

Российская Академия Наук  
Институт Теоретической Физики им. Л. Д. Ландау

---

На правах рукописи

ОСТРОВСКИЙ Павел Михайлович

УДК 538.945, 536.48

**ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ  
СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ГИБРИДНЫХ СТРУКТУРАХ**

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук  
М. В. Фейгельман

Черноголовка – 2004

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Квазилокализованные состояния в идеальной гибридной структуре</b>	<b>15</b>
1.1 Квазиклассический подход . . . . .	15
1.2 Суперматричная $\sigma$ -модель . . . . .	19
1.3 Параметризация многообразия $Q$ -матрицы . . . . .	22
1.4 Седловые точки . . . . .	24
1.5 Параметризация флуктуаций . . . . .	27
1.6 Одноинстантонное решение . . . . .	29
1.7 Точное решение вблизи порога . . . . .	32
<b>2 Квазилокализованные состояния в гибридной структуре с подавленной щелью</b>	<b>36</b>
2.1 SIN структура . . . . .	37
2.1.1 Действие для границы . . . . .	37
2.1.2 Нульмерное действие . . . . .	39
2.1.3 Классификация “хвостов” . . . . .	43
2.1.4 “Сильный хвост” . . . . .	47
2.2 SNS контакт с разностью фаз . . . . .	50
2.2.1 Зависимость щели от разности фаз . . . . .	50
2.2.2 Классификация седловых точек . . . . .	54
2.2.3 Решение вблизи порога . . . . .	57
2.2.4 “Сильный хвост” . . . . .	62
2.3 Метод теории случайных матриц . . . . .	64
<b>3 Неуниверсальная плотность состояний</b>	<b>67</b>
3.1 Контакт большой площади . . . . .	67

3.2	Сверхпроводник с магнитными примесями . . . . .	71
3.3	Предел малых энергий . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Кулоновские эффекты в SIN структуре</b>	<b>77</b>
4.1	SIN контакт . . . . .	77
4.1.1	Динамическая репличная $\sigma$ -модель . . . . .	78
4.1.2	Самосогласованный подход . . . . .	81
4.1.3	Термодинамическая плотность состояний . . . . .	85
4.1.4	Туннельная плотность состояний . . . . .	90
4.1.5	Квантование заряда . . . . .	97
4.1.6	Температурные эффекты . . . . .	101
4.2	Сверхпроводящий ток в SINIS контакте . . . . .	110
4.2.1	Зависимость тока от разности фаз . . . . .	110
4.2.2	Критический ток . . . . .	114
	<b>Заключение</b>	<b>120</b>
	<b>Приложения</b>	<b>122</b>
A	Параметризация $W$ . . . . .	122
B	Интегралы типа Эйри . . . . .	123
B	Роль мезоскопических флуктуаций . . . . .	125
Г	Разложение функционала Гинзбурга – Ландау . . . . .	131
	<b>Публикации по теме диссертации</b>	<b>135</b>
	<b>Литература</b>	<b>136</b>

# Введение

В настоящее время во многих научных центрах проводятся активные теоретические и экспериментальные исследования различных структур, состоящих из сверхпроводящих и нормальных элементов субмикронных размеров. Интерес к этим объектам вызван их необычными свойствами, связанными с процессами когерентной электронной динамики [1]. В частности, это открывает возможности для создания на основе таких структур элементной базы квантовых компьютеров, для которых когерентные процессы играют ключевую роль [2].

Характерной особенностью субмикронных систем являются специфические флуктуации, вызванные неконтролируемыми микроскопическими особенностями различных образцов,— мезоскопические флуктуации [1]. Мезоскопические свойства металлов проявляются, когда длина когерентности электронов проводимости сравнивается с характерными размерами образца. Миниатюризация элементов современных компьютеров также достигла масштабов на которых мезоскопические флуктуации становятся существенными. Кроме того, замечательные и необычные свойства мезоскопических структур представляют самостоятельный научный интерес с точки зрения проверки фундаментальных квантовых законов.

