}}-i\varphi_{\mathbf{p}'}} \sin^2 \frac{\varphi_{\mathbf{p}}-\varphi_{\mathbf{p}'}}{2}$, если $\lambda = -\mu$. Поэтому примесную линию можно записать и в виде

$$V_{\lambda\mu}(\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = \frac{1}{2} n_{imp} u^2 e^{i\varphi_{\mathbf{p}}-i\varphi_{\mathbf{p}'}} (\lambda\mu + \sin \varphi_{\mathbf{p}} \sin \varphi_{\mathbf{p}'} + \cos \varphi_{\mathbf{p}} \cos \varphi_{\mathbf{p}'}) \quad (2.103)$$

где λ и μ - киральности на левом и правом блоке, прилегающих к примесной линии. Последнее слагаемое в правой части выражения (2.103) обращается в ноль после интегрирования по $\varphi_{\mathbf{p}}$ или $\varphi_{\mathbf{p}'}$: заметим, что $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\sin \varphi) \cos \varphi = 0$ для произвольной функции $f(x)$.

В блоке из двух Гриновских функций можно взять интеграл по ξ :

$$\begin{aligned} C_{\lambda}(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}}) &= \nu(\epsilon_F) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G_{\lambda} \left(\omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) G_{\lambda} \left(-\omega, -\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) = \\ &= \frac{i\pi\nu(\epsilon_F)}{i\omega + \frac{i}{2\tau} - (\lambda H + \frac{q}{2}) \sin \varphi_{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Тогда Куперовская петля в присутствии примесей приобретает вид:

$$T \sum_{\omega>0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_n} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_{\mathbf{p}_n}}{2\pi} L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) C_{\lambda_n}(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}_n}) \lambda_n e^{-i\varphi_{\mathbf{p}_n}}, \quad (2.105)$$

где $L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n})$ - выражение для лестничной диаграммы, содержащей n примесных линий и со сверхпроводящей вершиной в левом углу $\lambda_0 e^{i\varphi_{\mathbf{p}_0}}$. Для лестничных диаграмм можно написать рекуррентное интегральное соотношение:

$$L_{\lambda_{n+1}}^{n+1}(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_{n+1}}) = \sum_{\lambda_n} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{p}_n}}{2\pi} L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) C_{\lambda_n}(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}_n}) V_{\lambda_n \lambda_{n+1}}(\varphi_{\mathbf{p}_n}, \varphi_{\mathbf{p}_{n+1}}). \quad (2.106)$$

Очевидно (см. (2.103)), $L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) = l_n^0(\lambda_n, \omega) + \sin \varphi_{\mathbf{p}_n} l_n^1(\lambda_n, \omega)$. Тогда Eq.(2.106) может быть переписано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} l_{n+1}^0(\lambda_{n+1}) \\ l_{n+1}^1(\lambda_{n+1}) \end{pmatrix} = \sum_{\lambda_n} \begin{pmatrix} \lambda_n \lambda_{n+1} I_{\lambda_n}^0 & \lambda_n \lambda_{n+1} I_{\lambda_n}^1 \\ I_{\lambda_n}^1 & I_{\lambda_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n^0(\lambda_n) \\ l_n^1(\lambda_n) \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

или

$$\begin{pmatrix} l_{n+1}^0(+), \\ l_{n+1}^1(+), \\ l_{n+1}^0(-), \\ l_{n+1}^1(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_+^0 & I_+^1 & -I_-^0 & -I_-^1 \\ I_+^1 & I_+^2 & I_-^1 & I_-^2 \\ -I_+^0 & -I_+^1 & I_-^0 & I_-^1 \\ I_+^1 & I_+^2 & I_-^1 & I_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n^0(+), \\ l_n^1(+), \\ l_n^0(-), \\ l_n^1(-) \end{pmatrix}, \quad (2.108)$$

где матрица T в правой части содержит три интеграла

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^0 &= \frac{1}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_{\lambda}^2}} \frac{1}{4\tau}, \\ I_{\lambda}^1 &= \frac{i}{h_{\lambda}} \left(\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_{\lambda}^2}} - 1 \right) \frac{1}{4\tau}, \\ I_{\lambda}^2 &= -\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{h_{\lambda}^2} \left(\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_{\lambda}^2}} - 1 \right) \frac{1}{4\tau}; \end{aligned} \quad (2.109)$$

здесь введено обозначение $h_{\lambda} = \lambda H + q/2$. Сумма всех лестничных диаграмм, показанных на Рис. 2.12, дается

$$w^T \sum_0^{\infty} L_n v = w^T (1 - T)^{-1} v, \quad (2.110)$$

где вектор $v = (\lambda_0 e^{-i\varphi_{p_0}}, 0)$ соответствует начальному условию в левом углу, а вектор $w = (\lambda I_{\lambda}^0, \lambda I_{\lambda}^1)$ - интегралу в последнем блоке в правом углу. Вычисляя это скалярное произведение, мы находим куперовскую петлю с примесями и, соответственно, уравнение на $T_c(H)$:

$$\frac{1}{\nu(\epsilon_F)U} = \pi T \max_q \sum_{\omega > 0} K \left(\omega, h_+, h_-, \frac{1}{2\tau} \right), \quad (2.111)$$

где ядро имеет вид

$$K = 4\tau \frac{(I_+^0 + I_-^0) [1 - (I_+^2 + I_-^2)] + (I_+^1 - I_-^1)^2}{(1 - (I_+^0 + I_-^0)) [1 - (I_+^2 + I_-^2)] - (I_+^1 - I_-^1)^2}. \quad (2.112)$$

Уравнение (2.111) для $T_c(H)$ может быть решено численно, и линии фазовых переходов для времен рассеяния на примеси $1/2\tau T_{c0} = 0.5, 1.2, 2.1, 3.2, 4.5, 7.7, 11.7$ показаны на Рис. 2.13.

Замечаем, что в чистом пределе $T_{c0}\tau \gg 1$ рассеяние на примесях уменьшает критическое параллельное магнитное поле (в чистом случае оно дается $H_{p0} = \sqrt{2\alpha\rho_F\Delta(0)}$, впервые найденное в [29]) и одновременно выталкивает положение \mathcal{L} точки к более высоким значениям H и более низким значениям T . В результате, оба неоднородных состояния исчезают с фазовой диаграммы при $\tau^{-1} \leq 9T_{c0}$.

В пределе $H = 0, q = 0$ ядро имеет вид

$$K(\omega) = \frac{2}{|\omega|}, \quad (2.113)$$

согласующийся с теоремой Андерсона.

В пределе сильной концентрации примесей $1/\tau \gg T_{c0}$ ядро упрощается:

$$K(\omega) = \frac{2}{\omega + 2H^2\tau + v_F^2 q^2 \tau / 4}, \quad (2.114)$$

из чего видим, что при понижении температуры сверхпроводящее состояние впервые возникает на $q = 0$, так что в “грязном” пределе выживает только однородная сверхпроводящая фаза. Парамагнитный предел H_p может быть найден как точка, где $T = 0$, что позволяет сделать замену $T \sum_{\omega} = \int \frac{d\omega}{2\pi}$ в “грязном” уравнении самосогласования (2.111); принимая во внимание упрощение ядра в (2.114) и при замене в нем $q = 0$, получаем

$$H_p = \sqrt{\frac{\pi T_{c0}}{4\tau e^\gamma}}, \quad (2.115)$$

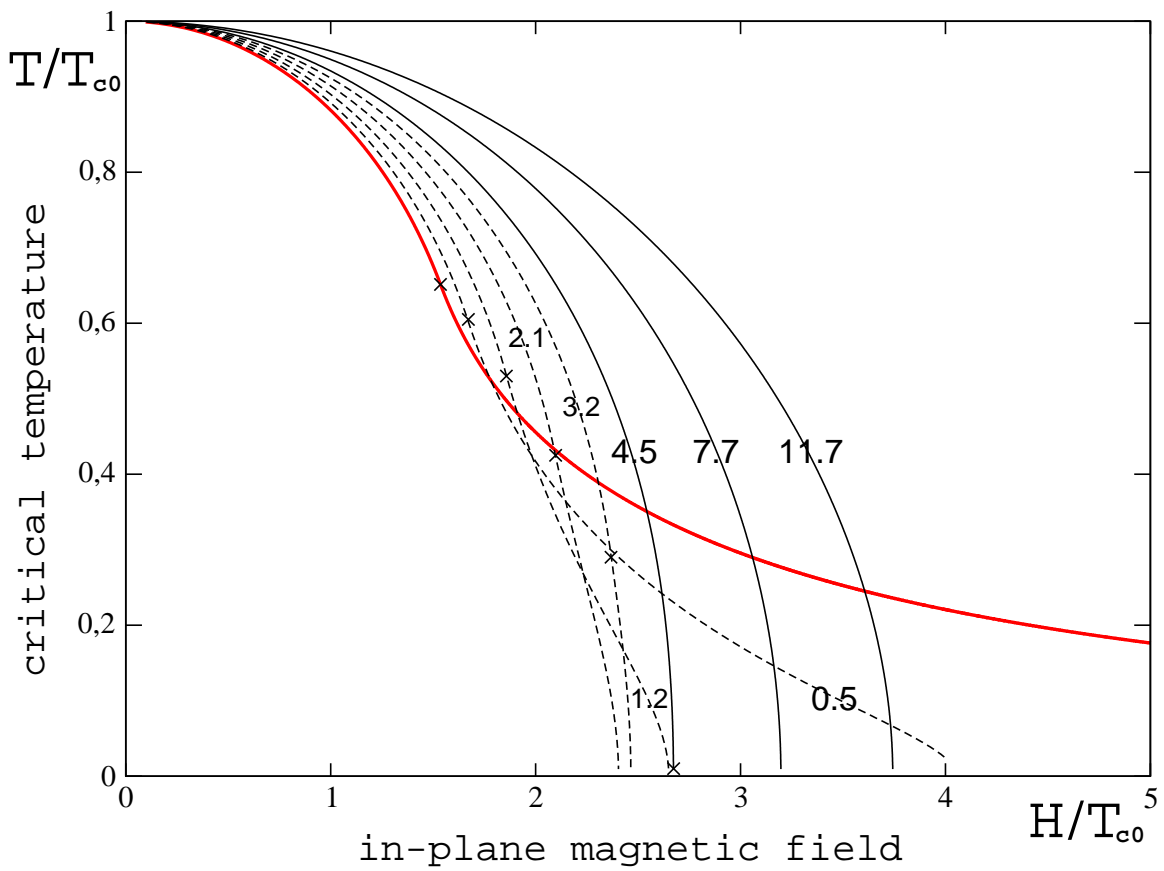


Рис. 2.13: Линии сверхпроводящего фазового перехода для разных времен τ между упругими столкновениями на примесях: $1/2\tau T_{c0} = 0.0, 0.5, 1.2, 2.1, 3.2, 4.5, 7.7, 11.7$. Крестиками обозначены точки Лифшица.

и в грязном пределе $1/\tau \gg T_{c0}$ парамагнитное критическое поле *растет* с увеличением беспорядка.

Все вышеперечисленные результаты о влиянии немагнитных примесей на фазовую диаграмму были получены в пренебрежении членами порядка α/v_F . Учет этих членов в первом порядке приведет к замене в ядре (2.112) h_λ на $\lambda H + v_F Q/2 - \lambda \alpha Q/2$. В пределе сильной концентрации примесей $1/\tau \gg T_{c0}$ и при учете членов первого порядка по α/v_F ядро примет вид (ср. с (2.114)):

$$K(\omega) = \frac{2}{\omega + 2H^2\tau + v_F^2 q^2 \tau/4 - 2\tau \alpha q H}. \quad (2.116)$$

Минимизируя куперовскую петлю с ядром (2.116) по вектору спаривания q

$$\frac{\partial \alpha_{qq}}{\partial q} = 0$$

получаем, что сверхпроводящее состояние в “грязном” пределе при понижении температуры впервые возникает на ненулевом импульсе пары, равным

$$q_{hel} = \frac{4\alpha H}{v_F^2} \quad (2.117)$$

для любых магнитных полей. Таким образом, учет членов α/v_F так же, как и в чистом случае, привел к преобразованию однородного в слабо киральное состояние. Заметим, что маленький волновой вектор, модулирующий параметр порядка в “грязном” пределе,- в два раза больше, чем в чистом случае для слабых магнитных полей (см. 2.91). Но следует помнить, что на этот раз результат (2.117) получен только вблизи линии перехода $T_c(H)$.

2.9 Переход Березинского-Костерлица-Таулеса

В предыдущих разделах мы вычисляли линию сверхпроводящего перехода $T_c(H)$ в приближении среднего поля (MFA). Точность такого приближения для чистого двумерного сверхпроводника обычно порядка T_c/ϵ_F . Реальный физический переход - это переход типа Березинского-Костерлица-Таулеса (ВКТ), соответствующий распариванию вихревого состояния. Относительно линии перехода, посчитанной методом среднего поля, линия перехода ВКТ смещена вниз по температуре на величину порядка T_c^2/ϵ_F . В нашей системе флуктуации усилены вблизи точек \mathcal{L} и \mathcal{S} . Вблизи точки \mathcal{L} это происходит благодаря малости компоненты сверхпроводящей плотности n_s^{yy} на линии Лифшица, что соответствует малости одного из коэффициентов перед градиентным членом в разложении Гинзбурга-Ландау, и следовательно, уменьшению коэффициента перед логарифмическим членом в энергии двумерного вихря вблизи точки Лифшица \mathcal{L} . Множитель, соответствующий усилению флуктуаций в точке \mathcal{L} , порядка $\sqrt{n_s^{xx}/n_s^{yy}} \propto (\alpha/v_F)^{-1/3}$. В окрестности симметричной точки \mathcal{S} флуктуации усилены благодаря расширенной $U(2)$ симметрии параметра порядка. 2D ренорм-групповое вычисление показыва-

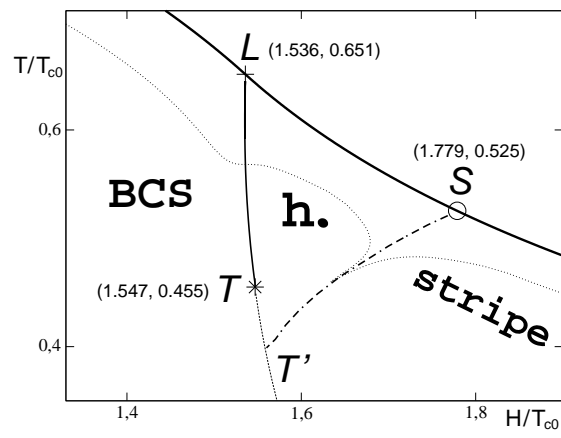


Рис. 2.14: Фазовая диаграмма, на которой точечной линией показана физическая линия $T_{BKT}(H)$ перехода Березинского-Костерлица-Таулеса для численных значений $T_{c0}/\epsilon_F = 0.02$ и $\alpha/v_F = 0.34$. Эффект усиленных флуктуаций в области точек \mathcal{L} и \mathcal{S} - смещение $T_{BKT}(H)$ линии в направлении $(0,0)$. Средне-полевое положение линии перехода $T_C(H)$ показано жирной линией.

ет, что $U(2)$ флуктуационные моды сдвигают реальную линию перехода T_c на $\Delta T_c \propto 4(T_c^2/\epsilon_F) \log \beta_s/\beta_a$ для $\beta_a \ll \beta_s$. В результате, линия фазового перехода $T_c(H)$ сильно деформирована вблизи точек \mathcal{L} и \mathcal{S} , как показано на Рис. 2.14.

Глава 3

Джозефсоновский ток и спиновая поляризация в контактах сверхпроводник- двумерный электронный газ-сверхпроводник

3.1 Введение

Джозефсоновские переходы двух сверхпроводников через двумерный электронный газ, (обычно осуществляемые в Nb/InAs/Nb структурах) активно изучались и экспериментально, и теоретически, см. например [43, 44, 45, 46, 47, 48]. Общая особенность всех этих структур - малое экспериментально измеренное произведение $I_c R_N$, намного меньшее теоретических предсказаний. В частности, это несоответствие известно для коротких переходов с высококачественными S/N границами, что демонстрируется измерением несинусоидальной зависимости ток-фаза [48]. При температурах намного ниже T_c , параметр $I_c R_N \approx 0.22 mV$ был измерен в работе [48], и это значение намного меньше сверхпроводящей щели для ниобия $\Delta \approx 1.5 meV$. Таким образом, кажется естественным искать эффекты, которые не были приняты во внимание в существующей теории, см. например [49, 50], но могли бы отвечать за столь сильное подавление критического тока.

Очевидный кандидат, который исследуется - спин-орбитальное взаимодействие Рашбы [1] $H_R = \alpha[\hat{\sigma} \times \mathbf{p}] \cdot \mathbf{n}$, которое присутствует в структурах с двумерным электронным газом из-за асимметрии квантовой ямы верх-низ (здесь \mathbf{n} - единичный вектор, перпендикулярный к плоскости двумерного электронного газа). В гетероструктурах InAs спин-орбитальное расщепление особенно велико (см. работу [51]), и приводит к расщеплению $\Delta_R = 2\alpha p_F \approx 5meV$, что значительно больше сверхпроводящей щели ниобия. Поэтому кажется естественным, что учет взаимодействия Рашбы может быть важным при анализе джозефсоновского тока в этих структурах. В этом отношении можно также упомянуть статью [52], где показано, что постоянные токи в мезоскопических металлических кольцах заметно варьируются присутствием спин-орбитального спаривания - что, казалось бы, указывает на возможность существования подобного эффекта и для джозефсоновского тока.

В литературе можно встретить мнение, что спин-орбитальное взаимодействие не может влиять на эффект близости в сверхпроводящих структурах, так как оно сохраняет симметрию по обращению времени. Однако этот аргумент, вообще говоря, не верен, когда рассматривается критический джозефсоновский ток, так как присутствие тока уже нарушает симметрию по обращению времени.

В недавних статьях [53, 54], в которых изучалось влияние как спаривания Рашбы, так и магнитного Зеемановского поля на критический ток S-N-S контактов, было найдено, что в отсутствие Зеемановского члена взаимодействие Рашбы (если оно рассматривается для самой простой модели равных Ферми-скоростей на обоих киральных ветвях), полностью выпадает из уравнений для андреевских уровней. Мы покажем, что это сокращение не является общим, а происходит из-за разных упрощений, используемых в упомянутых работах: в статье [53] вводилась модель полностью прозрачных S/N границ, а в статье [54] - простая одномерная модель.

Ниже будет показано, что в общем случае, когда присутствует некоторое нормальное отражение для произвольного угла падения на S-N границу, спин-орбитальное спаривание действительно изменяет энергии андреевских уровней и сверхпроводящий ток, который они переносят. Мы покажем, что эффект SO взаимодействия возникает из-за модификации каналов прохождения, определенных матрицей рассеяния \check{S} , которая описывает свойства перехода в нормальном состоянии. Для модели перехода бесконечной длины (или периодических граничных условий) в направлении, поперечном к сверхпроводящему току, найдено спин-орбитальное расщепление коэффициентов прохождения, которое приводит к расщеплению каждого андреевского уровня на пару спин-поляризованных уровней, с зависящей от фазы разницей энергий $\delta E(\chi)$. Заметим, что $\delta E(0) = 0$, в согласии с сохранением симметрии по обращению времени, которая восстанавливается при отсутствии разности сверхпроводящих фаз. Идея о том, что андреевские уровни могут быть спин-расщеплены из-за SO спаривания, была предложена в работе [55] для узкого (небольшое число каналов) перехода. SO эффект, который мы здесь обсуждаем, отличается от рассмотренного в работе [55].

В этой Главе мы рассматриваем самую простую двумерную модель баллистического перехода сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник (см. например [50]) бесконечной ширины в направлении поперечном к направлению протекания тока, см. Рис. 3.1. Мы пренебрегаем возможными потенциальными барьерами на S/N границах, предполагая, что нормальное отражение происходит только из-за разности Ферми-скоростей, и рассматриваем баллистическое распространение электронов в 2D структуре между сверхпроводящими контактами.