В гибридных структурах, состоящих из сверхпроводящих и нормальных частей, наблюдаются специфические эффекты мезоскопической сверхпроводимости. Эти явления известны под общим названием “эффекта близости”. Качественно они сводятся к подавлению сверхпроводимости в сверхпроводящих частях и к появлению некоторых сверхпроводящих свойств в нормальных областях. Одним из характерных примеров является эффект Джозефсона [3]. При туннелировании через слой изолятора куперовские пары частично сохраняют свою когерентность, и таким образом могут переносить сверхток через такой слой. Если же два сверхпроводящих контакта соединены областью нормального металла, аналогичный эффект имеет более сложную микроскопическую природу. Фундаментальным явлением в этом случае является андреевское от-

ражение [4, 5].

При падении электрона на границу раздела сверхпроводник – нормальный металл с нормальной стороны не может произойти его переход в сверхпроводник, потому что на соответствующей энергии в спектре сверхпроводника находится щель. Однако в этом случае возможен процесс андреевского отражения: вместо электрона в нормальный металл отражается дырка, а в сверхпроводник уходит куперовская пара [4]. По-другому этот процесс можно рассматривать как туннелирование куперовской пары из сверхпроводника в нормальный металл. Хотя при этом притяжение между электронами пропадает, они все еще несут когерентность, характерную для сверхпроводника. Если нормальный слой достаточно тонок, такая пара может попасть во второй сверхпроводник, перенося тем самым сверхток. Эта ситуация соответствует некоторой электронной траектории, соединяющей два сверхпроводящих берега: пройдя по этой траектории, электрон андреевски отражается в дырку, которая повторяет путь электрона в противоположном направлении, и после повторного андреевского отражения траектория замыкается. Такие траектории разрешены, когда на их протяжении укладывается целое число длин волн — так возникают андреевские состояния. Эти состояния образуют дискретный спектр и располагаются симметрично относительно уровня Ферми (в отсутствие тока). Таким образом, энергии, сколь угодно близкие к фермиевской, запрещены, и система обладает глобальной сверхпроводимостью.

На этом примере видно, как близость сверхпроводника приводит к изменению низкоэнергетического спектра нормального металла. Аналогичные явления, также обусловленные андреевским отражением, могут происходить и в более простом случае контакта одного сверхпроводника с нормальным металлом. При этом в нормальной области также будут возникать андреевские состояния, изменяя его спектр. Характер этих изменений существенно зависит от типа классической динамики электронов в нормальной части контакта [6]. Начнем с примера. Если нормальная область имеет правильную прямоугольную форму и не содержит примесей, то в ней будут существовать сколь угодно длинные траектории электронов между двумя андреевскими отражениями. Это приводит к появлению уровней с произвольно малой энергией, и, как следствие, щель в спектре отсутствует. Однако плотность состояний все же будет линейно стремиться к нулю при приближении к энергии Ферми [6, 7]. В общем случае спектр такого типа возникает, когда классическая динамика

электронов в нормальной области *интегрируема*.

Противоположный предел *хаотичной* динамики реализуется, например, в случае большой плотности потенциальных (немагнитных) центров рассеяния — примесей. При таких условиях движение электронов будет диффузным. Однако наивная попытка определить характер спектра, изучая вероятность траекторий различной длины приводит к неверному результату. Действительно, при хаотичном движении всегда можно найти сколь угодно длинные траектории, но, тем не менее, в спектре будет наблюдаться щель. Причина ошибки состоит в неучете эффектов квантовой интерференции [8, 9]. Дело в том, что квазиклассические диффузные траектории представляют собой ломаные линии: электрон последовательно рассеивается на большом количестве примесей. Для двух достаточно длинных траекторий почти наверняка найдется общая примесь. А значит кроме двух соответствующих андреевских состояний имеются еще как минимум два: электрон, летящий по первой траектории, после рассеяния на общей примеси переходит на вторую траекторию, а после андреевского отражения дырка на той же примеси возвращается на первую траекторию, и наоборот. Из-за эффектов квантовой интерференции между описанными процессами низколежащие андреевские уровни нельзя описывать на наивном языке простых траекторий.

Адекватная квазиклассическая техника для диффузных систем хорошо известна [10, 11, 12] и опирается на уравнение Узаделя. Качественно результат сводится к появлению щели в плотности состояний порядка  $\hbar/\tau_c$ , где  $\tau_c$  — характерное время диффузии между двумя андреевскими отражениями [6, 13, 14, 15]. Оно определяется силой и концентрацией примесей, размерами нормальной области и прозрачностью границы со сверхпроводником. Однако такая квазиклассическая теория не учитывает мезоскопические флуктуации. На качественном уровне можно считать, что коэффициент диффузии флуктуирует, и это приводит к отклонению величины щели в каждом конкретном образце от ее среднего значения. В результате усреднения по возможным конфигурациям примесей вместо строгого обращения плотности состояний в ноль будет наблюдаться ее резкое падение при соответствующей энергии, а при меньших энергиях она будет экспоненциально малой.

Можно сделать следующее общее утверждение. Если положение края спектра определяется физической величиной, которая может флуктуировать, то при усреднении по этим флуктуациям появляется “хвост” плотности состояний

в запрещенной области. Подобный “хвост” был впервые рассмотрен Лифшицем в обычном легированном полупроводнике [16]. Локализованные состояния в запрещенной зоне возникают за счет редких флуктуаций случайного потенциала. Для изучения этих явлений используется метод оптимальной флуктуации [16, 17, 18, 19]. Суть метода состоит в отыскании наиболее вероятной флуктуации, дающей определенное значение энергии локализованного состояния. Если такая оптимальная флуктуация найдена, можно пренебречь менее вероятными флуктуациями, дающими такой же результат, а затем усреднить плотность состояний по распределению вероятностей этих оптимальных флуктуаций. На сегодняшний день известно много примеров подобного рода флуктуационных эффектов в различных системах, см. например [20, 21, 22, 23, 24].

Существует другой, чисто феноменологический, метод работы с неупорядоченными системами — теория случайных матриц [25, 26, 27]. В рамках этой теории гамильтониан является случайной матрицей, причем различные матричные элементы считаются некоррелированными (исключая связи за счет дополнительных симметрий гамильтониана). В главном порядке по большому размеру матрицы средняя плотность состояний случайного гамильтониана представляет собой “вигнеровский полукруг”:  $\langle \rho(E) \rangle = \delta^{-1} \sqrt{1 - E^2/E_b^2}$ , где  $E_b$  — ширина зоны, а  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями в центре зоны.

Теория случайных матриц нашла широкое применение для описания спектральных свойств мезоскопических систем [28] благодаря свойству универсальности. Последнее проявляется в том, что, несмотря на различие на уровне микроскопического гамильтониана, спектры мезоскопических систем с хаотической динамикой и случайных матриц с одинаковыми  $\delta$  статистически совпадают. Впервые теория случайных матриц была применена для описания спектра металлической гранулы Горьковым и Элиашбергом [29]. Строгое микроскопическое доказательство гипотезы универсальности для этого случая позднее получил Ефетов [30], изучая парный коррелятор уровней энергии. При этом обе системы рассматриваются вдали от края зоны, когда среднюю плотность состояний можно считать не зависящей от энергии [31].

Вблизи края зоны средняя плотность состояний в ансамбле Вигнера–Дайсона в квазиклассическом приближении обращается в ноль корневым образом. При учете поправок к квазиклассическому результату появляется экспоненциально спадающий “хвост” при энергиях  $|E| > E_b$  [32]. В диффузной гибридной структуре плотность спектра вблизи края щели также имеет корневую особенность.

Если предположить, что форма “хвоста” полностью определяется квазиклассическим поведением плотности состояний около края спектра, то можно распространить результат теории случайных матриц на случай диффузной гибридной структуры. Это было проделано в работе [33].