В разделе 3.2 этой Главы мы показываем, что в пределе короткого перехода (длина перехода $L \ll \xi_{SC} = \hbar v_F / \Delta$, где v_F - Ферми-скорость двумерного электронного газа) положения андреевских уровней могут быть выражены

через собственные значения прохождения \mathcal{T} полной матрицы рассеяния \check{S} точно таким же способом, как было найдено Беенаккером [57] для переходов с независимым от спина рассеянием. Затем в разделе 3.3 мы вычисляем матрицы рассеяния \check{S} для самой простой двумерной модели баллистического перехода сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник (см. например работу [50]) бесконечной ширины в направлении, поперечном к направлению тока, см. Рис. 3.1. Мы демонстрируем явное спин-расщепление вероятностей прохождения $\mathcal{T}_{\pm}(p_y)$ для каналов прохождения, характеризующихся проекцией импульса p_y . Мы показываем, что функция распределения для вероятностей прохождения $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ совпадает с обсуждавшейся Мелсеном и Беенаккером [59] в отсутствии спин-орбитального спаривания. В разделе 3.4 мы получаем выражение для джозефсоновского тока короткого перехода и демонстрируем, что *средний* ток нечувствителен к взаимодействию Рашбы. В разделе 3.5 мы выходим за рамки предела короткого контакта: мы получаем уравнение для спин-расщепленных андреевских уровней для переходов с произвольным L/ξ_{SC} отношением и демонстрируем, что их вклад в средний (квазиклассический) сверхпроводящий ток нечувствителен к SO спариванию. В разделе 3.6 изучается спиновая поляризация, возникающая в джозефсоновском переходе в области двумерного электронного газа со взаимодействием Рашбы. Мы показываем численно, что спиновая поляризация существует, и как функция спин-орбитального спаривания напоминает универсальные мезоскопические флуктуации проводимости. раздел 3.7 посвящен обсуждению применимости наших результатов к переходам сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник конечной ширины и возможных способов обнаружить спин-расщепленные андреевские уровни. Наконец, в разделе 3.8 мы приводим наши заключения и обсуждаем нерешенные задачи; в частности, предположено, что учет электрон-электронного взаимодействия *одновременно* с спариванием Рашбы мог бы объяснить подавление джозефсоновского

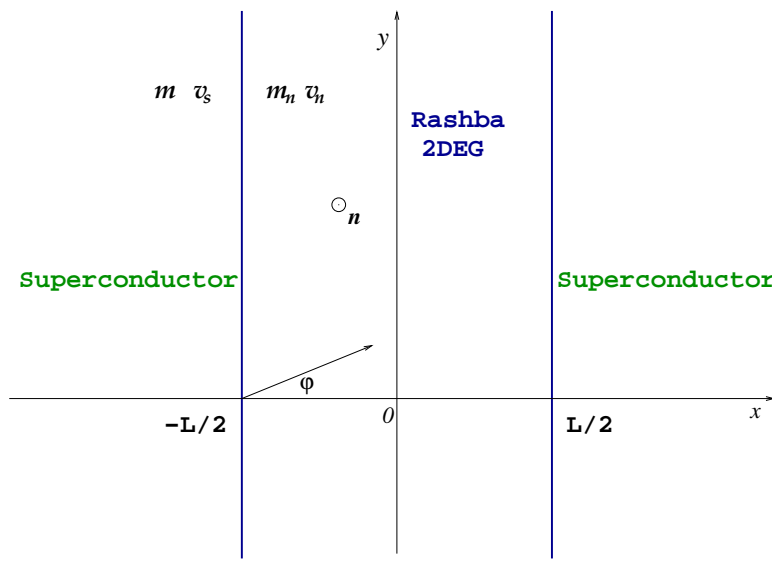


Рис. 3.1: Двумерная модель джозефсоновского перехода сверхпроводник/двумерный электронный газ Рашбы/сверхпроводник, бесконечного в направлении перпендикулярном к току (вдоль оси y). Область двумерного электронного газа Рашбы имеет толщину L ; m/m_n - эффективная масса, и v_s/v_n - скорость Ферми в сверхпроводнике/двумерном электронном газе; φ - угол между направлением скорости квазичастицы и осью x в области двумерного электронного газа; \mathbf{n} - единичный вектор, перпендикулярный к плоскости двумерного электронного газа.

тока.

3.2 Спектр андреевских состояний

Спектр возбужденных состояний состоит из положительных собственных значений уравнения Боголюбова-Де Жена (БДЖ):

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu u^\alpha &= [\xi + U]^\alpha_\beta u^\beta + \Delta v^\alpha, \\ \epsilon_\nu v^\alpha &= -[\xi^* + U^*]^\alpha_\beta v^\beta + \Delta^* u^\alpha,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $(U^*)^\alpha_\beta = \hat{g}^{\nu\alpha}(U(\nu, \mu))^* \hat{g}_{\mu\beta}$, α, β - спинорные индексы, $\hat{g} = i\hat{\sigma}^y$ - метрический тензор в спиновом пространстве; $\xi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_F$ - кинетическая энергия

квазичастицы (энергии измеряются относительно энергии Ферми);

$$u(\vec{r})^\alpha = \begin{pmatrix} u(\vec{r} \uparrow) \\ u(\vec{r} \downarrow) \end{pmatrix}, \quad u_\alpha = \hat{g}_{\alpha\beta} u^\beta, \quad u^\alpha = u_\beta \hat{g}^{\beta\alpha},$$

$$U(\sigma, \mu) = U^\sigma_\mu. \quad (3.2)$$

В нашей модели в нормальной области (обозначенной на Рис. 3.1 как “Rashba 2DEG”) оператор $U = \alpha[\hat{\sigma} \times \mathbf{p}] \cdot \mathbf{n}$ - спин-орбитальное взаимодействие, которое сохраняет симметрию по обращению времени. В сверхпроводниках взаимодействие Рашбы отсутствует, $U = 0$. Полагаем, что сверхпроводящая щель Δ является ступенчатой функцией: равняется нулю в нормальной области, и ее модуль $|\Delta|$ постоянен и одинаков в обоих сверхпроводниках. Эффектом близости можно пренебречь, поскольку обычно в джозефсоновских переходах через двумерный электронный газ сверхпроводящие острова массивны (трехмерны), и сверхпроводимость в них слабо подавляется нормальной областью - двумерным электронным газом.

Уравнение, которое связывает спектр возбуждения джозефсоновского перехода с матрицей рассеяния в нормальном состоянии \check{S} , было получено в работе [57]:

$$\det[1 - r_{he}\check{S}_e(\epsilon)r_{eh}\check{S}_h(\epsilon)] = 0, \quad (3.3)$$

где

$$r_{he} = \gamma r_A, \quad r_{eh} = \gamma r_A^*, \quad r_A = \begin{pmatrix} e^{i\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\chi/2} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = e^{-i \arccos(\epsilon/\Delta)}, \quad (3.4)$$

r_{he} - матрица андреевского отражения для $e \rightarrow h$ рассеяния в пространстве каналов падения (отражения) слева и справа N/S границы, $\pm\chi/2$ - фазы левого (правого) сверхпроводника, $\check{S}_{e(h)}$ - электронная (дырочная) матрица рассеяния в нормальном состоянии. Когда рассеяние не зависит от спина, матрица нормального рассеяния \check{S}_e тривиальна в спиновом пространстве, то есть

пропорциональна единичной матрице $\hat{\sigma}_0$. В дальнейшем, в пределе короткого контакта $L \ll \xi_{SC}$, матрицы рассеяния $\check{S}_{e,h}$ не зависят от энергии, кроме того $\check{S}_h = \check{S}_e^*$. Поэтому уравнение (3.3) может быть преобразовано к явному решению [57] для спин-вырожденных андреевских уровней, $\epsilon_j = \pm \sqrt{1 - \mathcal{T}_j \sin^2 \frac{\chi}{2}}$, где \mathcal{T}_j есть j -ое собственное значение матрицы вероятности прохождения $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ (собственные векторы этой матрицы определяют каналы рассеяния). Ниже мы показываем, что решение того же самого вида может быть получено и в присутствии спин-орбитального рассеяния.

В присутствии спин-орбитального взаимодействия матрица рассеяния в (3.3) становится зависящей от спина, но все еще удовлетворяет симметрии по обращению времени. Это позволяет обобщить вывод Беенаккера для андреевских уровней в коротком контакте [61], используя следующий набор соотношений для \check{S} -матрицы:

$$\begin{aligned} \check{S}\check{S}^\dagger &= 1, & \check{S}^T(-p_y) &= \hat{g}^T \check{S}(p_y) \hat{g}, \\ \check{S}_h(\epsilon, p_y) &= \hat{g}^T \check{S}_e^*(-\epsilon, -p_y) \hat{g}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где верхний индекс T означает полное матричное транспонирование. Первое соотношение в (3.5) - это условие унитарности, второе следует из симметрии по обращению времени (мы использовали здесь преобразование волновых функций под действием операции обращения времени, $\psi^{t-r}(p_y) = \hat{g}\psi^*(-p_y)$). Наконец, третье соотношение в (3.5) происходит из-за специальной симметрии уравнения Боголюбова-Де Жена: $\psi_h(\epsilon, p_y) = \hat{g}^T \psi_e^*(-\epsilon, -p_y)$.

Важно отметить изменение знака параметра p_y во втором и третьем соотношении выше: когда все состояния рассеяния характеризуются сохраняющимся импульсом (p_y), операция обращения времени содержит комплексное сопряжение и инверсию $p_y \rightarrow -p_y$, так как обращение по времени матрицы рассеяния должно изменить знак только у p_x , сохраняя p_y . Другими словами, дополнительная операция $p_y \rightarrow -p_y$ необходима из-за использования каналов рассеяния, характеризующихся *комплексными* собственными функциями

$\propto e^{ip_y y}$. Обычно же в вычислениях такого рода используется *реальный* базис каналов прохождения, при котором такая дополнительная операция отсутствует.

Используя соотношения (3.5), можно преобразовать уравнение (3.3) к виду:

$$\det \left[\frac{1}{\gamma} \hat{g}^T \check{S}_e^*(\epsilon, p_y) \hat{g} r_A^* - \gamma r_A^* \hat{g}^T \check{S}_e^*(-\epsilon, p_y) \hat{g} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Для короткого контакта $L \ll \xi_{SC}$, в уравнении (3.6) мы пренебрегаем зависимостью от энергии в матрице рассеяния, и получаем уравнение второго порядка относительно ϵ^2 , которое сводится к следующему решению:

$$\epsilon_{s,\eta}(p_y) = \eta \Delta \sqrt{1 - \mathcal{T}_s(p_y) \sin^2 \frac{\chi}{2}}, \quad (3.7)$$

где $\eta = \pm$ и $\mathcal{T}_s(p_y)$ - вероятности прохождения - собственные значения матрицы $\hat{T}^\dagger \hat{T}$, зависящие от спинового индекса $s = \pm$ и сохраняющегося импульса p_y . Вообще, $\mathcal{T}_+(p_y) \neq \mathcal{T}_-(p_y)$, таким образом каждому p_y значению соответствуют четыре невырожденных андреевских уровня, как показано на Рис. 3.3. Отметим, что в рамках нашей модели полный набор андреевских уровней все еще содержит попарное вырождение. А именно, вырождение существует между состояниями с $p_y = \pm |p_y|$. Ниже мы рассматриваем конкретный пример задачи рассеяния, имеющей отношение к структурам сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник, и вычисляем собственные значения $\mathcal{T}_s(p_y)$.

3.3 S-матрица и коэффициенты прохождения

Наша цель - исследовать специфические спин-орбитальные эффекты, и поэтому рассматриваем самую простую модель S/N границ, предполагая, что нормальное отражение электронов происходит только из-за разности Ферми-скоростей, $v_s \neq v_n$ (здесь v_s и v_n - скорости Ферми соответственно в сверхпроводящем металле и в двумерном электронном газе). Дополнительный ис-

точник отражения из-за эффективного потенциального барьера на границе (см. например [50]), можно было бы включить, но это не изменило бы наши результаты качественно.

Так как эффективная масса m_n в двумерном электронном газе сильно отличается от эффективной массы m в металлическом сверхпроводнике (типично, $m_n/m \approx 0.03$ для двумерных структур с InAs), то различие этих масс должно быть явно учтено. Наша первая цель теперь состоит в том, чтобы найти амплитуды отражения/прохождения на единичных S/N границах (для нормального состояния сверхпроводящего металла S). Мы будем следовать работе [56], и использовать уравнения непрерывности, которые следуют из уравнения Шредингера с пространственно-зависящей массой $m(x)$ и спин-орбитальным параметром $\alpha(x)$:

$$\left[\frac{\hat{p}_x}{m(x)} - \alpha(x) \right] \Psi \Big|_{N=S} = 0, \quad \Psi \Big|_{N=S} = 0, \quad (3.8)$$

где $F \Big|_{N=S}^S$ обозначают $F(x = -\frac{L}{2} + 0) - F(x = -\frac{L}{2} - 0)$ для левой границы (см. Рис. 3.1) и аналогично для правой границы, расположенной в $x = L/2$. Далее, $P_F = mv_s$ и $p_F = m_n v_n$ - Ферми-импульсы соответственно в металле S и в двумерном электронном газе; обычно $p_F \ll P_F$, тогда как v_s и v_n одинаковы по порядку величины. Ниже мы предположим, что параметр $\alpha/v_n \ll 1$, характеризующий относительную силу взаимодействия Рашбы, является малым по сравнению с разностью Ферми-скоростей, $\alpha \ll |v_s - v_n|$. При этом условии, амплитуды отражения на каждой из S/N границ определены только отношением v_n/v_s . Тогда амплитуды отражения и прохождения тривиальны в спиновом пространстве, например $\vec{r}_1^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \vec{r}_1$, и так далее. Для падающей волны, приходящей из $x = -\infty$, амплитуды отражения и прохождения на левой (1) границе:

$$\vec{r}_1 = \frac{w - 1}{1 + w}, \quad \vec{t}_1 = \frac{2}{1 + w}, \quad (3.9)$$

где $w = v_{nx}/v_{sx}$ - отношение x -компонент скоростей электрона, $v_{nx} = v_n \cos \varphi$

и $v_{sx} = [v_s^2 - (\frac{m_n}{m})^2 v_n^2 \sin^2 \varphi]^{1/2} \approx v_s$. Здесь φ - угол между направлением скорости и осью x в двумерном электронном газе; заметим, что v_{sx} - очень близко к v_s для любого угла φ , начиная с $(m_n/m)^2 \ll 1$. Другие амплитуды отражения/прохождения определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{r}_2 &= \overrightarrow{r}_1, & \overleftarrow{t}_2 &= \overrightarrow{t}_1, \\ \overleftarrow{r}_1 &= \overrightarrow{r}_2 = -\overrightarrow{r}_1, & \overleftarrow{t}_1 &= \overrightarrow{t}_2 = \frac{2w}{1+w}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Полная матрица рассеяния \check{S} перехода сверхпроводник/двумерный электронный газ Рашбы/сверхпроводник в нормальном состоянии, составленная из амплитуд на одной границе, имеет вид (подобные уравнения могут быть написаны для \hat{T}_2 и \hat{R}_2):

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= \overrightarrow{t}_2 \hat{S}^r \left[1 - \overleftarrow{r}_1 (\hat{S}^l)^{-1} \overrightarrow{r}_2 \hat{S}^r \right]^{-1} \overrightarrow{t}_1, \\ \hat{R}_1 &= \overleftarrow{t}_1 (\hat{S}^l)^{-1} \overrightarrow{r}_2 \hat{S}^r \left[1 - \overleftarrow{r}_1 (\hat{S}^l)^{-1} \overrightarrow{r}_2 \hat{S}^r \right]^{-1} \overrightarrow{t}_1 + \\ &+ \overrightarrow{r}_1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где \hat{R} и \hat{T} - блоки отражения и прохождения в матрице рассеяния:

$$\check{S} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 & \hat{T}_2 \\ \hat{T}_1 & \hat{R}_2 \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

индекс 1 в амплитудах \hat{R} , \hat{T} в уравнении (3.11) означает, что уравнения написаны для случая электрона, распространяющегося слева направо. Матрицы в спиновом пространстве $\hat{S}^{r(l)}$ описывают вращение спина при распространении электрона в области двумерного электронного газа со взаимодействием Рашбы между двумя S/N границами. Явная форма этих матриц может быть получена преобразованием собственных мод плоской волны с определенной киральностью к спиновому базису с определенной проекцией S^y :

$$\begin{aligned} \hat{S}^r &= e^{i\xi} [\cos A - i \sin A \sin \varphi \hat{\sigma}^x + i \sin A \cos \varphi \hat{\sigma}^z], \\ (\hat{S}^l)^{-1} &= e^{i\xi} [\cos A - i \sin A \sin \varphi \hat{\sigma}^x - i \sin A \cos \varphi \hat{\sigma}^z]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\xi(\epsilon) = k(\epsilon)L$, где $k(\epsilon) = k + m\epsilon/k$ и $k = p_F \cos \varphi$; $\xi(\epsilon)$ - это главная квазиклассическая фаза, тогда как $A = m_n \alpha L / \cos \varphi$ - дополнительная фаза, возникающая из-за вращения спина в потенциале Рашбы. В рамках нашего приближения $\alpha/v_n \ll 1$ весь эффект от спаривания Рашбы содержится в фазе A , которая не является малой, если длина L перехода сравнима или больше спин-орбитальной длины $L_{so} = 2\pi\hbar/m_n\alpha$.

Для удобства мы вводим новый параметр $x = \log \frac{1+w}{1-w}$, где w определен после уравнения (3.9). Объединяя уравнения (3.11) и (3.13), мы получаем матрицу прохождения в виде:

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 &= T_0 + T_1 \hat{\sigma}^x + T_3 \hat{\sigma}^z, \\ \hat{T}_2 &= T_0 + T_1 \hat{\sigma}^x - T_3 \hat{\sigma}^z,\end{aligned}\tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned}T_0 &= t \sinh(x - i\xi) \cos A, \\ T_1 &= -i t \cosh(x - i\xi) \sin A \sin \varphi, \\ T_3 &= i t \sinh(x - i\xi) \sin A \cos \varphi,\end{aligned}\tag{3.15}$$

где мы обозначили

$$t = \frac{\sinh x}{\sinh^2(x - i\xi) + \sin^2 A \sin^2 \varphi}.\tag{3.16}$$

Матрица отражения \hat{R} имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{R}_1 &= R_0 + R_1 \hat{\sigma}^x + R_2 \hat{\sigma}^y, \\ \hat{R}_2 &= R_0 + R_1 \hat{\sigma}^x - R_2 \hat{\sigma}^y,\end{aligned}\tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}R_0 &= t \left[\coth x \sin^2 A \sin^2 \varphi - i \frac{\sin \xi}{\sinh x} \sinh(x - i\xi) \right], \\ R_1 &= \frac{i}{2} t \sin 2A \sin \varphi, \\ R_2 &= \frac{i}{2} t \sin^2 A \sin 2\varphi.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Теперь мы используем уравнения (3.14, 3.15), чтобы получить вероятности прохождения как собственные значения матрицы $\hat{T} = \hat{T}^\dagger \hat{T}$:

$$\mathcal{T}_\pm(\xi, x(\varphi)) = \frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x + \sin^2(\xi \pm \frac{\beta}{2})}, \quad (3.19)$$

где фаза β , определенная как

$$\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \varphi \sin^2 A, \quad (3.20)$$

возникает из-за взаимодействия Рашбы. Уравнение (3.19) явно демонстрирует спин-расщепление коэффициентов прохождения \mathcal{T}_\pm . Заметим, что $\beta = 0$, и расщепление отсутствует для траекторий с $\varphi = 0$, как было показано для одномерного (один канал) контакта [54]. В отсутствии нормального отражения, то есть при $x \rightarrow \infty$, все собственные значения прохождения равны единице, и спин-орбитальные эффекты также исчезают [53].

Влияние спин-орбитального взаимодействия на \mathcal{T}_\pm сводится, согласно уравнению (3.19), к сдвигу главной квазиклассической фазы, $\xi \rightarrow \xi \pm \beta/2$, в согласии с результатом, представленным в уравнении (1) из работы [52]. Пример зависимости коэффициентов прохождения \mathcal{T}_\pm , как функций угла падения, показан на Рис. 3.2. Важно заметить, что эта зависимость является нечетной относительно замены $\varphi \rightarrow -\varphi$, см. уравнение (3.20). Эта симметрия несет “след” вырождения Крамерса, которое, как известно, существует для коэффициентов прохождения, определенных в рамках *реального* базиса состояний рассеяния (заметим, что доказательство Крамерсовского вырождения коэффициентов прохождения [58] намного сложнее доказательства стандартной теоремы Крамерса для вырождения уровней энергии). Мы характеризуем состояния рассеяния комплексными волнами распространения $e^{ip_y y}$, что приводит к нарушению симметрии по обращению времени. Поэтому теорема Крамерса не применима к нашей модели, и возможно спин-расщепление, имеющееся в уравнении (3.19)¹. Из уравнения (3.19) следует, что квазиклас-

¹Мы благодарны Карло Беенаккеру за обсуждение этого вопроса, и указание на работу [58]

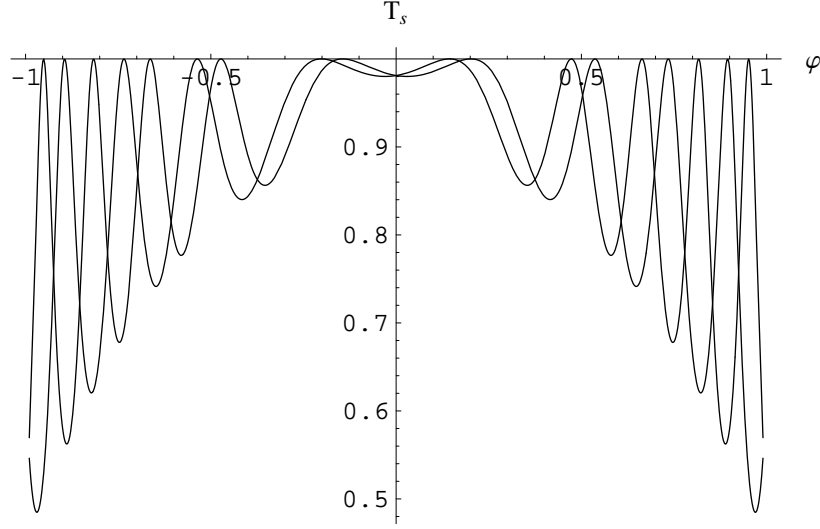


Рис. 3.2: Зависимость спин-расщепленных коэффициентов прохождения T_s , $s = \pm 1$, от угла распространения φ квазичастиц в двумерном электронном газе. Здесь использовались параметры, соответствующие реалистическому SNS переходу: $v_s = 7 \cdot 10^7 \text{cm/s}$, $v_n = 5 \cdot 10^7 \text{cm/s}$, $m = m_e$, $m_n = 0.035m_e$, $m_n \alpha / \hbar = 5 \cdot 10^4 \text{cm}^{-1}$, $L = 190 \text{nm}$. Для этих параметров и для значения сверхпроводящей щели $\Delta = 1.4 \text{meV}$: (1) длина контакта L короче длины когерентности, $\xi_{SC} = \hbar v_s / \Delta = 330 \text{nm}$; (2) скорость Рашбы намного меньше скорости Ферми в двумерном электронном газе, $\alpha / v_n \approx 0.03$; (3) систему можно изучать в рамках квазиклассического предела, $p_F L / \hbar = m_n v_n L / \hbar \approx 30$; (4) спин-орбитальное расщепление $2\alpha p_F \approx 3.3 \text{meV}$ больше сверхпроводящей щели Δ ; (5) S/N границы почти прозрачны ($v_s / v_n \approx 1.4$), что позволяет наблюдать большое экспериментальное значение критического тока.

сическое среднее любой физической величины, которая может быть выражена как сумма членов, содержащих отдельные \mathcal{T} переменные (то есть не содержащих смешанных членов наподобие $\mathcal{T}_+\mathcal{T}_-$), не зависит от SO спаривания. Действительно, при вычислении любой средней величины в нашей модели происходит интегрирование по компоненте импульса p_y , параллельной границам (или по углу распространения φ , определенного как $p_y = p_F \sin \varphi$). Подынтегральное выражение, как функция φ , содержит быстрые осцилляции с характерным масштабом $1/p_FL$, и относительно медленную зависимость от $\cos \varphi$. Поэтому удобно сначала усреднить по быстрым осцилляциям, используя распределение вероятности коэффициентов прохождения:

$$\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{T}_\pm) = \int \delta(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\pm(\xi, x(\varphi))) d\xi. \quad (3.21)$$

Ясно, что присутствие сдвига фазы $\pm\beta$ не изменяет распределение вероятности, которое имеет тот же самый вид как, например, в работе [59], и не зависит от спин-орбитального спаривания:

$$\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{T}) = \frac{\tanh x}{2\mathcal{T}\sqrt{1-\mathcal{T}}\sqrt{\mathcal{T}-\tanh^2 x}}. \quad (3.22)$$

Теперь рассмотрим, как самый простой пример, вычисление средней проводимости контакта в нормальном состоянии. Проводимость записывается как

$$G = G_Q \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{\pi} \int \mathcal{T} \mathcal{P}_\varphi(\mathcal{T}) d\mathcal{T}. \quad (3.23)$$

Универсальность функции распределения $\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{T})$ приводит к независимости средней проводимости G , так же как и других величин, которые могут быть выражены через эти функции распределения, от спин-орбитальной фазы A (напомним, что мы пренебрегли слабыми эффектами порядка $\alpha/v_n \ll 1$). Заметим еще раз, что вышеупомянутые простые рассуждения неприменимы к вычислению любой величины, которая *не является аддитивной* как функция разных каналов прохождения, то есть которая содержит произведения разных коэффициентов прохождения.

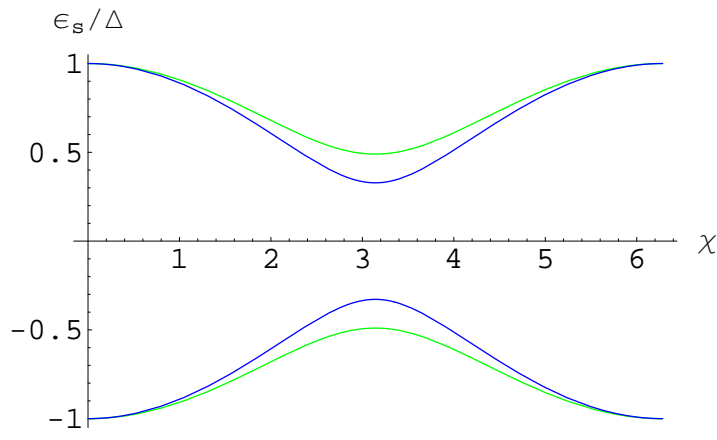


Рис. 3.3: Четыре спин-расщепленных андреевских уровня $\pm\epsilon_s$, $s = \pm 1$, как функции разницы сверхпроводящих фаз χ , показанные для значения угла распространения $\varphi = \pi/5$, и для реалистических контактов сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник с параметрами $v_s = 7 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$, $v_n = 5 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$, $\alpha \approx 0.2 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$, $m = m_e$, $m_n = 0.035m_e$, $L = 190 \text{ nm}$.

3.4 Джозефсоновский ток

Уравнение для андреевских уровней (3.7) и уравнение (3.19) для коэффициентов прохождения составляют центральный результат этой Главы. Теперь можно вычислить джозефсоновский ток [57]:

$$I(\chi) = \frac{e\Delta^2}{2\hbar} \sin \chi \int \frac{L_y dp_y}{2\pi\hbar} \sum_{s=\pm 1} \frac{\mathcal{T}_s(p_y)}{\epsilon_{s,+}(\chi)} \tanh \frac{\epsilon_{s,+}(\chi)}{2T}. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) применимо для джозефсоновского тока при конечной температуре в пределе короткого контакта. В квазиклассическом пределе $p_F L \rightarrow \infty$ *средний* джозефсоновский ток может быть вычислен при помощи функции распределения $\mathcal{P}_\varphi(T)$, уравнение (3.22), следующим образом:

$$I(\chi) = \frac{e\Delta}{2\hbar} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\varphi \cos \varphi}{\pi} \times \int \mathcal{P}_\varphi(T) dT \frac{\mathcal{T} \sin \chi}{\sqrt{1 - \mathcal{T} \sin^2 \frac{\chi}{2}}} \tanh \frac{\Delta \sqrt{1 - \mathcal{T} \sin^2 \frac{\chi}{2}}}{2T}. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) демонстрирует независимость среднего джозефсоновского тока от спин-орбитального спаривания. Такой средний ток является осмыс-

ленной характеристикой контакта, если оба продольных размера контакта намного больше фермиевской длины волны, $L, L_y \gg \hbar/p_F$.

Вопрос об осцилляциях I_c как функции электронной плотности обсуждался теоретически в работе [50] в рамках модели, очень похожей на здесь рассматриваемую (но без спаривания Рашбы). Утверждалось, что осцилляции должны появиться из-за существования нормальных резонансов в структуре двойного барьера, наподобие тех описанных в нашем уравнении (3.19), как функции $\xi = p_F L \cos \varphi$. Сильный эффект вращения спина, ожидаемый при $L \geq L_{so}$, создает дополнительную фазу $\beta \sim 1$, которая приводит к расщеплению резонансов как функций $p_F L$. Вследствие этого, при $L \geq L_{so}$, осцилляции, обсуждаемые в работе [50] будут иметь период в два раза короче, и уменьшенную амплитуду.

3.5 Уравнение на спектр и ток для контакта произвольной длины

В этом разделе мы находим уравнение, определяющее андreeвские уровни для контакта произвольной длины, и показываем, что квазиклассическое среднее джозефсоновского тока не зависит от SO спаривания для любого отношения L/ξ_{SC} . Используем альтернативный метод вычисления: вместо выражения андreeвских уровней через собственные значения матрицы прохождения, сшиваем волновые функции, удовлетворяющие уравнениям БДЖ в двумерном электронном газе и в обеих сверхпроводящих областях. Для упрощения вычислений, в этом разделе мы рассмотрим модель равных эффективных масс, $m_n = m$. Собственные функции уравнения БДЖ для перехода сверхпроводник - двумерный электронный газ - сверхпроводник могут быть представлены как 8-мерные векторы, так как они содержат три 2-мерных блока: i) электронные и дырочные компоненты ii) две проекции спина, и iii) два

направления импульса вдоль оси x , $p_x = \pm p_F |\cos \varphi|$. Условия сшивки для волновых функций на обоих S/N границах состоят из 16 скалярных уравнений, которые связывают 8 компонент волновой функции в области двумерного электронного газа с 4 компонентами в каждом из сверхпроводящих островов (последние экспоненциально затухают вглубь сверхпроводников, если соответствуют андреевским уровням, лежащим под щелью). Следующий шаг - свести эту систему из 16 уравнений к 8 уравнениям: либо на $4+4=8$ объединенных амплитуд волновых функций в обоих сверхпроводниках, либо на 8 амплитуд волновой функции в нормальной области. Условие разрешимости этой системы из 8 линейных уравнений эквивалентно условию зануления соответствующего детерминанта, $g(\epsilon, \chi) = 0$ (который эквивалентен определенному в уравнении (3.6)).

Приведем здесь вывод системы уравнений на амплитуды волновой функции - стоячей волны - в нормальной области.

Вводим сокращенные обозначения для волновых функций - решений уравнения БдЖ.² В сверхпроводниках волновые функции удобно записать в виде:

$$\Psi_{S, left}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_l(x) A_{left}, \quad \Psi_{S, right}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_r(x) A_{right}, \quad (3.26)$$

где $A_{left, right}$ - это 4-компонентные спиноры, описывающие состояния электрона в левом (правом) сверхпроводнике, причем волновые функции электрона,

²см. уравнения (Г.6) и (Г.7) из раздела Г Приложений

соответствующие этим состояниям, должны стремиться к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

$$S_l(x) = \begin{pmatrix} e^{-iKx_+} & e^{iKx_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iKx_+} & e^{iKx_+} \\ z_l e^{-iKx_+} & w_l e^{iKx_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_l e^{-iKx_+} & -w_l e^{iKx_+} \end{pmatrix} e^{\delta K x_+},$$

$$S_r(x) = \begin{pmatrix} e^{iKx_-} & e^{-iKx_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{iKx_-} & e^{-iKx_-} \\ z_r e^{iKx_-} & w_r e^{-iKx_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_r e^{iKx_-} & -w_r e^{-iKx_-} \end{pmatrix} e^{-\delta K x_-}, \quad (3.27)$$

где $x_{\pm} = x \pm L/2$, $z_{l(r)} = \exp(-i\gamma - i\chi_{l(r)})$, $w_{l(r)} = \exp(i\gamma - i\chi_{l(r)})$, $\gamma = \arccos \frac{\epsilon}{\Delta}$ - стандартный множитель, зависящий от энергии, $\chi_{l,r}$ - фаза левого (правого) сверхпроводника. Квазиклассический волновой вектор $K = \sqrt{2M\mu - p^2}$ в сверхпроводниках не зависит от Δ и ϵ ³. Мнимая часть волнового вектора $\pm i\delta K$, где $\delta K = M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}/K$, отвечает за экспоненциальное затухание волновой функции вглубь левого и правого сверхпроводников. В этом разделе, при нахождении уравнения на спектр, можно пренебречь мнимой частью $\pm i\delta K$ по сравнению с главным квазиклассическим волновым вектором K .

Пусть волновая функция электрона в металле Рашбы описывается двумя четырех-компонентными спинорами: соответствующими движению направо B_+ и налево B_- . Тогда 4-компонентная волновая функция⁴ примет вид:

$$\Psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} L(x) B_- + \frac{1}{\sqrt{2}} R(x) B_+, \quad (3.28)$$

³в уравнениях (Г.4, Г.5) из раздела Г Приложений делаем разложение $k_{\pm}^l = -k_{\pm}^r = \mp K - i\delta K$

⁴уравнение (Г.11) из раздела Г Приложений

где $L(x) = R^*(x)$, и $R(x)$ равно:

$$\begin{pmatrix} e^{ik_+^e x} & e^{ik_-^e x} & 0 & 0 \\ ie^{i\varphi+ik_+^e x} & -ie^{i\varphi+ik_-^e x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_+^h x} & e^{ik_-^h x} \\ 0 & 0 & -ie^{i\varphi+ik_+^h x} & ie^{i\varphi+ik_-^h x} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

где индексы \pm соответствуют киральности λ . Раскладываем соответствующий волновой вектор ⁵ по малым параметрам $|\epsilon|/\epsilon_F$ и $\alpha p_F/\epsilon_F$, и получаем: $k_\lambda^e = k + \lambda t \alpha p_F/k + t\epsilon/k$, $k_\lambda^h = k + \lambda t \alpha p_F/k - t\epsilon/k$, где $k = \sqrt{2m\mu_R - p^2}$. Так как при движении электрона от левой к правой границе или обратно может накопиться фаза, то мы будем удерживать поправки к волновому вектору k только в том случае, если они домножаются на толщину нормального слоя L . Собственные функции электрона в металле Рашбы (столбцы матрицы (3.29)) зависят от угла направления импульса φ посредством $p_F \cos \varphi = k$ и $p_F \sin \varphi = p$. В спинорах (3.29) и далее мы пренебрегаем поправками к этой фазе, малыми по параметру $|\epsilon|/\epsilon_F$ и $\alpha p_F/\epsilon_F$.

Условие непрерывности волновой функции на правой границе имеет вид:

$$S_r \left(\frac{L}{2} \right) A_{right} = L \left(\frac{L}{2} \right) B_- + R \left(\frac{L}{2} \right) B_+, \quad (3.30)$$

а условие непрерывности производной волновой функции на правой границе имеет вид:

$$\frac{dS_r}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) A_{right} = -ikL \left(\frac{L}{2} \right) B_- + ikR \left(\frac{L}{2} \right) B_+. \quad (3.31)$$

Разрешаем эти два уравнения относительно четырех компонент A_{right} и находим условие рассеяния на правой границе

$$-(ik + S_r(\chi_r))L \left(\frac{L}{2} \right) B_- + (ik - S_r(\chi_r))R \left(\frac{L}{2} \right) B_+ = 0, \quad (3.32)$$

⁵Это разложение точных формул (Г.10) из раздела Г Приложений.

где

$$S_r(\chi_r) = \frac{d}{dx} S_r(x) [S_r(x)]^{-1} \text{ при } x = \frac{L}{2}. \quad (3.33)$$

Подобным образом находим условие рассеяния на левой границе:

$$-(ik + S_l(\chi_l))L \left(-\frac{L}{2}\right) B_- + (ik - S_l(\chi_l))R \left(-\frac{L}{2}\right) B_+ = 0, \quad (3.34)$$

причем $S_l(\chi) = -S_r(\chi) = -S(\chi)$, где

$$S(\chi) = \frac{K}{\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & -\Delta e^{i\chi} & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \Delta e^{i\chi} \\ \Delta e^{-i\chi} & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & -\Delta e^{-i\chi} & 0 & -\epsilon \end{pmatrix} - \delta K \hat{1}, \quad (3.35)$$

причем в вычислениях вторым слагаемым δK (определенным после уравнений (3.27)) пренебрегаем в силу малости отношения Δ/E_{FS} .

Система из восьми уравнений (3.32, 3.34) на компоненты спиноров B_- и B_+ имеет ненулевое решение, если детерминант этой системы $g(\epsilon, \chi)$ равен нулю. После некоторых вычислений, уравнение $g(\epsilon, \chi) = 0$ (которое и является уравнением на спектр) может быть преобразовано к следующему виду:

$$g(\epsilon, \chi) \equiv g_+(\epsilon, \chi)g_-(\epsilon, \chi) = 0, \\ g_{\pm}(\epsilon, \chi) = \cos 2\xi - Q \cos \beta \pm \sqrt{1 - Q^2} \sin \beta, \quad (3.36)$$

где параметр β определен в (3.20), $\chi = \chi_r - \chi_l$ - сверхпроводящая разность фаз.

$$Q = \cos \Psi + \frac{4k^2 K^2 \Delta^2 (\cos \Psi + \cos \chi)}{(K^2 - k^2)^2 (\Delta^2 - \epsilon^2)}, \\ \Psi = 2 \arctan \frac{2kK\epsilon}{(K^2 + k^2)\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}} + \mathcal{E}, \quad (3.37)$$

где $\mathcal{E} = 2m\epsilon L/k$ - зависящая от энергии часть фазы $\xi(\epsilon)$. Из уравнения (3.36) видно, что в присутствии взаимодействия Рашбы, для контакта произвольной длины, спин-расщепление является общей характеристикой андреевских уровней.

В пределе нулевого спин-орбитального взаимодействия $\alpha = 0$, а также для электронных траекторий с $p_y = \varphi = 0$, спектральное уравнение (3.36) сводится к стандартному уравнению $\cos 2\xi = Q$ с двукратно вырожденным (благодаря спину) решением. В специальном случае идеально прозрачных границ $p_F = P_F$ общее спектральное уравнение (3.36) также сводится к стандартному уравнению $\cos 2\xi = Q$, которое теперь упрощается:

$$\cos\left(-\mathcal{E} + 2 \arccos \frac{\epsilon}{\Delta}\right) = \cos \chi. \quad (3.38)$$

Для относительно короткого контакта с $0 < \mathcal{E} \ll 1$ мы раскладываем уравнение андреевского спектра (3.36) по степеням малого параметра $\kappa = \frac{m\Delta L}{k}$, и находим первую поправку к результату (3.7), полученному в разделе 3.2, в пределе $\kappa \rightarrow 0$:

$$\epsilon_{\pm} = \Delta \sqrt{1 - \mathcal{T}_{\pm} \sin^2 \frac{\chi}{2}} \left(1 - \kappa \mathcal{T}_{\pm}^{3/2} \left|\sin \frac{\chi}{2}\right| \coth x\right), \quad (3.39)$$

где \mathcal{T}_{\pm} определены в уравнении (3.19).