Другой случай появления экспоненциально малого “хвоста” плотности состояний — сверхпроводник с магнитными примесями. Наличие магнитных примесей подавляет сверхпроводимость [34]. Если их концентрация не очень большая, то щель в спектре становится меньше по сравнению со сверхпроводником без примесей, но не обращается в ноль. Однако концентрация примесей может флуктуировать в пространстве, и, таким образом, есть ненулевая вероятность обнаружить уровень энергии ниже средней величины щели [23]. Метод оптимальной флуктуации в рамках теории случайных матриц для такой системы был развит в работе [35]. При этом концентрация магнитных примесей считалась настолько малой, что можно пренебречь эффектом подавления щели [34]. Для сверхпроводника с сильным потенциальным беспорядком и небольшой концентрацией магнитных примесей в рамках нелинейной  $\sigma$ -модели [36, 37] “хвост” подщелевых состояний изучался Ламакрафтом и Саймонсом [38]. Результаты, полученные в работах [35] и [38], противоречат друг другу. В конце раздела 2.3 будет указана причина и способ устранения этого противоречия. Явный вид оптимальной флуктуации магнитных примесей в относительно чистом пределе был получен в работе [24]. Эта флуктуация имеет ферромагнитную структуру и несферическую форму. Переход к диффузному пределу и связь с результатом [38] обсуждается в работе [39].

В обычной статистической физике основной величиной, определяющей свойства системы, является производящий функционал  $\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi, J]}$ . Различные корреляционные функции, в том числе и плотность состояний, выражаются через логарифмические производные от этого функционала по источникам  $J$ . Если в системе присутствует беспорядок, все корреляционные функции нужно по нему усреднять. То есть требуется среднее значение от  $\ln \mathcal{Z}$ . Однако логарифм нелинейная функция, и его усреднение в общем случае затруднительно. Один из способов обойти эту трудность — метод реплик — был предложен в работе [40]. Он нашел широкое применение в задачах статистической физики, в особенности для описания спиновых стекол [41]. Суть метода заключается в том, что вместо одной системы рассматривается  $M$  ее копий (реплик). При этом вычисляется  $M$ -тая степень производящего функционала

$\mathcal{Z}^M$ . Если удастся усреднить ее по беспорядку при произвольном значении  $M$  и сделать аналитическое продолжение к точке  $M = 0$ , то можно воспользоваться формулой  $\ln \mathcal{Z} = \lim_{n \rightarrow 0} (\mathcal{Z}^n - 1)/n$  для вычисления среднего логарифма.

Вычисление производящего функционала в общем виде при произвольном числе реплик часто оказывается достаточно сложным. Эта трудность снимается в методе нелинейной суперматричной  $\sigma$ -модели [36]. Он состоит в добавлении к физическим полям такого же количества грассмановых (антикоммутирующих) полей. При произвольном действии системы производящий функционал оказывается равным единице, и корреляционные функции определяются обычными вариационными производными этого функционала, вместо логарифмических. Одним из недостатков метода суперматричной нелинейной  $\sigma$ -модели является невозможность учесть эффекты взаимодействия.

Квазиклассическое приближение (уравнение Узаделя) соответствует вычислению производящего функционала методом перевала. Соответствующая седловая точка в действии нелинейной  $\sigma$ -модели суперсимметрична, то есть имеет одинаковый вид по коммутирующим и грассмановым переменным. Экспоненциально малый вклад от редких мезоскопических флуктуаций соответствует другим, несуперсимметричным седловым точкам — инстантонам. Впервые такое вычисление было проделано в работе [22] для плотности состояний на высоком уровне Ландау в двумерной системе в магнитном поле. Применимость метода перевала вблизи инстантонов обеспечивалась большим номером уровня Ландау. В случае сверхпроводящих гибридных структур соответствующим большим параметром будет безразмерный кондактанс системы.