В общем случае контакта произвольной длины, спектральное уравнение (3.36) слишком сложное, чтобы его можно было явно решить для энергий андреевских уровней. Кроме того, нужно помнить, что для переходов с произвольным L/ξ отношением непрерывная часть спектра (состояния рассеяния) вносит свой вклад в джозефсоновский ток так же, как и локализованные уровни, которые мы рассмотрели. Тем не менее, полный джозефсоновский ток (который переносится одновременно и локализованными андреевскими уровнями, и непрерывной частью спектра) может быть найден методом, изложенным в работе [62], для чего нужно лишь знание спектральной функции $g(\epsilon, \chi)$. Мы будем использовать уравнения (I.9), (A.48) и (A.49) из работы [62], измененные в нашем случае из-за присутствия спин-расщепления, и непрерывных каналов рассеяния, характеризующихся поперечным импульсом p_y . Поэтому полный ток содержит интеграл по всем p_y :

$$I_{\text{total}}(\chi) = L_y \frac{4e}{\hbar} T \sum_{s=\pm} \int \frac{dp_y}{2\pi\hbar} \sum_{\omega_n > 0} \partial_{\chi} \ln g_s(i\omega, \chi), \quad (3.40)$$

здесь интегрирование идет по положительным Мацубаровским частотам: $\omega = 2\pi T(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$

В рамках квазиклассического предела ($Lp_F \gg 1$), вычисление интеграла по p_y в уравнении (3.40), может быть выполнено тем же самым методом, который ранее использовался в последней части раздела 3.3. А именно, мы сначала усредняем по периоду быстрых осцилляций $\cos \xi \equiv \cos(kL)$ при фиксированном угле φ , а затем интегрируем по φ . Интегрирование $\int_0^\pi d\xi \dots$ в уравнении (3.40) приводит к результату, который не содержит спин-орбитальную фазу β :

$$I_{\text{total}}(\chi) = -L_y \cdot p_F \frac{4e}{\hbar^2} T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\pi} \cos \varphi \frac{\partial_\chi Q}{\sqrt{|1 - Q^2|}}, \quad (3.41)$$

где $Q \equiv Q(\epsilon = i\omega_n, \chi)$, как определено в уравнении (3.37), и мы приняли во внимание, что $dp_y = p_F \cos \varphi d\varphi$. Уравнение (3.41) демонстрирует, что квазиклассическое среднее джозефсоновского тока через контакт сверхпроводник/двумерный электронный газ Рашбы/сверхпроводник *не зависит* от константы взаимодействия Рашбы, и этот результат верен для произвольной разности Ферми-скоростей, и произвольной длины контакта. Отметим, что этот результат верен до тех пор, пока не учтено электрон-электронное взаимодействие в области двумерного электронного газа.

3.6 Спиновая поляризация

Симметрия задачи джозефсоновского перехода через двумерный электронный газ со взаимодействием Рашбы позволяет возникновение спиновой поляризации $\langle \hat{S}^y \rangle$ в области двумерного электронного газа при ненулевом сверхпроводящем токе, см. например работу [55]. Нарушенная симметрия инверсии вдоль оси z и нарушенная t -инвариантность (протекание тока вдоль оси x) разрешают существование аксиального вектора (спиновой поляризации) в перпендикулярном направлении: $\vec{n} \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$ (здесь \vec{e}_x - направление протека-

ния тока, \vec{e}_y - направление спиновой поляризации, \vec{n} - нормаль к поверхности 2DEG).

Среднюю спиновую поляризацию (на единицу площади) вычисляем по общей квантово-механической формуле:

$$\langle \hat{S}^y \rangle(x) = \frac{\hbar}{2L_y} \sum_{s=\pm} \sum_{p_y} \frac{\Psi_R^\dagger(x, p_y) \hat{\Sigma}_y \Psi_R(x, p_y)}{N(p_y)}, \quad (3.42)$$

где

$$N(p_y) = \int_{-\infty}^{-L/2} \Psi_{S, left}^\dagger(x, p_y) \Psi_{S, left}(x, p_y) dx + \int_{-L/2}^{L/2} \Psi_R^\dagger(x, p_y) \Psi_R(x, p_y) dx + \int_{L/2}^{\infty} \Psi_{S, right}^\dagger(x, p_y) \Psi_{S, right}(x, p_y) dx \quad (3.43)$$

нормировочный множитель волновой функции, соответствующей квазичастице с данным p_y ; L_y - ширина контакта в направлении поперечном к току; $\Psi_{S, left}(x, p_y)$, $\Psi_{S, right}(x, p_y)$, $\Psi_R(x, p_y)$ - волновые функции соответственно левого, правого сверхпроводника, и нормального слоя, даются формулами (3.26, 3.28).

$$\hat{\Sigma}_y = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^y & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}^y \end{pmatrix}$$

оператор матрицы Паули в пространстве Намбу. Волновые функции, соответствующие определенному p_y , подразумеваются зависящими и от энергии андреевского уровня: $\Psi(x; p_y) = \Psi(x; p_y, \epsilon_{s, \eta}(p_y))$, поэтому в формуле (3.42) производится также суммирование и по андреевским состояниям (каждому p_y соответствует 4 спин-расщепленных андреевских уровня, см. Рис. 3.3). Мы рассматриваем случай $T = 0$, когда заполнены только состояния с $\epsilon_{s, \eta} < 0$, поэтому суммирование ($s = \pm$) ведется только по двум нижним отрицательным (соответствующим $\eta = -$) расщепленным (благодаря спин-орбитальному взаимодействию) андреевским уровням. Рассматриваем случай короткого контакта ($L \ll \xi_{SC}$), поэтому для энергии андреевских уровней пользуемся формулой (3.7). В случае короткого контакта упрощается также вид матриц $L(x)$,

$R(x)$ (уравнение (3.29)), в которых пренебрегаем зависимостью от энергии в волновых векторах, $k_\lambda^e = k_\lambda^h$.

Считаем, что вдоль оси y система трансляционно-инвариантна (с циклическими граничными условиями), поэтому зависящая от y часть волновой функции, одинаковая для всех трех областей, имеет вид бегущей волны: $\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{ip_y y}$ (и в нормировке (3.43) уже взят интеграл по y : $\int \chi^\dagger(y)\chi(y) dy = 1$). Конечная толщина перехода и периодические граничные условия $\chi(0) = \chi(L_y)$ приводят к квантованию y - проекции импульса:

$$p_{y,n} = \frac{2\pi\hbar}{L_y} n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (3.44)$$

то есть к квантованию разрешенных углов распространения квазичастиц в нормальном слое:

$$\varphi_n = \arcsin \left(\frac{2\pi\hbar n}{L_y m_n v_n} \right). \quad (3.45)$$

Формула (3.42) определяет значение в данной точке x *полной* плотности спиновой поляризации, поэтому в ней производится суммирование по *всем* траекториям (соответствующим разным p_y). В пределе очень широкого контакта ($L \rightarrow \infty$) суммирование перейдет в интегрирование:

$$\sum_{p_y} f(p_y) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} f(\varphi_n) \rightarrow L_y \int \frac{dp_y}{2\pi\hbar} f(p_y),$$

где φ_n дается формулой (3.45); $N_{\max} = \text{Round} \left[\frac{p_F L_y}{2\pi\hbar} \right]$, где $\text{Round}[a]$ означает наиболее близкое к a целое число, меньшее чем a .

Уравнения (3.32, 3.34), определяющие коэффициенты $B_\pm(\epsilon_{s,\eta})$, в сокращенных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} (f_r - f_l)B_+ &= 0, \\ B_- &= f_r B_+, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $f_{r(l)} = L_{r(l)}^{-1} (ik + s_{r(l)})^{-1} (ik - s_{r(l)}) R_{r(l)}$, и введены обозначения $R_{r(l)} = R(\pm \frac{L}{2})$, $L_{r(l)} = L(\pm \frac{L}{2})$, $s_r = S_r(\chi_r)$, $s_l = S_l(\chi_l)$. Явный вид коэффициентов $B_\pm(\epsilon_{s,\eta})$ громоздок и представить их в аналитическом обозримом виде

нельзя. Поэтому далее явные графики волновых функций, зависимости спиновой поляризации от разных параметров в задаче находятся численно, при конкретных фиксированных остальных параметрах.

Заметим, что в рассматриваемом случае короткого контакта вся зависимость от энергии в коэффициентах $B_{\pm}(\epsilon_s, \eta)$ берется из “сверхпроводящих” матриц $S_{r(l)}(\epsilon_s, \eta)$, уравнение (3.35).

Волновые функции в металле Рашбы и сверхпроводниках, определенные через громоздкие коэффициенты B_{\pm} (3.46), соответствующие локализованному Андреевскому состоянию, даются формулами:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{R}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(L(x)B_- + R(x)B_+), \\ \Psi_{\text{S,left}}(x) &= S_l(x) \left[S_l \left(-\frac{L}{2} \right) \right]^{-1} \Psi_{\text{R}} \left(-\frac{L}{2} \right), \\ \Psi_{\text{S,right}}(x) &= S_r(x) \left[S_r \left(\frac{L}{2} \right) \right]^{-1} \Psi_{\text{R}} \left(\frac{L}{2} \right),\end{aligned}\quad (3.47)$$

где матрицы $S_{r(l)}(x)$ определены в уравнениях (3.27).

Квадраты модулей волновых функций в трех областях SNS контакта, при фиксированном угле φ , имеют следующую простую зависимость от x -координаты:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{R}}^{\dagger}(x)\Psi_{\text{R}}(x) &= B_-^{\dagger}B_- + B_+^{\dagger}B_+ + \left(B_+^{\dagger}\text{rl}(x)B_- + h.c. \right), \\ \text{rl}(x) &= \frac{1}{2}R^{\dagger}(x)L(x) = \\ &= \begin{pmatrix} M_{\text{rl}} & 0 \\ 0 & M_{\text{rl}} \end{pmatrix}, \quad M_{\text{rl}} = e^{-2i\xi x/L}e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} e^{-2iAx/L}i \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & e^{2iAx/L}i \sin \varphi \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.48)$$

и в формуле (3.48) мы использовали $\text{rl}^T(x) = \text{rl}(x)$, $L(x) = R^*(x)$: $B_-^{\dagger}\text{lr}(x)B_+ = B_-^{\dagger}\text{rl}^{\dagger}(x)B_+ = \left(B_+^{\dagger}\text{rl}(x)B_- \right)^*$.

Из уравнения (3.48) видно, что квадрат модуля волновой функции в нормальном слое быстро осциллирует на длине волны Ферми как $\cos 2\xi x/L$, и

имеет медленную огибающую типа $\cos 2Ax/L$. Здесь мы определяем фермиевскую и спин-орбитальную длину волны в нормальном слое как: $\lambda_{Fn} = \frac{2\pi\hbar}{m_n v_n}$, $L_{so} = \frac{2\pi\hbar}{m_n \alpha}$. Согласно этим определениям и согласно уравнению (3.48), а также ввиду равенств $A = m_n \alpha L / \hbar \cos \varphi$ и $\xi = m_n v_n L \cos \varphi / \hbar$, на длине контакта L приходится $n_F = 2 \cos \varphi \frac{L}{\lambda_{Fn}}$ фермиевских и $n_{so} = \frac{2}{\cos \varphi} \frac{L}{L_{so}}$ “спин-орбитальных” осцилляций.

$$\begin{aligned} \Psi_{S,left}^\dagger(x) \Psi_{S,left}(x) &\propto \frac{1}{2} S_l^\dagger(x) S_l(x) = \begin{pmatrix} M_{ss} & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{pmatrix}, \\ M_{ss}(x_+) &= e^{2\delta K x_+} \begin{pmatrix} 1 & e^{2iKx_+}(1 + e^{2i\gamma}) \\ e^{-2iKx_+}(1 + e^{-2i\gamma}) & 1 \end{pmatrix}, \\ \Psi_{S,right}^\dagger(x) \Psi_{S,right}(x) &\propto \frac{1}{2} S_r^\dagger(x) S_r(x) = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{ss} & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{ss} \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_{ss}(x) &= M_{ss}(-x_-). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Из формулы (3.49) видно, что вероятность найти квазичастицу в сверхпроводниках экспоненциально падает на расстоянии порядка длины когерентности поскольку $\delta K \propto \xi_{SC}^{-1}$ (сверхпроводящая длина когерентности определена как $\xi_{SC} = \frac{\hbar v_s}{\Delta}$), а также осциллирует с Ферми-периодом $\frac{\pi}{K}$ (где $K = \sqrt{m_s^2 v_s^2 - m_n^2 v_n^2 \sin^2 \varphi} / \hbar$). В сверхпроводниках период фермиевских осцилляций меньше, чем в нормальном слое, т. к. $v_s > v_n$.

На Рис. 3.4 изображен пример зависимости от координаты x пары квадратов модулей волновых функций, соответствующих двум спин-расщепленным отрицательным андреевским уровням в одном и том же канале p_y . Заметим, что график волновых функций, соответствующий положительной паре андреевских уровней, совпадает с показанным на рисунке.

Норму $N(p_y)$, уравнение (3.43), можно легко проинтегрировать по x , используя явную зависимость от координаты входящих в нее вели-

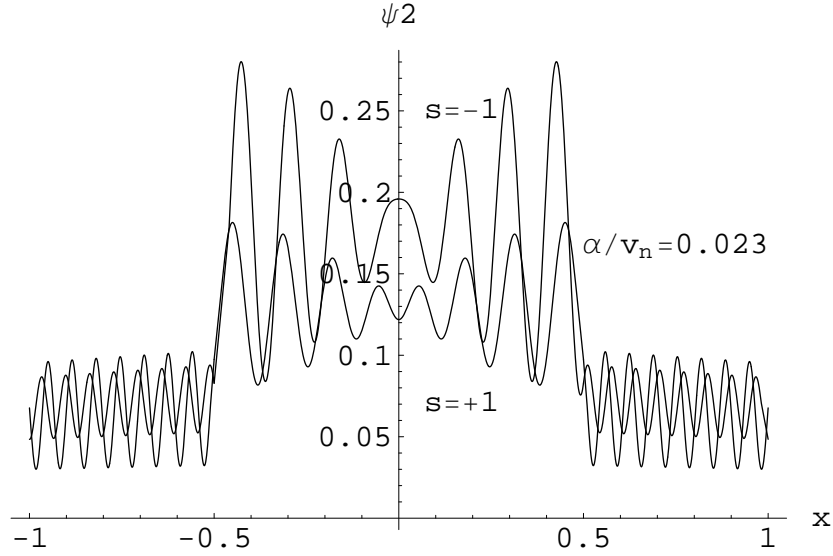


Рис. 3.4: Изображена зависимость квадрата модуля отнормированной волновой функции электрона, $\frac{1}{N(p_y)}\Psi^\dagger(x, p_y)\Psi(x, p_y)$, от координаты x в канале, характеризующимся углом φ . Две волновые функции (с пометками $s = \pm 1$) соответствуют двум спин-расщепленным андреевским состояниям с отрицательной энергией. На рисунке область двумерного электронного газа расположена между координатами $x = \pm L/2 = \pm 0.5$, и выбраны параметры: $\varphi = 1$, $\chi = 1$, $\alpha/v_n = 0.023$, $v_n/v_s = 5/7$, $\xi_{SC} = 6.6$, $L_{so} = 2\pi$, $\lambda_{Fn} = 0.15$, $\frac{\pi}{K} \approx 0.07$. Для выбранных параметров число фермиевских и спин-орбитальных осцилляций на длине контакта равно $n_F \approx 7.4$ и $n_{so} \approx 0.6$.

чин (3.48, 3.49).

Можно продемонстрировать и зависимость от координаты x вклада в спиновую поляризацию от одного канала (характеризующегося углом φ):

$$\Psi_{\text{R}}^{\dagger}(x)\hat{\Sigma}_y\Psi_{\text{R}}(x) = B_{-}^{\dagger}m_{\text{A}}(x)B_{-} - B_{+}^{\dagger}m_{\text{A}}^{*}(x)B_{+} + \left(B_{-}^{\dagger}m_{\xi}(x)B_{+} + h.c. \right),$$

$$m_{\text{A}}(x) = L^{\dagger}(x)\hat{\Sigma}_yL(x) = - \left[R^{\dagger}(x)\hat{\Sigma}_yR(x) \right]^{*} =$$

$$\begin{pmatrix} M_{\text{A}} & 0 \\ 0 & M_{\text{A}} \end{pmatrix}, \quad M_{\text{A}} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & -e^{2iAx/L}i\sin\varphi \\ e^{-2iAx/L}i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$m_{\xi}(x) = L^{\dagger}(x)\hat{\Sigma}_yR(x) = - \left[R^{\dagger}(x)\hat{\Sigma}_yL(x) \right]^{*} =$$

$$\begin{pmatrix} M_{\xi} & 0 \\ 0 & M_{\xi} \end{pmatrix}, \quad M_{\xi} = \frac{1}{2}e^{i\varphi}e^{2i\xi x/L} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

откуда видно, что вклад в спиновую поляризацию от одного канала φ состоит из слагаемого, осциллирующего на спин-орбитальной длине волны как $\cos 2Ax/L$, и из слагаемого, быстро осциллирующего на фермиевской длине волны как $\cos 2\xi x/L$. Однако можно доказать, что последнее слагаемое обращается в ноль для любых углов φ и прочих остальных параметров. Зануление слагаемого $B_{-}^{\dagger}(\epsilon_{s,\eta}) \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^y & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^y \end{pmatrix} B_{+}(\epsilon_{s,\eta}) = 0$ равносильно уравнению на андреевский спектр (см. Рис. 3.5). Отсюда следует, что полная спиновая поляризация (после суммирования и по всем каналам φ) как функция x не содержит осцилляций на длине волны Ферми.

Спиновая поляризация от одного канала p_y - при $T = 0$ - сумма двух вкладов, соответствующих двум отрицательным андреевским уровням: $\hat{s}_y(p_y) = \sum_{s=\pm} \hat{s}_y(\epsilon_{s,-}(p_y), p_y)$. Эти два вклада частично сокращают друг друга, как видно на Рис. 3.6, и это сокращение тем больше, чем ближе отношение v_n/v_s к 1. Так что при $v_n = v_s$ спиновая поляризация пропадает (как было показано, и в андреевских уровнях при $v_n = v_s$ исчезает спин-расщепление:

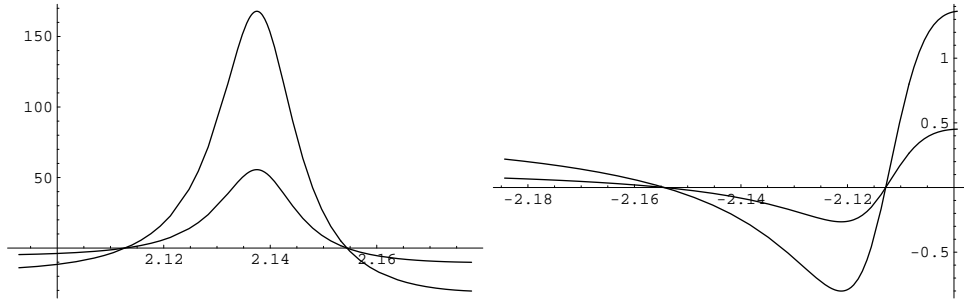


Рис. 3.5: показана зависимость от энергии ϵ мнимой и реальной части коэффициента $B_-^\dagger [\hat{1} \otimes \hat{\sigma}^y] B_+$ перед членом $e^{2i\xi x/L}$ в уравнении (3.50): он обращается в ноль при $\epsilon = \epsilon_{s,\eta}$ ($s = \pm, \eta = \pm$).