Сходное явление наблюдается в нормальных системах при изучении асимптотик функции распределения плотности состояний, кондактанса и времен релаксации [42]. Мезоскопические флуктуации примесей приводят к тому, что в области энергий, отвечающих хорошо делокализованным состояниям, с экспоненциально малой вероятностью можно найти и состояния почти локализованные. Такие состояния обеспечивают аномально медленную релаксацию тока к его равновесному значению на очень больших временах (больше обратного среднего расстояния между уровнями размерного квантования) — то есть они служат в качестве “электронных ловушек”. Длинновременная асимптотика кондактанса мезоскопического образца определяется аномально локализованными состояниями [43]. В разделе 3.3 будет продемонстрировано соответствие между этой асимптотикой и плотностью квазилокализованных состояний в сверхпро-

водящей гибридной структуре глубоко под щелью.

Обобщение  $\sigma$ -модели для диффузных сверхпроводящих гибридных структур было предложено в работе [37]. Там же было сделано указание на то, что подщелевая плотность состояний соответствует инстантонам в этой модели и определяется состояниями, аномально локализованными в нормальной области [42, 43, 44, 45]. Возникающие за счет редких флуктуаций случайного потенциала, такие состояния плохо связаны со сверхпроводящими берегами и имеют энергию ниже края щели. Инстантонная конфигурация, ответственная за появление “хвоста” плотности состояний в однородном сверхпроводнике с магнитными примесями была найдена в работе [38].

Современная техника изготовления субмикронных гибридных структур позволяет непосредственно наблюдать появление щели в спектре нормального металла, наведенной за счет контакта со сверхпроводником [46, 47, 48]. Результаты экспериментов удовлетворительно описываются в рамках уравнения Узаделя. Подщелевая плотность состояний также заметно проявляется в этих экспериментах, однако вклад мезоскопических флуктуаций трудно отделить от различных факторов декогерентности, которые также влияют на низкоэнергетическую плотность состояний. Кроме того, в некоторых структурах наблюдаются спектры [49, 50], которые не получается объяснить даже простым уравнением Узаделя.

Одной из наиболее существенных причин сбоя фазы в мезоскопических системах является кулоновское взаимодействие. Когда емкость элементов структуры настолько мала, что изменение полного количества электронов на единицу приводит к существенному изменению энергии по сравнению с температурой и другими характерными энергетическими масштабами, становятся важными явления кулоновской блокады [51]. В сверхпроводящих системах заряд и фаза являются канонически сопряженными переменными, для которых справедлив принцип неопределенности Гейзенберга. Невозможность одновременно фиксировать обе величины приводит к конкуренции между когерентными процессами, лежащими в основе эффекта близости и фиксирующими фазу, и кулоновскими явлениями, фиксирующими заряд. Таким образом кулоновское взаимодействие приводит к подавлению эффекта близости. Поэтому учет кулоновской блокады необходим при рассмотрении когерентной динамики в мезоскопических гибридных структурах наряду с мезоскопическими флуктуациями.

Обычный метод изучения локальных электронных свойств мезоскопических систем состоит в измерении дифференциальной проводимости между иглой туннельного микроскопа и изучаемым образцом. Дифференциальная проводимость пропорциональна точной функции Грина образца взятой в наиболее близкой к игле точке. Эта величина имеет смысл *туннельной* плотности состояний. В системах с взаимодействием туннельная плотность состояний оказывается подавленной на низких энергиях [52]. Этот эффект носит название туннельной аномалии. Простое качественное объяснение состоит в том, что после туннелирования электрона в образец требуется определенное время, чтобы дополнительный заряд смог распределиться и “освободить место” для следующего электрона.

Наиболее сильно явление туннельной аномалии проявляется в низкоразмерных системах. Так, в грязной двумерной пленке подавление туннельной плотности состояний около энергии Ферми имеет логарифмический характер [52, 53]. В нульмерном случае маленькой металлической гранулы в туннельной плотности состояний образуется кулоновская щель, величина которой равна зарядовой энергии. Эта щель и является причиной явлений кулоновской блокады.

Кулоновская блокада в сверхпроводящих системах изучалось достаточно подробно [54, 55, 56], однако при этом эффект близости не принимался в расчет. Первая работа, в которой рассматривалось взаимовлияние эффекта близости и кулоновского взаимодействия, была выполнена Орегом и др. [57]. Для двумерной нормальной пленки, соединенной со сверхпроводником, в рамках метода ренормгруппы [58] была вычислена зависимость наведенной щели от константы экранированного кулоновского взаимодействия. Оказалось, что подавление щели за счет взаимодействия имеет степенной характер, причем щель полностью закрывается, если константа взаимодействия достигает определенного критического значения.

Таким образом, явления мезоскопических флуктуаций и кулоновского взаимодействия играют существенную роль в сверхпроводящих гибридных структурах. Изучение этих явлений имеет большое значение для развития современных представлений о таких системах и их возможного применения в качестве элементной базы квантовых компьютеров и в других электронных устройствах с использованием когерентных свойств.

Основные цели диссертационной работы заключаются в развитии метода нелинейной суперматричной  $\sigma$ -модели для учета мезоскопических флуктуаций

в сверхпроводящих гибридных структурах; применении полученных результатов для изучения низкоэнергетического спектра гибридных структур различной геометрии и различных характеристик контактов между элементами; построении самосогласованной теории кулоновской блокады для сверхпроводящих структур и изучении на ее основе свойств электронного спектра таких структур при наличии кулоновского взаимодействия.

Материал диссертации и полученные результаты организованы следующим образом. Первая глава посвящена вычислению плотности квазилокализованных состояний в нормальном металле, соединенном с одним или несколькими сверхпроводниками идеально прозрачными контактами. В начале излагается стандартный квазиклассический подход, основанный на уравнении Узаделя [12]. Свойства квазиклассического решения потребуются в дальнейшем для описания возможных инстантонов  $\sigma$ -модели. Затем приводится краткий вывод нелинейной суперматричной  $\sigma$ -модели Ефетова для сверхпроводящих гибридных структур [36, 37]. В разделе 1.3 построена явная параметризация многообразия  $\sigma$ -модели в терминах восьми углов. Далее на основе этой параметризации проделан анализ всех возможных седловых точек действия  $\sigma$ -модели, и указана их связь с решениями квазиклассического уравнения Узаделя. Затем предлагается явная параметризация флуктуаций около найденных седловых решений, которая диагонализует квадратичную форму действия. Также проанализированы массы различных мод и выделены наиболее существенные из них. Раздел 1.6 посвящен вычислению главного инстантонного вклада в плотность состояний, который обеспечивает появление подщелевого “хвоста”. В последнем разделе главы выполнено точное вычисление плотности состояний с учетом всех возможных седловых точек и получен универсальный результат, описывающий плотность состояний выше и ниже границы щели, а также и во всей переходной области.

В первой части второй главы полученные результаты для плотности состояний обобщаются на случай системы с неидеальными контактами. Показано, что структура седловых точек и флуктуаций около них сохраняется при добавлении в действие граничного члена. Затем выводится нульмерный предел  $\sigma$ -модели в случае туннельных контактов. Полученное действие позволяет проанализировать зависимость плотности состояний от величины прозрачности контактов и установить различные асимптотические выражения для подщелевого “хвоста” с экспоненциальной точностью. При этом оказывается, что пока-

затель экспоненты существенно изменяется, если прозрачность контактов ниже определенного критического значения. В следующем разделе вычислен предэкспоненциальный множитель для сильно туннельного случая и показано, что полное число состояний под щелью становится большим в этом пределе. Такая ситуация названа “сильным хвостом”.

Вторая часть второй главы посвящена симметричному SNS контакту с определенной разностью фаз. При протекании тока щель, наведенная в нормальной части контакта, подавляется [14] во многом аналогично тому, как это происходит в системах с туннельными границами. Существенное отличие контакта с разностью фаз заключается в изменении структуры седловых точек  $\sigma$ -модели. Как показано в разделе 2.2.2, если разность фаз превышает определенное критическое значение, главный инстантон, определяющий “хвост” плотности состояний в случае нулевого тока, исчезает. В следующем разделе проделан анализ масс различных флуктуационных мод около оставшейся седловой точки и получено точное выражение для плотности состояний в этом случае. По мере приближения разности фаз к  $\pi$  происходит переход к режиму “сильного хвоста”, полностью аналогичного “сильному хвосту” в системе с туннельными границами. Вывод этого результата приведен в разделе 2.2.4.