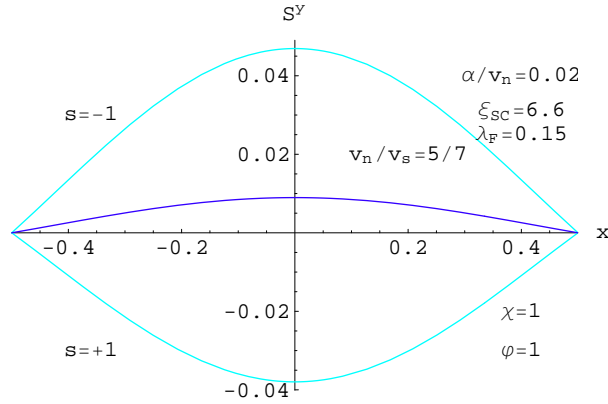


Рис. 3.6: Изображена зависимость спиновой поляризации, $\hat{s}_y(x, p_y) = \frac{1}{2N(p_y)} \Psi_R^\dagger(x, p_y) \hat{\Sigma}_y \Psi_R(x, p_y)$, от координаты x в канале, характеризующимся углом φ . Бирюзовым цветом показаны два вклада ($s = \pm$) в спиновую поляризацию соответственно от двух спин-расщепленных андреевских состояний с отрицательной энергией. Синим цветом изображена полная спиновая поляризация в канале, сумма вкладов от двух андреевских состояний: $\hat{s}_y(p_y) = \sum_{s=\pm} \hat{s}_y(\epsilon_{s,-}(p_y), p_y)$. Все параметры выбраны такими же, как и на предыдущем рисунке, на котором показаны графики волновых функций. Осцилляции на фермиевской длине волны отсутствуют.

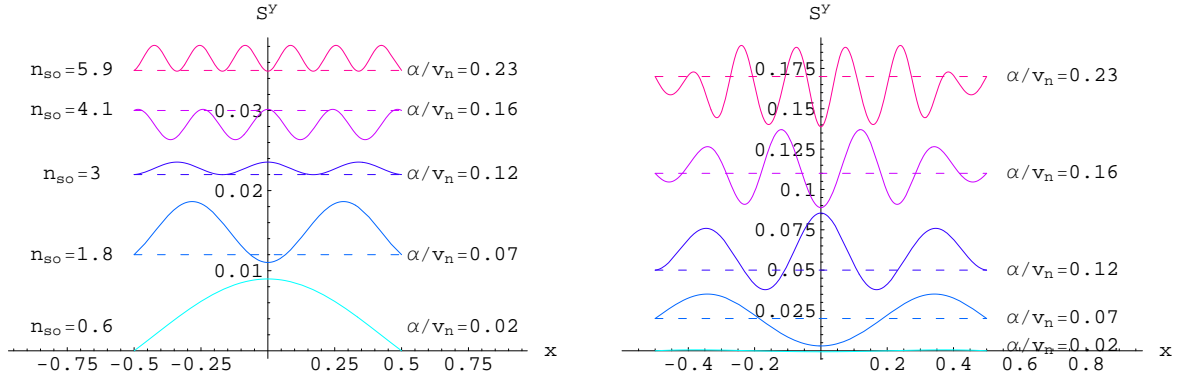


Рис. 3.7: График слева) Спиновая поляризация в одном канале ($\varphi = 1$) как функция x осциллирует на спин-орбитальной длине: согласно уравнению (3.50), на длине контакта L укладывается $n_{so} = \frac{2}{\cos \varphi} \frac{L}{L_{so}} = 0.6, \dots, 5.9$ “спин-орбитальных” осцилляций. График справа) Полная спиновая поляризация - сумма по всем $2N_{max} = 26$ каналам ($L_y = 2$). Для наглядности графики для набора значений спин-орбитальной константы $\alpha/v_n = 0.023, \dots, 0.23$ подняты относительно оси x . Горизонтальные пунктирные линии означают смещенную ось x . Графики построены при параметрах: $\chi = 1$, $v_n/v_s = 5/7$, $\xi_{SC} = 6.6$, $\lambda_{Fn} = 0.15$.

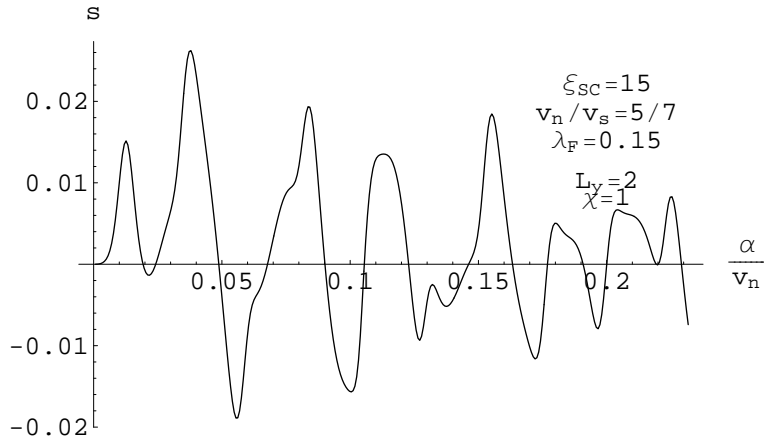


Рис. 3.8: Средняя спиновая поляризация s , как функция спин-орбитального взаимодействия. Здесь длина контакта принята равной $L = 1$. Наибольшему значению $\alpha/v_n = 0.23$ соответствует спин-орбитальная длина $L_{so} = 0.63$.

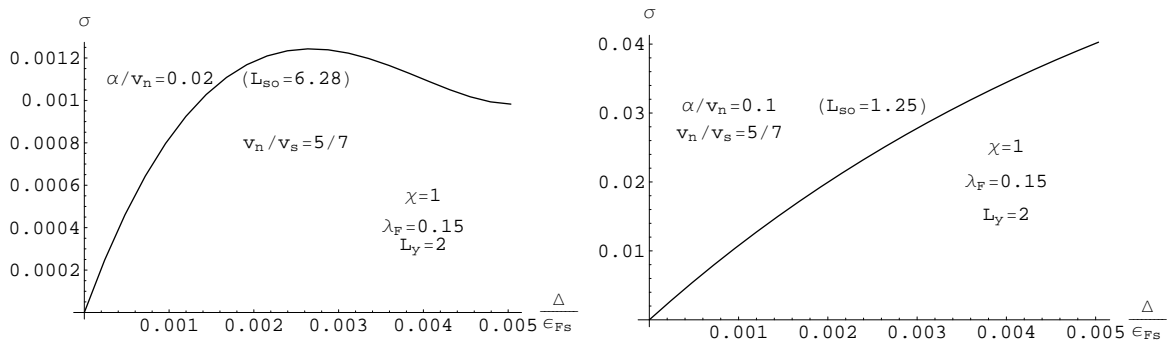


Рис. 3.9: Среднеквадратичная спиновая поляризация σ , как функция сверхпроводящего параметра порядка Δ в единицах энергии Ферми E_{Fs} . Ширина контакта (вдоль оси x): $L = 1$, ширина контакта $L_y = 2$, что соответствует $2N_{max} = 26$ каналам. Два графика - для двух разных значений спин-орбитальной константы $\alpha/v_n = 0.02$ и 0.1 . Сверхпроводящей длине когерентности $\xi_{SC} = 15$ соответствует отношение $\Delta_0/E_{Fs} = 0.002$; σ приведена в единицах $\frac{\Delta_0}{E_{Fs}} \langle \hat{S}^y \rangle_{\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow}$.

они перестают зависеть от взаимодействия Рашбы). Каждый же вклад по отдельности пропорционален спин-орбитальной константе α , и зануляется при $\alpha = 0$.

На рисунке 3.7 изображена спиновая поляризация для нескольких значений α/v_n . Видно отсутствие осцилляций на фермиевской длине волны. Для спиновой поляризации от одного канала φ (график слева на Рис. 3.7) видно соответствие формуле $n_{so} = \frac{2}{\cos \varphi} \frac{L}{L_{so}}$, определяющей число осцилляций на спин-орбитальной длине волны (см. уравнение (3.50)). При увеличении сверхпроводящей длины когерентности ξ_{SC} у графиков на Рис. 3.7 плавно уменьшается амплитуда.

Спиновая поляризация является осциллирующей на длине контакта величиной (см. Рис. 3.7), поэтому полезно ввести среднюю величину, которая бы характеризовала среднюю полную поляризацию, приходящуюся на весь контакт. Поскольку средняя поляризация, определенная как $s = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \langle \hat{S}^y(x) \rangle dx$, является знакопеременной величиной как функция спин-орбитального спаривания (см. Рис. 3.8), то удобно ввести понятие средне-

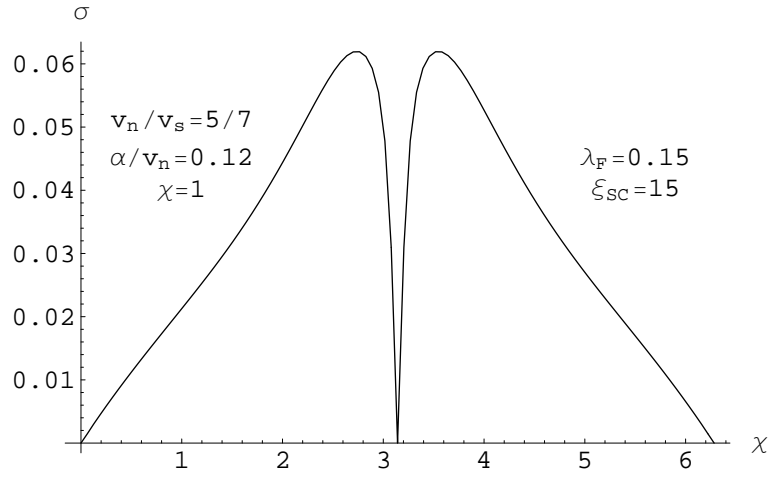


Рис. 3.10: Среднеквадратичная спиновая поляризация σ , как функция сверхпроводящей разности фаз χ . Длина контакта (вдоль оси x): $L = 1$, ширина контакта $L_y = 2$, что соответствует $2N_{max} = 26$ каналам.

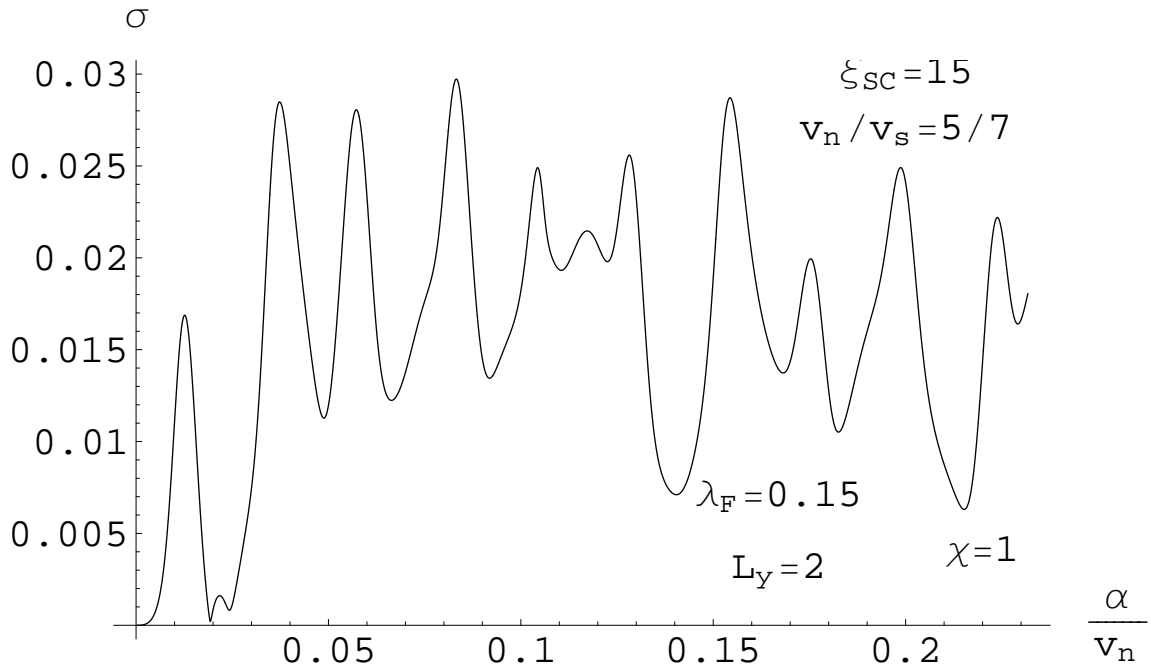


Рис. 3.11: Среднеквадратичная спиновая поляризация σ , как функция спин-орбитального взаимодействия. Наибольшему значению $\alpha/v_n = 0.23$ соответствует спин-орбитальная длина $L_{so} = 0.63$. Длина контакта принята равной $L = 1$.

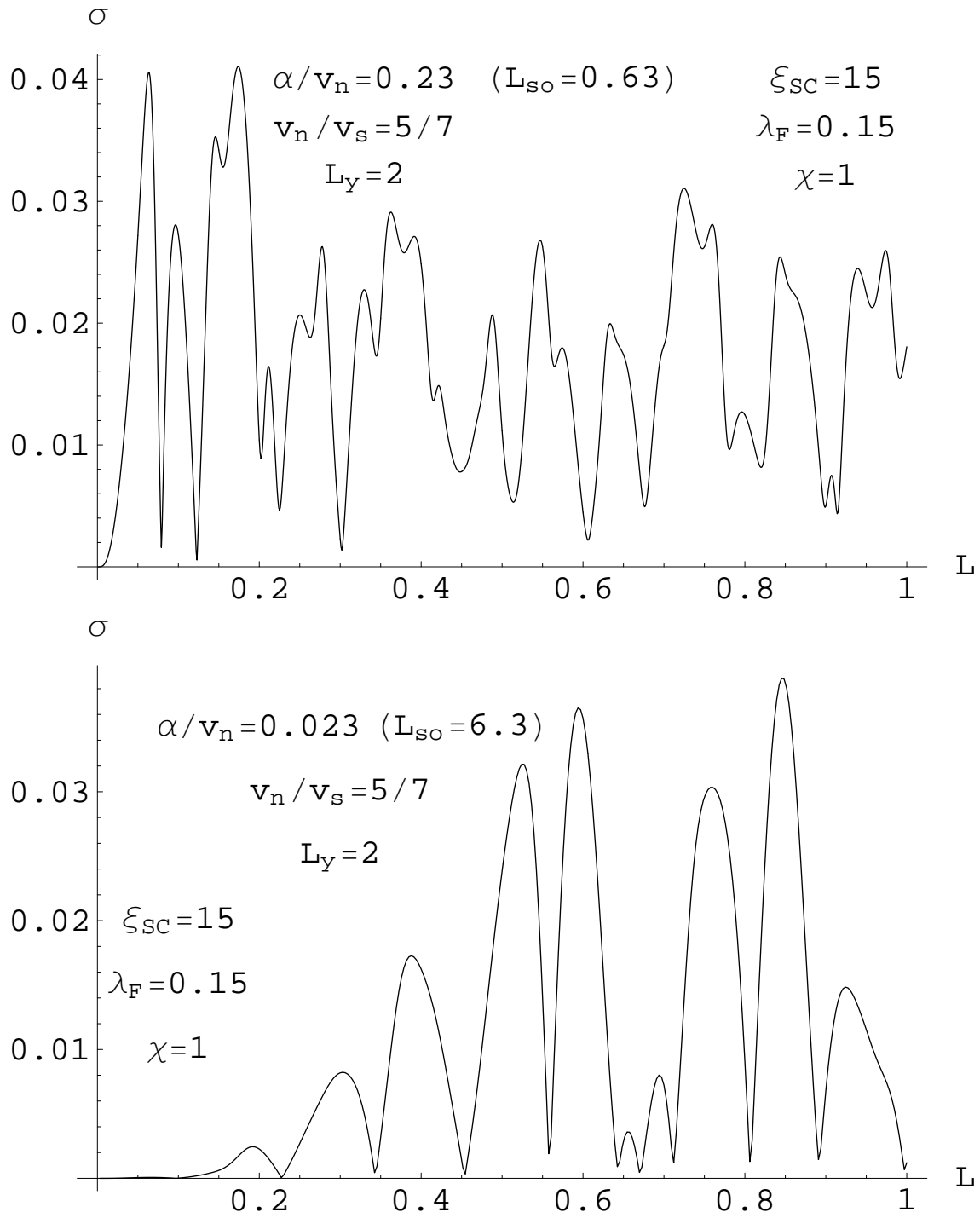


Рис. 3.12: Среднеквадратичная спиновая поляризация σ , как функция ширины контакта L . Спин-орбитальную константу выбрали равной сверху) $\alpha/v_n = 0.23$; внизу) $\alpha/v_n = 0.023$

квадратичной спиновой поляризации:

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \langle \hat{S}^y(x) \rangle^2 dx, \quad (3.51)$$

усредненной по длине контакта L . Спиновая поляризация $\langle \hat{S}^y(x) \rangle$ определена в уравнении (3.42).

На рисунках 3.9-3.12 изображена зависимость среднеквадратичной спиновой поляризации σ как функции соответственно сверхпроводящего параметра порядка Δ , сверхпроводящей разности фаз χ , спин-орбитальной константы взаимодействия α , и длины контакта L . Зависимость среднеквадратичной спиновой поляризации от фазы сверхпроводящего параметра порядка $\sigma(\chi)$, изображенная на Рис. 3.10, весьма напоминает соответствующую зависимость абсолютной величины джозефсоновского тока, $\sigma(\chi) \propto |I(\chi)|$; это вполне естественно, т.к. спиновая поляризация индуцируется протекающим током.

Спиновая поляризация S^y и среднеквадратичная спиновая поляризация σ , изображенные на рисунках 3.6-3.12 (за исключением Рис. 3.9), приведены в единицах $\frac{\Delta}{E_{Fs}} \langle \hat{S}^y \rangle_{\uparrow\uparrow.. \uparrow}$, где $\langle \hat{S}^y \rangle_{\uparrow\uparrow.. \uparrow} = \frac{\hbar}{2} n_{2D} = \frac{p_F^2}{4\pi\hbar}$ - спиновая поляризация полностью поляризованного двумерного электронного газа; а отношение $\frac{\Delta}{E_{Fs}}$ характеризует максимально возможную долю спин-поляризованных электронов в джозефсоновском контакте.

В среднеквадратичной спиновой поляризации σ , Рис. 3.11, наблюдается осциллирующая зависимость от спин-орбитальной константы α . Это можно объяснить тем, что в спиновой поляризации $\langle \hat{S}^y \rangle(x)$, уравнение (3.50), имеется осциллирующая зависимость от x и A через входящие в матрицу $L^\dagger(x) \Sigma_y L(x)$ коэффициенты $e^{\pm 2iAx/L}$. После суммирования по всем каналам (по всем разрешенным углам φ), зависимость от φ в коэффициентах A и ξ можно аппроксимировать эффективным углом $\tilde{\varphi}$, близким к углу траекторий, от которых происходит основной вклад в поляризацию. Из общих соображений понятно, что $0 < \tilde{\varphi} < \pi/2$: при $\varphi = 0$ из уравнений исчезает зависимость от спин-орбитального взаимодействия, а при $\varphi = \pi/2$ проекция импуль-

са электрона на ось x обращается в ноль. После выполнения интегрирования по x , в среднеквадратичной спиновой поляризации σ , уравнение (3.51), должна наблюдаться осциллирующая зависимость на спин-орбитальной длине с “периодом”

$$\frac{L}{L_{so}} = \frac{\alpha}{v_n \lambda_F} = \frac{\cos \tilde{\varphi}}{4}. \quad (3.52)$$

Соответственно формуле (3.52) на графиках $\sigma(\alpha/v_n)$ и $\sigma(L)$ должно наблюдаться

$$n_\alpha^{so} = \frac{4L}{\lambda_F \cos \tilde{\varphi}} \frac{\alpha}{v_n} \quad \text{и} \quad n_L^{so} = \frac{4}{L_{so} \cos \tilde{\varphi}} L \quad (3.53)$$

спин-орбитальных осцилляций на длине α/v_n (Рис. 3.11) и на длине L (Рис. 3.12). Кроме того, в зависимости среднеквадратичной спиновой поляризации σ от длины L (Рис. 3.12) должны наблюдаться осцилляции и на длине волны Ферми с “периодом”

$$\frac{L}{\lambda_F} = \frac{1}{2 \cos \tilde{\varphi}}, \quad (3.54)$$

поскольку спиновая поляризация зависит от ξ через входящие в множители B_\pm коэффициенты $e^{\pm i\xi}$. Согласно формуле (3.54) на длине L на графике Рис. 3.12 наблюдается

$$n_L^F = \frac{2 \cos \tilde{\varphi}}{\lambda_F} L \quad (3.55)$$

фермиевских осцилляций.