В конце второй главы излагаются основные положения метода теории случайных матриц [27] в применении к вычислению подщелевой плотности состояний в гибридных структурах [33]. Продемонстрированы сходства и различия предсказаний этой теории с результатами  $\sigma$ -модели.

В третьей главе рассматриваются различные ситуации, когда плотность состояний нельзя описывать в рамках нульмерной  $\sigma$ -модели. Первый раздел посвящен структурам с достаточно большой площадью контактов, когда размер инстантона меньше размера системы. В следующем разделе решается задача о сверхпроводнике с магнитными примесями и воспроизводится результат [38]. В конце главы с логарифмической точностью вычисляется плотность квазилокализованных состояний в гибридной структуре глубоко под щелью. Обсуждается связь полученных результатов с длинновременной асимптотикой контактанса [43].

Четвертая глава посвящена изучению кулоновских эффектов в нормальной грануле, соединенной туннельным контактом со сверхпроводником. Для рассмотрения временных флуктуаций потенциала гранулы, вызванных взаимодействием, используется динамическая репличная  $\sigma$ -модель Финкельштейна

[58], вывод которой изложен в первом разделе главы. В разделе 4.1.2 разработан самосогласованный метод учета эффекта близости и кулоновской блокады, который основан на адиабатическом приближении: энергия флуктуаций фазы считается большой по сравнению с величиной щели в спектре гранулы. Уравнения, выведенные в этом разделе, позволяют находить любые физические характеристики системы в указанном приближении. В разделах 4.1.3 – 4.1.5 вычислена величина термодинамической и туннельной плотности состояний, а также среднего заряда гранулы. В двух предельных случаях сильной и слабой кулоновской блокады получены приближенные аналитические выражения, а также приведены результаты численного расчета в общем случае. В разделе 4.1.6 изучается зависимость наведенной щели от температуры. Значение критической температуры вычислено аналитически в двух, указанных выше, предельных случаях и проанализирован общий результат, полученный численно. Оказывается, что при определенных значениях параметров системы возможна немонотонная, и даже возвратная, температурная зависимость величины щели.

Во второй части четвертой главы рассматривается случай, когда к грануле присоединены два сверхпроводника. В рамках развитого самосогласованного подхода вычисляется зависимость протекающего через систему сверхтока от разности фаз между сверхпроводниками. Из-за влияния кулоновского взаимодействия характеристика ток – фаза оказывается резко несимметричной. Последний раздел посвящен вычислению величины критического тока и ее зависимости от температуры.

# 1 Квазилокализованные состояния в идеальной гибридной структуре

## 1.1 Квазиклассический подход

Стандартный способ описания электронных свойств сверхпроводящих систем основан на матричном гамильтониане Боголюбова – де Жена [59, 60]

$$\mathcal{H} = \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}) \right) + \tau_x \Delta(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Этот гамильтониан имеет вид матрицы  $2 \times 2$  в пространстве Намбу – Горькова [61]. Мы используем обозначение  $\tau_i$  для матриц Паули в этом пространстве. В теории БКШ [62] сверхпроводящий параметр порядка  $\Delta(\mathbf{r})$  определяется самосогласованно. Мы же будем рассматривать системы, состоящие из сверхпроводящих и нормальных элементов, и интересоваться влиянием сверхпроводящих контактов на свойства нормального металла. В такой ситуации параметр порядка можно считать внешне заданным условием, поэтому уравнение самосогласования нам не потребуется. Фазу параметра порядка будем считать равной нулю. Гамильтониан (1.1) написан в предположении вещественности  $\Delta$ . Это упрощение будет снято в дальнейшем при рассмотрении систем с током.