Согласно формулам (3.53), если в них для оценки положить $\cos \tilde{\varphi} \approx 0.6$, при выбранных параметрах, на графике $\sigma(\alpha/v_n)$ наблюдаются $n_\alpha^{so} \approx 11$ спин-орбитальных осцилляций соответственно для $L = 1$ (Рис. 3.11); а на графике $\sigma(L)$ наблюдаются $n_L^{so} \approx 11/1.1$ спин-орбитальных осцилляций для $\alpha/v_n = 0.23/0.023$ (верхний/нижний график Рис. 3.12). Кроме того, согласно формуле (3.55), на графиках $\sigma(L)$ наблюдаются $n_L^F \approx 8$ фермиевских осцилляций.

Вид зависимости среднеквадратичной спиновой поляризации от величины спин-орбитального спаривания напоминает универсальные мезоскопические флуктуации проводимости. В связи с этим стоит отметить, что спин-орбитальное взаимодействие (связывающее спиновую переменную с протекающим током) вместе с квантовой природой спина электрона приводят к усилению интерференционных эффектов, находящихся вне рамок квазиклассического приближения. Это обстоятельство было недавно отмечено в другом контексте в работе Осипова и др. [64]. В рассмотренном нами случае аналогичные эффекты приводят к нерегулярным осцилляциям среднеквадратичной спиновой поляризации, при исчезающей (в термодинамическом пределе) средней поляризации.

3.7 Обсуждение

Результаты этой Главы были получены для модели бесконечно длинного перехода в направлении перпендикулярном к току, когда благодаря трансляционной инвариантности движение вдоль y -оси полностью определялось волновым вектором p_y соответствующей плоской волны. Очевидным обобщением такой модельной системы был бы контакт с периодическими граничными условиями в y направлении. В этом случае все наши результаты остаются верными, если заменить непрерывные p_y дискретным набором волновых векторов $p_n = 2\pi n/L_y$. Такая геометрия несколько экзотична для SNS соединений, но тем не менее ее кажется возможным изготовить экспериментально, особенно если принять во внимание недавние успехи в изготовлении сложных структур InAs, см. например [63]. Обычно, однако, структура сверхпроводник-двумерный электронный газ-сверхпроводник имеет конечную длину в y направлении (L_y) с *нулевыми* граничными условиями, при которых каналы собственных состояний характеризуются стоячими волнами - смесью плоских волн $e^{ip_y L_y}$ и $e^{-ip_y L_y}$. В присутствии взаимодействия Рашбы

направление импульса электрона связано с направлением его спина, и таким образом определение правильных собственных состояний стоячих волн не тривиально. Основным эффектом конечного $L_y \gg L_{so}$ - дискретный набор каналов прохождения, $N_{ch} = 2L_y/\lambda_F$, где λ_F - длина волны Ферми двумерного электронного газа. Однако имеет место и некоторый качественный эффект нулевых граничных условий: состояния рассеяния записываются в реальном базисе, а значит, применима теорема Крамерса для собственных значений прохождения [58]. Это означает, что для нулевых граничных условий, и в пределе короткого контакта $L/\xi_{SC} \rightarrow 0$, не может произойти спин-расщепление андреевских уровней. Другими словами, в конечной (в y направлении) системе спаривание Рашбы *изменяет* собственные значения прохождения, но не *расщепляет* их.

Как мы можем согласовать этот результат с естественной идеей, что для очень длинного L_y тип граничных условий не должен играть роли? Дело в том, что полный андреевский спектр системы является дважды вырожденным как для периодических граничных условий, так и для нулевых. В первом случае, вырождение происходит из-за симметрии $\mathcal{T}_{\pm}(p_y)$ относительно отражения $p_y \rightarrow -p_y$, тогда как во втором случае это происходит из-за теоремы Крамерса. Чтобы получить глобальный андреевский спектр без вырождения, должна быть нарушена симметрия по обращению времени. В частности, это происходит, если принять во внимание отличное от нуля отношение L/ξ_{SC} , как сообщается в работе [55]. Другая возможность - *открытая* геометрия образца, как используемая в работе [47], где дополнительный ток можно подавать в направлении, поперечном к сверхпроводящему току. Отдельные андреевские уровни возможно могут быть наблюдаемы экспериментально микроволновой спектроскопией, или измерением туннельной проводимости в области двумерного электронного газа из дополнительного точечного контакта. Одна версия такого типа эксперимента была предложена теоретиче-

ски, для одноканального перехода, в работе [60]. В этом случае резонансная частота очень высокая, порядка Δ/\hbar , так как единственно возможные переходы - между положительными и отрицательными андреевскими уровнями. Эта частота - приблизительно 0.4 THz для островов Nb (значительно более низкие частоты могут быть найдены для случая очень малой вероятности отражения, $1 - \mathcal{T} \ll 1$ и разности фаз $\chi \approx \pi$). В многоканальных переходах интервал энергии между соседним андреевскими уровнями меньше по параметру $\delta\epsilon \sim \Delta/N_{ch}$, но обычно (без спин-орбитального спаривания) невозможно наблюдать вызванные микроволнами переходы между уровнями, которые принадлежат различным каналам проводимости. Причина - сохранение импульса: различные каналы прохождения характеризуются разными волновыми векторами p_y/\hbar , которые отличаются на π/L_y , тогда как длина волны фотона $\lambda_{ph} = hc/\delta\epsilon$ намного больше L_y , их отношение порядка $(E_F^{2DEG}/\Delta)(c/v_n) \sim 10^4$. Кажется возможным, что это правило отбора не будет эффективным в рассматриваемой ситуации со спариванием Рашбы, которое значительно изменяет каналы проводимости при $L_y \geq L_{so}$. Дело в том, что теперь каналы проводимости будут определены в пространстве запутанных орбитальных и спиновых переменных, и таким образом, казалось бы, нет никакой причины для зануления межканального матричного элемента фотона. Однако этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

3.8 Заключение

Исследована зависимость джозефсоновского тока в чистом переходе сверхпроводник-двумерный электронный газ Рашбы-сверхпроводник от спин-орбитального взаимодействия Рашбы. Получено обобщение формулы Беенаккера для андреевских уровней для случая спин-орбитального рассеяния и найдено, что для случая бесконечно широкого перехода (в направлении, поперечном к току), андреевские уровни - спин-расщепленные. Этот

результат - в согласии со статьями [53, 54], где был изучен эффект спин-орбитального взаимодействия Рашбы на сверхпроводящий ток или [53] в случае отсутствия нормального отражения на границах ($p_F = P_F$), или в одномерном случае [54]. Показано, что квазиклассическое среднее джозефсоновского тока тем не менее не зависит от взаимодействия Рашбы, если пренебрегать электрон-электронным взаимодействием в двумерном электронном газе. Поэтому приведенные результаты показывают, что учет спин-орбитального взаимодействия Рашбы для обычной модели SNS перехода, без учета электрон-электронного взаимодействия в нормальной области, не достаточен, чтобы объяснить экспериментально наблюдаемое сильное подавление параметра $I_c R_N$ относительно его теоретического значения. Мы полагаем, что для того, чтобы объяснить это подавление, надо принять во внимание электрон-электронное взаимодействие одновременно со спин-орбитальными эффектами. Отметим, что электрон-электронные взаимодействия как в канале плотность-плотность, так и в канале спин-спин не малы в структурах с двумерным электронным газом.

Вытекающая нерешенная задача состоит в нахождении джозефсоновского тока в присутствии электрон-электронного взаимодействия и с учетом найденной спиновой поляризации, осциллирующей на длине контакта на спин-орбитальной длине. Заметим, что вызванная сверхпроводящим током средняя спиновая поляризация создаст, в присутствии электрон-электронного взаимодействия, эффективное Зеемановское поле, которое может сильно модифицировать как андреевские уровни, так и джозефсоновский ток.

Приложения

А Преобразование к эллиптическим интегралам

После взятия интеграла по ξ уравнение самосогласования имеет вид:

$$\frac{1}{U\nu(\epsilon_F)} = T \sum_{\omega>0,\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Замечаем, что $\int_0^{2\pi} f(\sin \varphi) d\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin \varphi) d\varphi = 2 \int_0^\pi f(\cos \varphi) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} f(\cos 2\varphi) d\varphi$. Тогда, заменяя в (A.1) $\sin \varphi$ на $\cos 2\varphi$ и используя формулы $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$; $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, правую часть уравнения самосогласования записываем как

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{[\omega(c^2 + s^2) + iH_\lambda(c^2 - s^2)]^2 + \Delta^2(c^2 + s^2)^2}}, \quad (\text{A.2})$$

где $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$. В последнем интеграле делаем замену $\varphi = \text{arctg } t$, получаем:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{Ae^{i\psi}t^4 + 2(\omega^2 + H_\lambda^2 + \Delta^2)t^2 + Ae^{-i\psi}}}, \quad (\text{A.3})$$

где обозначили $Ae^{i\psi} = (\omega - iH_\lambda)^2 + \Delta^2$ и

$$A = \sqrt{(\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2)(\omega^2 + (|H_\lambda| - \Delta)^2)}. \quad (\text{A.4})$$

Интеграл (A.2) сходящийся, поэтому можем сделать поворот в комплексной плоскости $\tau = te^{i\frac{\psi}{2}}$, по дуге на бесконечности интеграл стремится к нулю, остается:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{A}\sqrt{1 + (a + a^{-1})\tau^2 + \tau^4}}, \quad (\text{A.5})$$

в котором

$$a = \sqrt{\frac{(\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2)}{(\omega^2 + (|H_\lambda| - \Delta)^2)}}. \quad (\text{A.6})$$

Теперь в (A.5) делаем обратную замену $\tau = \text{tg } \varphi$, получаем:

$$T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a^{-1}}}{2}\right)^2 \cos^2 2\varphi}} \quad (\text{A.7})$$

Учитывая, что $\int_0^{\pi/2} f(\cos^2 2\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\sin^2 \varphi) d\varphi$, заменяем в последнем интеграле $\cos^2 2\varphi$ на $\sin^2 \varphi$ и, следуя определению эллиптического интеграла первого рода $\mathbf{K}(k) = \int_0^{2\pi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, переписываем (A.7) в виде:

$$T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \mathbf{K} \left(i \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a^{-1}}}{2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Интеграл \mathbf{K} - табличный, применяя к нему стандартные преобразования (см. [42]), записываем окончательно уравнение самосогласования как:

$$\frac{1}{U\nu(\epsilon_F)} = T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right)}{\sqrt{a}}, \quad (\text{A.9})$$

Подставляя в (A.9) значения (A.4) и (A.6) для A и a , получаем (2.48).

Заметим, что второго уравнения самосогласования у нас пока что нет. Кроме как из минимизации сверхпроводящей энергии кирального состояния (2.47), его можно вывести, создавая слабую неоднородность на основном состоянии $\Delta(r) = ue^{iQr}$.

Б Линия \mathcal{ST}'

Интегралы по углу φ (2.67), возникающие при определении положения линии устойчивости киральной фазы \mathcal{ST}' , можно представить в виде эллиптических

интегралов первого и второго рода:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{-1 + (\omega + i(H + X) \sin \varphi)^2}{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2 + (X \sin \varphi)^2} = \\ = & \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{z\mathbf{K}(k) - z_1\Pi(l_1, k) - z_2\Pi(l_2, k)}{\sqrt{(\Delta + H)^2 + \omega^2}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta^2}{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2 + (X \sin \varphi)^2} = \\ = & \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{y\mathbf{K}(k) - y_1\Pi(l_1, k) - y_2\Pi(l_2, k)}{\sqrt{(\Delta + H)^2 + \omega^2}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} l_1(\mathbf{S}) &= 1 - \frac{(\Delta - H + i\omega)(\Delta^2 - (H + i\omega)^2) + X^2}{(\Delta + H + i\omega)(\Delta^2 + H^2 + \omega^2 - X^2 - 2i\mathbf{S})}, \\ l_2(\mathbf{S}) &= l_1(-\mathbf{S}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= -2 - \frac{\Delta H(2i\omega X + \Delta(H + 2X))}{(\Delta + i\omega)^2 X^2}, \\ z_1(\mathbf{S}) &= -\frac{(\Delta - H + i\omega)}{2(\Delta + i\omega)^2 X^2 (\Delta^2 - (H - i\omega)^2 + X^2)} L(\mathbf{S}), \\ z_2(\mathbf{S}) &= z_1(-\mathbf{S}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\Delta^2 H^2}{(\Delta + i\omega)^2 X^2} \\ y_1(\mathbf{S}) &= -\frac{i\Delta^2 (\Delta - H + i\omega)}{2(\Delta + i\omega)^2 X^2 (\Delta^2 - (H - i\omega)^2 + X^2)} M(\mathbf{S}), \\ y_2(\mathbf{S}) &= y_1(-\mathbf{S}); \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

где

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{S}) = & -i\Delta^4 H(H+X)^2 - \\
& - 2\omega^2 X^2 (H - i\omega + X)(\omega X + \mathbf{S}) + \\
& + 2i\Delta\omega X(H+X)(H - i\omega + X)(\omega X + \mathbf{S}) + \\
& + \Delta^3 (H+X)^2 (-iH^2 - H\omega + 2\omega X + iX^2 + \mathbf{S}) + \\
& + \Delta^2 (H+X)(H^2 - iH\omega + HX + i\omega X)(2\omega X + \mathbf{S}) - \\
& - \omega X^2 \Delta^2 (H+X)^2
\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{S} = \sqrt{-\Delta^2 H^2 + (\Delta^2 + \omega^2) X^2}, \quad X = \frac{q+Q}{2}; \quad (\text{Б.4})$$

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{S}) = & \Delta H^3 (\Delta + H - i\omega) - \\
& - HX^2 (\Delta(\Delta + 2H) - i(\Delta - H)\omega + 2\omega^2) + \\
& + (\Delta + i\omega)X^4 + \\
& + (H^2(i(\Delta + H) + \omega) + (-i(\Delta + H) + \omega)X^2) \mathbf{S}. \quad (\text{Б.5})
\end{aligned}$$

В Восьмой порядок в функционале ГЛ

Каждому коэффициенту разложения восьмого порядка по Δ Гинзбурга-Ландау соответствуют диаграммы и выражение:

$$D_1 = 1/8T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^4 \left(-p + \frac{Q}{2} \right); \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
& + T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \quad (\text{Б.2})
\end{aligned}$$

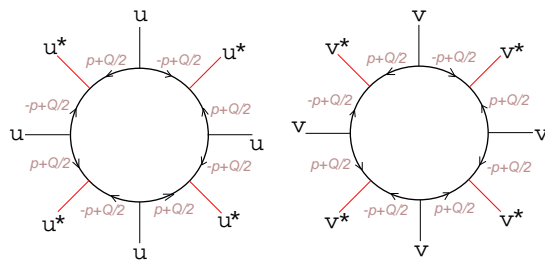


Рис. 3.13: Диаграммы, соответствующие коэффициенту D_1 при члене $|u|^8 + |v|^8$ в разложении Гинзбурга-Ландау. Диаграмме соответствует комбинаторный коэффициент $1/8$. Заметим, что все петли симметричны по замене Q на $-Q$, что эквивалентно замене на диаграммах всех u на v ; значит, такие диаграммы равны.

$$\begin{aligned}
D_3 = & 3/2T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
& T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right) + \\
& T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} & G^2 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$l_7 = \frac{1}{U} - \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(p + \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.4}$$

$$l_8 = \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \tag{B.5}$$

$$l_9 = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.6}$$

$$l_{10} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{5Q}{2} \right) G^2 \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.7}$$

$$l_{11} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \tag{B.8}$$

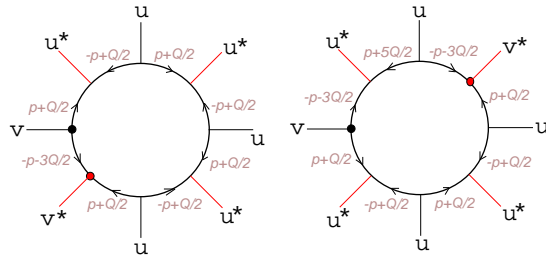


Рис. 3.14: Две разные диаграммы, составляющие коэффициент D_2 перед членом $|v|^2|u|^6$. Обеим диаграммам соответствует комбинаторный коэффициент 1.

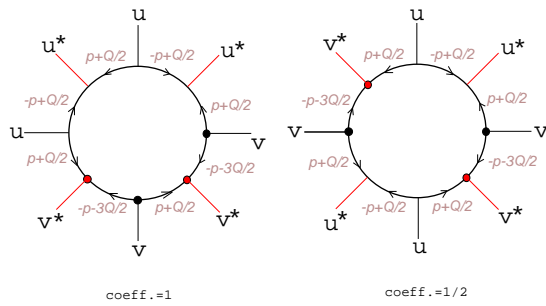


Рис. 3.15: Диаграммы, дающие вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Значения этих двух диаграмм равны, а их коэффициенты разные - 1 и 1/2. При замене всех u на v обе диаграммы не меняются. Комплексно сопряженные им изменяют только обход вдоль петли и такие диаграммы мы учли в комбинаторных коэффициентах.

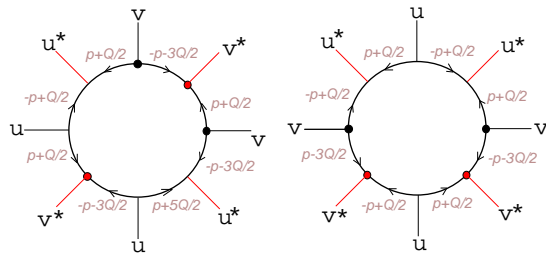


Рис. 3.16: Диаграммы, дающие вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Коэффициент для обеих полагаем равным 1, поскольку учитываем равные им комплексно сопряженные диаграммы. Заметим, что эти две петли переходят друг в друга при замене всех u на v .

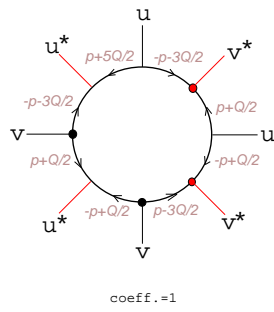


Рис. 3.17: Диаграмма, дающая вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Комбинаторный коэффициент 1.

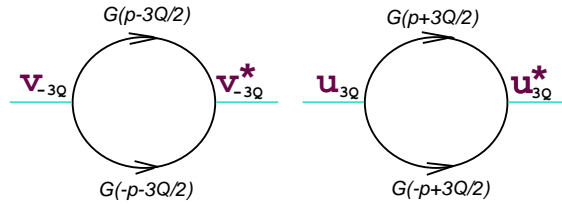


Рис. 3.18: Диаграмма шестого порядка по u , дает вклад в коэффициент l_7 . Куперовская петля для третьей гармоники. Коэффициент $1/2$.

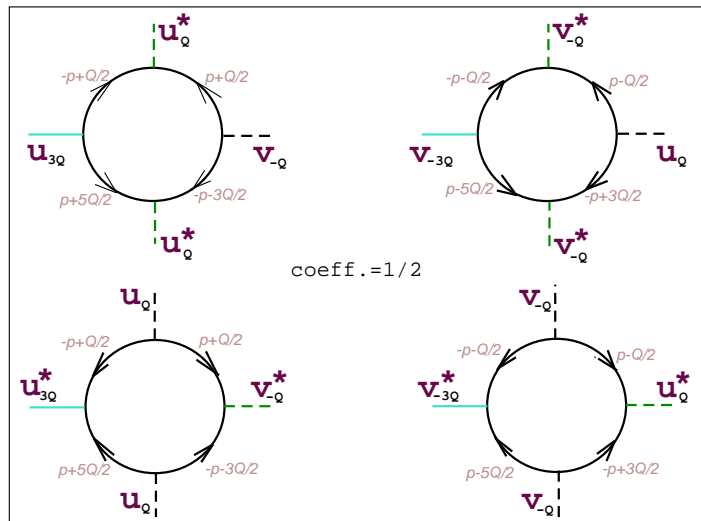


Рис. 3.19: Диаграммы шестого порядка по u , соответствующие члену $l_8(u_{3Q}u_Q^*{}^2v_{-Q} + v_{-3Q}v_{-Q}^*{}^2u_Q + h.c.)$ Коэффициент для всех четырех $1/2$.

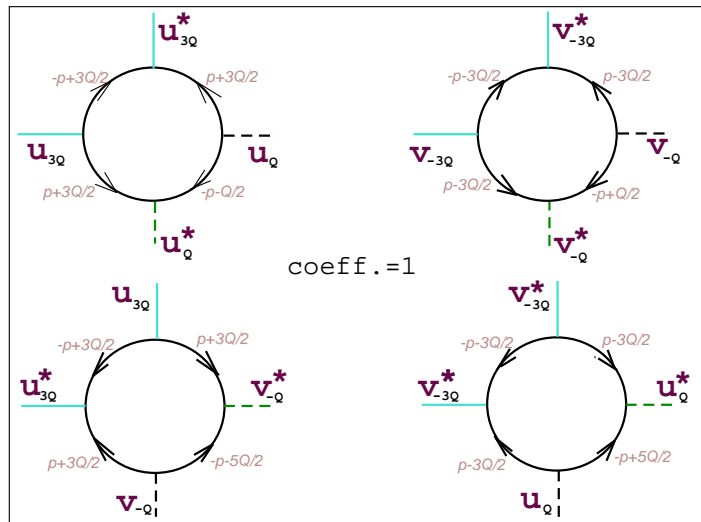


Рис. 3.20: Диаграммы восьмого порядка по u . Коэффициент для всех четырех 1. Верхний ряд соответствует члену $l_9(|u_{3Q}|^2|u_Q|^2 + |v_{-3Q}|^2|v_{-Q}|^2)$, Нижний ряд соответствует члену $l_{10}(|u_{3Q}|^2|v_{-Q}|^2 + |v_{-3Q}|^2|u_Q|^2)$

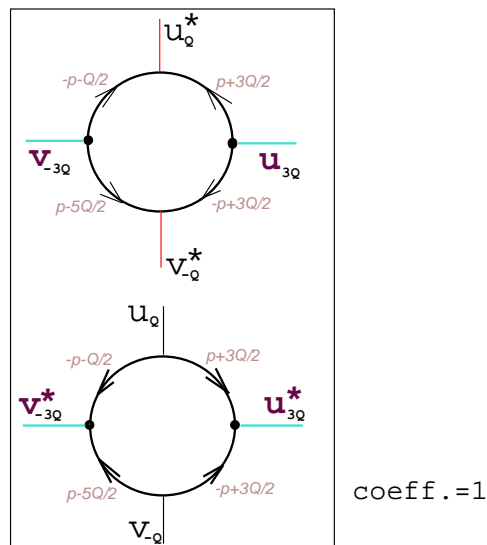


Рис. 3.21: Диаграммы восьмого порядка по u , соответствующие члену $l_{11}(u_{3Q}v_{-3Q}u_Q^*v_{-Q}^* + h.c.)$ Нижняя петля - комплексное сопряжение верхней. Коэффициент 1.

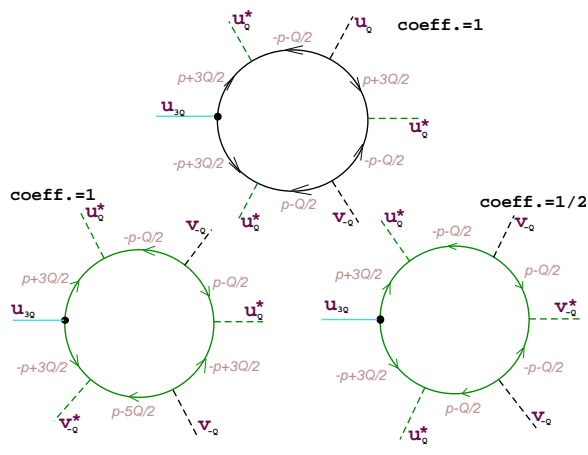


Рис. 3.22: Диаграммы восьмого порядка по u , соответствующие членам $l_{12}u_{3Q}u_Q^*{}^2v_{-Q}|u_Q|^2$ и $(l_{13} + l_{14})u_{3Q}u_Q^*{}^2v_{-Q}|v_{-Q}|^2$. Еще есть петли комплексно сопряженные показанным на рисунке, а также с заменой всех u на v . Значения их те же самые, поэтому мы их не рисуем.

$$l_{12} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G\left(p + \frac{Q}{2}\right) G^2\left(-p + \frac{Q}{2}\right) G^2\left(p - \frac{3Q}{2}\right) G\left(-p - \frac{3Q}{2}\right); \quad (\text{B.9})$$

$$l_{13} = \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^2\left(p + \frac{Q}{2}\right) G^2\left(-p + \frac{Q}{2}\right) G\left(p - \frac{3Q}{2}\right) G\left(-p - \frac{3Q}{2}\right); \quad (\text{B.10})$$

$$l_{14} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G\left(p + \frac{5Q}{2}\right) G\left(p + \frac{Q}{2}\right) G\left(-p + \frac{Q}{2}\right) G\left(p - \frac{3Q}{2}\right) G^2\left(-p - \frac{3Q}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

Везде G - функции Грина нормального металла.

Сумма по импульсу заменяется на $\nu(\epsilon_F) \int d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}$ и интеграл по ξ вычисляется. Интеграл по φ вычисляется с помощью производящей функции $1/\sqrt{\omega^2 + (\lambda H \pm nQ)^2}$, где $n = 1, 3, 5$. В получившиеся аналитические выражения подставлялись $T_S = 1.779T_{c0}$, $H_S = 0.525T_{c0}$ и $Q_S = 2.647T_{c0}$, и оставшаяся сумма по ω бралась численно. В результате мы нашли:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 0.00106053 - \text{коэффициент перед } |u|^8 \text{ и } |v|^8 \text{ в } \delta\text{ом "простом" порядке ;} \\
D_2 &= 0.00152674 - \text{коэффициент перед } (|u|^2|v|^6 + |u|^6|v|^2) \text{ в } \delta\text{ом "простом";} \\
D_3 &= -0.00120067 - \text{коэффициент перед } |u|^4|v|^4 \text{ в } \delta\text{ом "простом" ;} \\
l_7 &= 0.674254; \\
l_8 &= 0.103447; \\
l_9 &= 0.191039; \quad l_{10} = 0.170477; \quad l_{11} = 0.206894; \quad l_{12} = 0.0325726; \\
l_{13} &= 0.00491175; \quad l_{14} = 0.021198. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Г Спиноры, описывающие состояния квазичастиц в переходе S/Rashba 2DEG/S

В этом разделе Приложений мы определяем спиноры, описывающие состояния квазичастицы во всех трех областях перехода SNS.

Благодаря трансляционной инвариантности вдоль оси y состояния квазичастицы характеризуются квантовым числом - сохраняющимся импульсом p_y вдоль оси y . Дискретные андреевские состояния существуют только для $|\epsilon| < \Delta$ и здесь мы ограничиваемся только этим случаем. В андреевском состоянии электронные и дырочные состояния перемешаны.

Рассмотрим сначала сверхпроводники. В приближении среднего поля Гамильтониан двумерного сверхпроводника имеет вид:

$$\hat{H}_S = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \begin{pmatrix} E(\mathbf{p}) & 0 & \Delta e^{i\chi} & 0 \\ 0 & E(\mathbf{p}) & 0 & -\Delta e^{i\chi} \\ \Delta e^{-i\chi} & 0 & -E(\mathbf{p}) & 0 \\ 0 & -\Delta e^{-i\chi} & 0 & -E(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad (\text{Г.1})$$

где $\Delta e^{i\chi}$ - комплексный сверхпроводящий параметр порядка, причем Δ - амплитуда, а χ - сверхпроводящая фаза. $\Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \left(\psi_{\uparrow\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \psi_{\downarrow\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \psi_{\downarrow-\mathbf{p}} \quad \psi_{\uparrow-\mathbf{p}} \right)$ - спинор, содержащий операторы рождения и уничтожения электрона. Мы использовали обозначение $E(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mu$, где μ - энергия Ферми сверхпроводящей области, $\mathbf{p} = (k, p_y)$ - двумерный импульс, а M - масса квазичастиц. Полагаем, что сверхпроводящая щель Δ и энергии Ферми μ одинаковы для левого и правого сверхпроводника.

Очевидно, что гамильтониан (Г.1) - блочно-диагональный в спиновом пространстве, где оба блока имеют размерность 2×2 . Собственные состояния гамильтониана (Г.1) имеют вид:

$$\epsilon^2(\mathbf{p}) = \left(\mu - \frac{k^2 + p_y^2}{2M} \right)^2 + \Delta^2. \quad (\text{Г.2})$$

Удобно рассмотреть $\epsilon(\mathbf{p})$ как независимую переменную ϵ , и характеризовать собственное состояние x компонентой импульса k квазичастицы. Решая уравнение (Г.2) относительно k , получаем 4 решения:

$$k = \pm \sqrt{2M\mu - p_y^2 \pm i2M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}}. \quad (\text{Г.3})$$

Выбор правильного знака для k в (Г.3) определяется тем, что мы рассматриваем дискретный спектр $|\epsilon| < \Delta$, и соответственно волновые функции должны убывать при $x = \pm\infty$. Принимая последнее условие во внимание, из четырех импульсов - решений для левого сверхпроводника оставляем два физических импульса k :

$$k_{\pm}^l = \begin{cases} -\sqrt{2M\mu - p_y^2 + i2M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}}, \\ +\sqrt{2M\mu - p_y^2 - i2M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}}, \end{cases} \quad (\text{Г.4})$$

и для правого сверхпроводника - два физических импульса k :

$$k_{\pm}^r = \begin{cases} +\sqrt{2M\mu - p_y^2 + i2M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}}, \\ -\sqrt{2M\mu - p_y^2 - i2M\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}}, \end{cases} \quad (\text{Г.5})$$

Используя равенство: $\frac{p_y^2 + (k_{\pm}^{l,r})^2}{2M} - \mu = \pm i\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2} = -\Delta e^{\mp i\gamma} + \epsilon$, где $\gamma = \arccos \frac{\epsilon}{\Delta}$, получаем четыре собственных вектора в левом сверхпроводнике:

$$\psi_{\uparrow,+}^l = \chi_1^l e^{ik_+^l x_+}, \quad \psi_{\uparrow,-}^l = \chi_2^l e^{ik_-^l x_+}, \quad \psi_{\downarrow,+}^l = \chi_3^l e^{ik_+^l x_+}, \quad \psi_{\downarrow,-}^l = \chi_4^l e^{ik_-^l x_+};$$

$$\chi_1^l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2^l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ w_l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_3^l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -z_l \end{pmatrix}, \quad \chi_4^l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -w_l \end{pmatrix}, \quad (\text{Г.6})$$

где $x_+ = x + L/2$, $z_l = \exp(-i\gamma - i\chi_l)$, $w_l = \exp(i\gamma - i\chi_l)$; и четыре собственных

вектора в правом сверхпроводнике:

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow,+}^r &= \chi_1^r e^{ik_+^r x_-}, & \psi_{\uparrow,-}^r &= \chi_2^r e^{ik_-^r x_-}, & \psi_{\downarrow,+}^r &= \chi_3^r e^{ik_+^r x_-}, & \psi_{\downarrow,-}^r &= \chi_4^r e^{ik_-^r x_-}; \\ \chi_1^r &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_r \\ 0 \end{pmatrix}; \chi_2^r &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ w_r \\ 0 \end{pmatrix}; \chi_3^r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -z_r \end{pmatrix}; \chi_4^r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -w_r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

где $x_- = x - L/2$, $z_r = \exp(-i\gamma - i\chi_r)$, $w_r = \exp(i\gamma - i\chi_r)$. В волновых функциях, уравнениях (Г.6, Г.7), и в дальнейшем, мы опускаем множитель $e^{ip_y y}$, который одинаков для всех спиноров во всех трех областях.

Найдем спиноры, описывающие состояния квазичастицы с энергией ϵ во области двумерного электронного газа, ограниченного в x направлении (см. Рис. 3.1).

Рассмотрим гамильтониан металла Рашбы:

$$\hat{H}_R = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \begin{pmatrix} E_R(\mathbf{p}) & \alpha(p_y + ik) & 0 & 0 \\ \alpha(p_y - ik) & E_R(\mathbf{p}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_R(\mathbf{p}) & \alpha(p_y + ik) \\ 0 & 0 & \alpha(p_y - ik) & -E_R(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad (\text{Г.8})$$

где введено обозначение $E_R(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_R$, где μ_R - это энергия Ферми, $\mathbf{p} = (k, p_y)$ - двумерный импульс, а m - масса квазичастиц в металле Рашбы (отличная от массы M в сверхпроводниках). Здесь также $\Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \left(\psi_{\uparrow\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \psi_{\downarrow\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \psi_{\downarrow-\mathbf{p}} \quad \psi_{\uparrow-\mathbf{p}} \right)$ - спинор, содержащий операторы рождения и уничтожения электрона. Очевидно, гамильтониан (Г.8) блочно-диагонален в электронно-дырочном пространстве, где оба блока имеют размерность 2×2 .

Собственные состояния Гамильтониана (Г.8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda}(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_R - \lambda\alpha|\mathbf{p}|, \\ \epsilon_{\lambda}(\mathbf{p}) &= -\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu_R + \lambda\alpha|\mathbf{p}|. \end{aligned} \quad (\text{Г.9})$$

Поскольку $\epsilon_\lambda(\mathbf{p})$ является независимой переменной ϵ , характеризуем собственное состояние x компонентой импульса k квазичастицы. Решая (Г.9) относительно k , получаем восемь решений:

$$\begin{aligned} k_{\lambda,\pm}^e &= \pm \sqrt{2m\mu_R^+ - p_y^2 + 2m^2\alpha^2 \left(1 + \lambda \sqrt{\frac{2\mu_R^+}{m\alpha^2} + 1}\right)}, \\ k_{\lambda,\pm}^h &= \pm \sqrt{2m\mu_R^- - p_y^2 + 2m^2\alpha^2 \left(1 + \lambda \sqrt{\frac{2\mu_R^-}{m\alpha^2} + 1}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{Г.10})$$

где $\mu_R^\pm = \mu_R \pm \epsilon$. Индексы \pm соответствуют положительному (направо) или отрицательному (налево) x -направлению, вдоль которого движутся квазичастицы в металле Рашбы.

Восемь собственных векторов в металле Рашбы имеют вид:

$$\psi_{\lambda,\pm}^e = \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda e^{i\varphi_{k_{\lambda,\pm}^e}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{\lambda,\pm}^e x}, \quad \psi_{\lambda,\pm}^h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i\lambda e^{i\varphi_{k_{\lambda,\pm}^h}} \end{pmatrix} e^{ik_{\lambda,\pm}^h x}, \quad (\text{Г.11})$$

где мы ввели обозначение

$$e^{i\varphi_k} = e^{i\varphi_{k,p}} = \frac{k + ip_y}{\sqrt{k^2 + p_y^2}}. \quad (\text{Г.12})$$

Мы можем уменьшить число переменных в уравнении (Г.11), используя $k_{\lambda,-}^{(e,h)} = -k_{\lambda,+}^{(e,h)}$ и $e^{i\varphi_{-k,p_y}} = e^{i(\pi - \varphi_{k,p_y})}$. Эта подстановка помогает заметить, что из восьми спиноров (Г.11) четыре сопряжены остальным четырем, что соответствует частицам, движущимся направо и налево.

Д Матрица рассеяния в нормальном состоянии перехода S/Rashba 2DEG/S

Д.1 \check{S} - матрица, полученная сшивкой волновых функций на двух границах

В этом подразделе находим явный вид матрицы рассеяния S/Rashba 2DEG/S контакта в нормальном состоянии и в присутствии магнитного поля, направленного вдоль y -оси, Рис. 3.1, посредством сшивки волновых функций на двух границах. Оба сверхпроводника находятся в нормальном состоянии, $\Delta = 0$. Так как нет сверхпроводящего параметра порядка, то число электронов сохраняется, и электрон нигде не преобразуется в дырку, поэтому состояние электрона везде в SNS контакте может быть описано двухкомпонентным спинором, у которого верхняя и нижняя компоненты соответствуют спину вверх и спину вниз. Это противоположно случаю $\Delta \neq 0$, когда число электронов не сохраняется (электрон может быть преобразован в дырку), и состояние квазичастиц надо описывать в пространстве Намбу (см. раздел Г). Считаем, что Гамильтониан электрона включает кинетическую энергию, взаимодействие Рашбы (1.3), и Зеемановское взаимодействие с магнитным полем направленным вдоль оси y : $\hat{H}_{Zeeman} = -g\mu_B\hat{\sigma}^y H/2$.

Пусть падающий электрон, движущийся в левом сверхпроводнике, имеющий x компоненту импульса K и спин направленный вверх, падает на левую границу. Описываем падающий электрон двухкомпонентным спинором:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iK(x+L/2)}, \quad (\text{Д.1})$$

где мы положили амплитуду равной единице.

Отраженный электрон описывается двумя спинорами:

$$A_{l\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iK(x+L/2)}, \quad A_{l\downarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-iK(x+L/2)}, \quad (\text{Д.2})$$

где $A_{l\uparrow}$ и $A_{l\downarrow}$ - амплитуды отражения электрона с тем же самым или с противоположным направлением спина.

Прошедший электрон в правом сверхпроводнике описывается двумя спинорами:

$$A_{r\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iK(x-L/2)}, \quad A_{r\downarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iK(x-L/2)}. \quad (\text{Д.3})$$

Поскольку требуется выполнение условия непрерывности на обеих границах как самой волновой функции, так и ее производной, то мы можем ввести четырехкомпонентные спиноры, построенные таким образом, что верхние две компоненты соответствуют волновой функции, а нижние две - производной волновой функции:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ iK \\ 0 \end{pmatrix} e^{iK(x+L/2)}, \quad A_{l\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -iK \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iK(x+L/2)}, \quad A_{l\downarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -iK \end{pmatrix} e^{-iK(x+L/2)}, \\ & A_{r\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ iK \\ 0 \end{pmatrix} e^{iK(x-L/2)}, \quad A_{r\downarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ iK \end{pmatrix} e^{iK(x-L/2)}. \end{aligned} \quad (\text{Д.4})$$

Аналогично составляем четырехкомпонентные спиноры для металла Рашибы:

$$\begin{aligned} & B_{+1,+} \begin{pmatrix} 1 \\ ie^{i\varphi_k} \\ ik \\ -ke^{i\varphi_k} \end{pmatrix} e^{ik+x}, \quad B_{-1,+} \begin{pmatrix} 1 \\ -ie^{i\varphi_k} \\ ik \\ ke^{i\varphi_k} \end{pmatrix} e^{ik-x}, \\ & B_{+1,-} \begin{pmatrix} 1 \\ -ie^{-i\varphi_k} \\ -ik \\ -ke^{-i\varphi_k} \end{pmatrix} e^{-ik+x}, \quad B_{-1,-} \begin{pmatrix} 1 \\ ie^{-i\varphi_k} \\ -ik \\ ke^{-i\varphi_k} \end{pmatrix} e^{-ik-x}, \end{aligned} \quad (\text{Д.5})$$

где мы раскладываем вектор $k_{\pm} = k \pm t\alpha\rho_F/k + t\epsilon/k$, и везде, где он не домножается на большой пространственный масштаб L , заменяем его просто на k таким же образом, как и в уравнении (3.29). В векторе k_{\pm} знак \pm

соответствует киральности λ . В коэффициентах B первый нижний индекс соответствует киральности λ , а второй нижний индекс соответствует направлению движения электронных квазичастиц в металле Рашбы.

Теперь составляем матрицы из четырехкомпонентных спиноров (Д.4) и (Д.5). Волновая функция плюс производная от волновой функции электронной квазичастицы в металле Рашбы (Д.5) может быть выписана посредством матрицы 4x4: $\Psi_{Rashba} = T(x)B$ с четырехкомпонентным вектором $B^\dagger = (B_{+1,+} \quad B_{-1,+} \quad B_{+1,-} \quad B_{-1,-})$ и матрицей $T(x)$ равной:

$$\left(\begin{array}{cccc} e^{i(k_++h)x} & e^{i(k_- - h)x} & e^{-i(k_+ - h)x} & e^{-i(k_- + h)x} \\ ie^{i\varphi_k + i(k_++h)x} & -ie^{i\varphi_k + i(k_- - h)x} & -ie^{-i\varphi_k - i(k_+ - h)x} & ie^{-i\varphi_k - i(k_- + h)x} \\ ike^{i(k_++h)x} & ike^{i(k_- - h)x} & -ike^{-i(k_+ - h)x} & -ike^{-i(k_- + h)x} \\ -ke^{i\varphi_k + i(k_++h)x} & ke^{i\varphi_k + i(k_- - h)x} & -ke^{-i\varphi_k - i(k_+ - h)x} & ke^{-i\varphi_k - i(k_- + h)x} \end{array} \right), \quad (Д.6)$$

где $h = g\mu_B H / 2v_F$.

Аналогично мы составляем матрицы S_{Left} и S_{Right} , соответствующие спинорам (Д.4) в сверхпроводниках, взятых на левой ($x = -L/2$) и на правой границе ($x = L/2$), таким образом, чтобы матричные уравнения удовлетворяли двум условиям непрерывности волновой функции и ее производной на двух границах:

$$\begin{aligned} T(-L/2)B &= I + S_{\text{Left}}A, \\ T(L/2)B &= S_{\text{Right}}A, \end{aligned} \quad (Д.7)$$

где $I_\dagger^\dagger = (1, 0, iK, 0)$ - четырехкомпонентный спинор, соответствующий пада-

ющему электрону со спином вверх; $A^\dagger = (A_{l\uparrow}, A_{l\downarrow}, A_{r\uparrow}, A_{r\downarrow})$, и

$$S_{\text{Left}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -iK & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iK & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{Right}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iK & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iK \end{pmatrix}. \quad (\text{Д.8})$$

Мы разрешаем два уравнения (Д.7) относительно четырех компонент B и находим систему уравнений для четырех компонент A для случая электрона, падающего с левой стороны:

$$A_{1,\alpha} = [T(-L/2)T^{-1}(L/2)S_{\text{Right}} - S_{\text{Left}}]^{-1} I_{1,\alpha}, \quad (\text{Д.9})$$

где α - это спин падающего электрона: $I_{1,\uparrow}^\dagger = (1, 0, iK, 0)$ для спина вверх, и $I_{1,\downarrow}^\dagger = (0, 1, 0, iK)$ для спина вниз.

Мы можем получить аналогичные уравнения для амплитуд A для случая электрона, падающего с правой стороны:

$$A_{2,\alpha} = [T(L/2)T^{-1}(-L/2)S_{\text{Left}} - S_{\text{Right}}]^{-1} I_{2,\alpha}, \quad (\text{Д.10})$$

где вектор $I_{2,\alpha}$ описывает падающий электрон: $I_{2,\uparrow}^\dagger = (1, 0, -iK, 0)$ для спина вверх, или $I_{2,\downarrow}^\dagger = (0, 1, 0, -iK)$ для спина вниз.

Если α - спин падающего электрона, тогда решения A соответствуют амплитудам отраженных и прошедших волн:

$$\begin{aligned} A_{1,\alpha}^\dagger &= (r_{\uparrow\alpha}^1, r_{\downarrow\alpha}^1, t_{\uparrow\alpha}^1, t_{\downarrow\alpha}^1), \\ A_{2,\alpha}^\dagger &= (t_{\uparrow\alpha}^2, t_{\downarrow\alpha}^2, r_{\uparrow\alpha}^2, r_{\downarrow\alpha}^2). \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

Определяем \hat{S} -матрицу следующим образом:

$$\check{S} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 & \hat{T}_2 \\ \hat{T}_1 & \hat{R}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{Д.12})$$

где

$$\hat{R}_{1(2)} = \begin{pmatrix} r_{\uparrow\uparrow}^{1(2)} & r_{\uparrow\downarrow}^{1(2)} \\ r_{\downarrow\uparrow}^{1(2)} & r_{\downarrow\downarrow}^{1(2)} \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{1(2)} = \begin{pmatrix} t_{\uparrow\uparrow}^{1(2)} & t_{\uparrow\downarrow}^{1(2)} \\ t_{\downarrow\uparrow}^{1(2)} & t_{\downarrow\downarrow}^{1(2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{Д.13})$$

Решая уравнение (Д.9) и уравнение (Д.10), и принимая во внимание (Д.11), для матриц прохождения получаем:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= T_0(h) + T_1(h)\hat{\sigma}^x + T_2(h)\hat{\sigma}^y, \\ \hat{T}_2 &= T_0(-h) + T_1(-h)\hat{\sigma}^x - T_2(-h)\hat{\sigma}^y, \end{aligned} \quad (\text{Д.14})$$

причем

$$T_i(h) = T_i \cos h + H_i \sin h, \quad (\text{Д.15})$$

$$\begin{aligned} T_0 &= t \sinh(x - i\xi) \cos A, \\ T_1 &= -i t \cosh(x - i\xi) \sin A \sin \varphi, \\ T_2 &= i t \sinh(x - i\xi) \sin A \cos \varphi, \end{aligned} \quad (\text{Д.16})$$

$$\begin{aligned} H_0 &= -t \cosh(x - i\xi) \sin A, \\ H_1 &= -i t \sinh(x - i\xi) \cos A \sin \varphi, \\ H_2 &= i t \cosh(x - i\xi) \cos A \cos \varphi, \end{aligned} \quad (\text{Д.17})$$

где мы ввели обозначение

$$t = \frac{\sinh x}{\sinh^2(x - i\xi) + \sin^2 A \sin^2 \varphi + \sin^2 h \cos^2 \varphi}, \quad (\text{Д.18})$$

и

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= \left(\frac{K - k}{K + k} \right)^2, \\ A &= m\alpha L \frac{p_F}{k}. \end{aligned} \quad (\text{Д.19})$$

Матрица отражения имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{R}_1 &= R_0 + R_1 \hat{\sigma}^x + R_2 \hat{\sigma}^y + R_3 \hat{\sigma}^z, \\ \hat{R}_2 &= R_0 + R_1 \hat{\sigma}^x + R_2 \hat{\sigma}^y - R_3 \hat{\sigma}^z,\end{aligned}\tag{Д.20}$$

где

$$\begin{aligned}R_0 &= t \left[\coth x \sin^2 A \sin^2 \varphi - i \frac{\sin \xi}{\sinh x} \sinh(x - i\xi) \right] + \\ &+ t \coth x \sin^2 h \cos^2 \varphi, \\ R_1 &= \frac{i}{2} t \sin 2A \sin \varphi, \\ R_2 &= -\frac{i}{2} t \sin 2h \cos \varphi, \\ R_3 &= -\frac{i}{2} t (\sin^2 A - \sin^2 h) \sin 2\varphi.\end{aligned}\tag{Д.21}$$

Заметим, что в вышеприведенных формулах везде надо сделать замену $k \rightarrow k + m\epsilon/k$, и $K \rightarrow K + m\epsilon/K$.

В этом разделе мы работали в спиновом базисе с определенной проекцией спина \hat{S}^z , поэтому полученная матрица рассеяния (Д.14-Д.21), если в ней положить $h = 0$, отличается от приведенной в основном тексте (3.14-3.18), где она выписана в спиновом базисе с определенной проекцией спина \hat{S}^y .

Заключение

Научная новизна работы заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту:

Глава 1.

- Для модели невзаимодействующих электронов в присутствии примесей показываем, что статическая спин-холловская проводимость равна нулю благодаря сокращению двух вкладов: вершинная поправка сокращает вклад от одной петли. Результат получен в линейном порядке по спин-орбитальному расщеплению, для любой исчезающей силы беспорядка и в общем случае зависящей от импульса скорости Рашбы $\alpha(p)$ и параболическом спектре $\epsilon(p)$.
- Для случая параболического спектра и постоянной “скорости Рашбы” α приведено простое доказательство зануления спин-холловского эффекта на основе анализа общих коммутационных соотношений для операторов. Этот результат остается верными также и для случая взаимодействующих электронов (по крайней мере, если взаимодействие не зависит от спинов), а также для более общего случая зонного спектра $\epsilon(p)$ и спин-орбитального расщепления $\alpha(p)$, если выполнено условие $p\alpha(p) = \text{const} \cdot \partial\epsilon/\partial p$.
- В чистом пределе $l \rightarrow \infty$ и в присутствии электрон-электронного взаимодействия, получено универсальное соотношение между зависящей от

частоты спин-холловской проводимостью $\sigma_{sH}(\Omega)$ и восприимчивостью Паули $\chi(\Omega)$.

- В чистом пределе для модели невзаимодействующих фермионов более высокого спина j найдена спин-холловская проводимость и показано, что $\sigma_{sH}(j)$ также универсальна и растет с j .
- Показано, что электрон-электронное взаимодействие перенормирует “универсальное” значение $\sigma_{sH}^{(0)} = e/8\pi\hbar$, на величину относительной поправки, определяющейся только стандартным параметром Кулона.

Глава 2.

- В рамках модели спин-орбитального металла с иерархией энергий $\epsilon_F \gg \alpha p_F \gg \omega_D \gg T_c$ для чистого поверхностного сверхпроводника в параллельном магнитном поле найден функционал Гинзбурга-Ландау, включая разложение до степеней восьмого порядка.
- На линии $T_c(H)$ найдены две критические точки: точка Лифшица \mathcal{L} и симметричная точка \mathcal{S} и тем самым показано существование “киральной” сверхпроводящей фазы с параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) \propto \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{r})$ и *большим* $Q \sim H/v_F$ на фазовой диаграмме.
- В киральной фазе найдены два условия самосогласования на Δ и на Q .
- На фазовой диаграмме найдены границы устойчивости БКШ и киральной фазы: линия Лифшица, оканчивающаяся в критической точке Ландау \mathcal{T} ; и линия, начинающаяся в симметричной точке.
- Установлено, что киральная фаза и пространственно четная фаза (полосатая структура) разделены двумя фазовыми переходами второго рода и промежуточной новой сверхпроводящей фазой.

- В БКШ и в киральной фазе найден равновесный сверхпроводящий ток, пропорциональный вариации свободной энергии по волновому вектору параметра порядка, и доказано, что равновесный ток в основном состоянии обращается в ноль.
- Найден тензор сверхпроводящей плотности электронов в БКШ и в киральной фазе и обнаружено, что на линии Лифшица сверхпроводящая плотность для направления тока $\perp \mathbf{h}$ обращается в ноль, что символизирует разрушение сверхпроводимости в окрестности этой линии. Вглубине киральной фазы сверхпроводящий отклик подобен отклику в обычной БКШ фазе.
- Исследовано влияние слабой киральной анизотропии на фазовую диаграмму и найден слабый градиент параметра порядка в основном состоянии БКШ, преобразующий ее в “длинноволновую киральную” фазу (на существование последней указал Agterberg [33]).
- В присутствии немагнитных примесей с помощью метода трансфер матрицы найдена критическая сила примесей, при которой происходит исчезновение неоднородных сверхпроводящих состояний.
- В грязном пределе обнаружено увеличение критического магнитного поля с усилением беспорядка.
- В грязном пределе и в первом порядке по α/v_F найдена слабая неоднородность БКШ состояния.
- Установлено, что в симметричной точке \mathcal{S} непрерывный вихрь с неразрушенной сверхпроводимостью в коре вихря энергетически более выгоден, чем сингулярный вихрь Абрикосова.
- Показано, что вблизи симметричной точки, из-за присутствия расширенной до $U(2)$ симметрии параметра порядка, имеют место существенные

флуктуации.

Глава 3.

- Получено обобщение уравнения Беенаккера, связывающее андреевский спектр джозефсоновского перехода с матрицей рассеяния в нормальном состоянии, на случай присутствия спин-орбитального взаимодействия.
- Для случая короткого контакта в присутствии спин-орбитального взаимодействия получено явное решение для энергии андреевских уровней, выраженных через коэффициенты прохождения.
- Получена матрица рассеяния в нормальном состоянии для модели бесконечно длинного непрозрачного контакта (присутствие нормального отражения на границе нормальный металл-сверхпроводник). Показано, что спин-орбитальное взаимодействие спин-расщепляет коэффициенты прохождения.
- Показано, что квазиклассическое среднее джозефсоновского тока тем не менее не зависит от взаимодействия Рашбы, если пренебрегать электрон-электронным взаимодействием в области двумерного электронного газа.
- Найдено уравнение на андреевский спектр для контакта произвольной длины и показано, что в присутствии взаимодействия Рашбы спин-расщепление является общей характеристикой андреевских уровней.
- Получена формула для полного среднего джозефсоновского тока, выраженная через спектральную функцию для случая контакта произвольной длины, из которой видно, что полный средний джозефсоновский ток не зависит от взаимодействия Рашбы независимо от длины контакта.
- Найдена спиновая поляризация в области двумерного электронного газа при ненулевом джозефсоновском токе. Вид зависимости среднеквадра-

тичной спиновой поляризации от величины спин-орбитального спаривания напоминает универсальные мезоскопические флуктуации проводимости.

Работы, представленные на защиту

1. O. V. Dimitrova, M. V. Feigel'man, *Phase diagram of a surface superconductor in parallel magnetic field*, Письма в ЖЭТФ, том **78**, стр. 637 (2003).
2. O. V. Dimitrova, *Spin-Hall conductivity in a two-dimensional Rashba electron gas*, Phys. Rev. B **71**, 245327 (2005).
3. O. V. Dimitrova, M. V. Feigel'man, *2D SNS junction with Rashba spin-orbit interaction*, ЖЭТФ, т. 129, вып. 4, с. 742-750 (2006).

Литература

- [1] E. I. Rashba, Sov. Phys. - Solid State **2**, 1109 (1960).
- [2] S. Murakami, N. Nagaosa, and S. C. Zhang, Science **301**, 1348 (2003); S. Murakami, N. Nagaosa, and S. C. Zhang, Phys. Rev. B **69**, 235206 (2004).
- [3] J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **92**, 126603 (2004).
- [4] J. I. Inoue, G. E. W. Bauer, and L. W. Molenkamp, Phys. Rev. B **70**, 041303(R) (2004).
- [5] E. G. Mishchenko, A. V. Shytov, and B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **93**, 226602 (2004).
- [6] Al. Khaetskii, Phys. Rev. Lett. **96**, 056602 (2006).
- [7] R. Raimondi and P. Schwab, Phys. Rev. B **71**, 033311 (2005).
- [8] D. N. Sheng, L. Sheng, Z. Y. Weng, F. D. M. Haldane, Phys. Rev. B **72**, 153307.
- [9] E. I. Rashba, Phys. Rev. B **68**, 241315 (2003).
- [10] E. I. Rashba, Phys. Rev. B, **70**, 201309 (2004).
- [11] E. I. Rashba, Phys. Rev. B **70**, 161201 (2004).
- [12] P. L. Krotkov and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **73**, 195307 (2006).

- [13] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1975).
- [14] L. V. Keldysh, Sov. Phys. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
- [15] A. G. Aronov, Yu. B. Lyanda-Geller, Pisma ZhETF **50**, 398 (1989).
- [16] V. M. Edelstein, Solid State Communications, Vol. **73**, No. 3, pp. 233-235, (1990).
- [17] E. I. Rashba, Phys. Rev. B **70**, 201309.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics (Course on Theoretical Physics)*, Pergamon Press; 2d rev. and enl. ed edition (1969).
- [19] S. I. Erlingsson, John Schliemann and D. Loss, Phys. Rev. B **71**, 035319 (2005).
- [20] L. P. Gor'kov and E. I. Rashba, Phys. Rev. Lett. **87**, 037004 (2001).
- [21] A. Shekhter, M. Khodas and A. M. Finkel'stein, Phys. Rev. B **71**, 165329 (2005).
- [22] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, D. D. Awschalom, *Science*, **306**, 1910 (2004b).
- [23] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova and T. Jungwirth, Phys. Rev. Lett., **94**, 047204 (2005).
- [24] V. Sih, R. C. Myers, Y. K. Kato, W. H. Lau, A. C. Gossard and D. D. Awschalom, *Nature Phys.*, **1**, 31.
- [25] S. Reich and Y. Tsauba, Eur.Phys. J. B **9**, 1 (1999). Y. Levi et al., Europhys. Lett., **51**, 564 (2000).
- [26] X. S. Wu and P. W. Adams, Y. Yang and R. L. McCarley, cond-mat/0509385.

- [27] V. M. Edelstein, JETP, **95**, 2151 (1989).
- [28] Л. Н. Булаевский, А. А. Гусейнов, А. И. Русинов, ЖЭТФ, **71**, 2356 (1976).
- [29] V. Barzykin and L. P. Gorkov, Phys.Rev.Lett.**89**, 227002 (2002).
- [30] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1136 (1964)
[Sov. Phys. JETP **20**, 762 (1965)].
- [31] P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
- [32] S. K. Yip, Phys. Rev. B **65**, 144508 (2002).
- [33] D. F. Agterberg, Physica C 387, 13 (2003).
- [34] L. G. Aslamazov, Sov. Phys. JETP **28**, 773 (1969).
- [35] R. A. Klemm and A. Luther, Phys. Rev. B **12**, 877 (1975).
- [36] H. Burkhardt and D. Rainer, Ann. Phys. (Berlin) **3**, 181 (1994).
- [37] Manfred Sigrist and Daniel F. Agterberg, Progress of Theoretical Physics, Vol.102, No. 5, 965 (1999).
- [38] V. N. Попов, *Functional Integrals and Collective Excitations*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [39] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Ландау (1995).
- [40] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, том V, *Статистическая Физика, часть 1*, Физматлит, Москва (2001).
- [41] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, том IX, *Статистическая Физика, часть 2*, Физматлит, Москва (2001).
- [42] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1963).

- [43] B. J. van Wees *et al*, Physica B **203**, 285 (1994).
- [44] H. Takayanagi, J. B. Hansen and J. Nitta, Physica B **203**, 291 (1994).
- [45] F. Giazotto *et al*, Journal of Superconductivity: Incorporating Novel Magnetism, **17**, 317 (2004); cond-mat/0207337.
- [46] A. Chrestin, T. Matsuyama and U. Merkt, Phys. Rev. B **55**, 8457 (1997).
- [47] Th.Schäpers *et al*, Phys. Rev. **67**, 014522 (2003).
- [48] M. Ebel *et al*, Phys. Rev. B **71**, 052506 (2005).
- [49] A. Brinkman and A. A. Golubov, Phys. Rev. B **61**, 11297 (2000).
- [50] A. Chrestin, T. Matsuyama and U. Merkt, Phys. Rev. B **49**, 498 (1994).
- [51] J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayangai and T. Enoki, Phys. Rev. Lett. **78**, 1335 (1997).
- [52] Y. Meir, Y. Gefen and O. Entin-Wohlman, Phys. Rev. Lett. **63**, 798 (1989).
- [53] E. Bezuglyi *et al*, Phys. Rev. B. **66** 052508 (2002).
- [54] I. V. Krive *et al*, Fiz. Niz. Temp. **30**, 535 (2004).
- [55] N. M. Chtchelkatchev and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **90**, 226806 (2003).
- [56] M. Khodas, A. Shekhter and A. M. Finkel'stein, Phys. Rev. Lett. **92**, 086602 (2004).
- [57] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **67**, 3836 (1991).
- [58] P.A.Mello and J.-L.Pichard, J.Phys.I (Paris), **1**, 493 (1991).
- [59] J. A. Melsen and C. W. J. Beenakker, Physica B **203**, 219 (1994).
- [60] N. I. Lundin *et al*, *Superlattices and Microstructures*, Vol. 20, No. 1, 1996.

- [61] Идея этого вычисления принадлежит Н. М. Щелкачеву.
- [62] Н. М. Щелкачев, Диссертация (2002), ИТФ им. Л. Д. Ландау, http://nms.itp.ac.ru/phd_nms.pdf.
- [63] T.Koga, Y.Sekine and J.Nitta, cond-mat/0504743; M.König, A.Tscheschetkin, E.M.Hankiewicz *et al*, Phys. Rev. Lett.**96**, 076804 (2006).
- [64] A. Ossipov et al, cond-mat/0603524.