Матричная функция Грина для гамильтониана (1.1) несет полную информацию об электронной динамике, включая быстрые осцилляции электронов, формирующих куперовские пары, и относительно медленное движение пары как целого. Такое разделение масштабов обеспечивается большим параметром  $k_F \xi$ . Квазиклассическое приближение соответствует усреднению быстрых колебаний электронов внутри пары [10]. Усреднение функции Грина по быстрым модам и беспорядку приводит в диффузном случае к уравнению Узаделя [12]:

$$\hbar D \nabla (\hat{g}(\mathbf{r}) \nabla \hat{g}(\mathbf{r})) + i[\tau_z E + i\tau_x \Delta, \hat{g}(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{g}^2(\mathbf{r}) = 1. \quad (1.2)$$

В этом уравнении  $D$  обозначает коэффициент диффузии, а энергия  $E$  отсчитывается от уровня Ферми.

Мы будем пользоваться стандартной угловой параметризацией квазиклассической функции Грина:

$$\hat{g} = \tau_z \cos \theta + \tau_x \sin \theta. \quad (1.3)$$

Узаделевский угол  $\theta$  содержит всю необходимую нам информацию. В случае наличия в системе тока и, как следствие, градиента фазы параметра порядка, необходимо также ввести еще один фазовый угол. Пока мы рассматриваем системы с постоянной фазой (в нашей калибровке она равна нулю) вполне достаточно использовать упрощенную параметризацию с одним углом. Уравнение Узаделя принимает при этом следующий вид:

$$\hbar D \nabla^2 \theta + 2iE \sin \theta + 2\Delta \cos \theta = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение Узаделя позволяет решать различные неоднородные задачи для сверхпроводящих систем. Мы будем интересоваться поведением электронной плотности состояний, которая выражается через запаздывающую квазиклассическую функцию Грина следующим образом

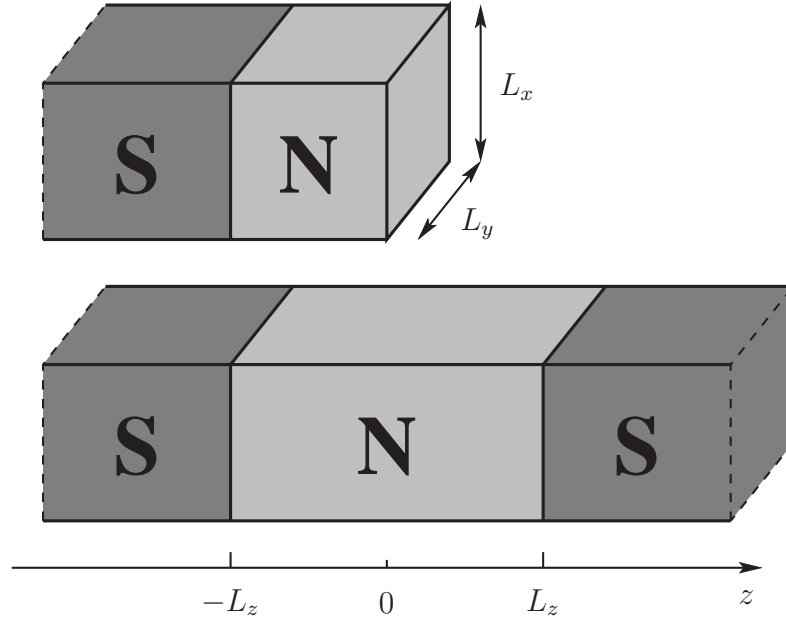
$$\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle = \nu \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\tau_z \hat{g}(\mathbf{r})) = 2\nu \operatorname{Re} \cos \theta, \quad (1.5)$$

где  $\nu$  обозначает металлическую плотность состояний без учета спина электрона.

Мы будем рассматривать различные гибридные структуры, состоящие из области нормального металла, соединенной со сверхпроводящими контактами. В нормальной области  $\Delta = 0$ , и соответствующий член в уравнении Узаделя отсутствует. При этом уравнение можно сделать вещественным с помощью замены переменных  $\theta = \pi/2 + i\psi$ .

$$\hbar D \nabla^2 \psi + 2E \operatorname{ch} \psi = 0. \quad (1.6)$$

Если нормальная область соединена со сверхпроводниками идеальными контактами, то угол  $\theta$  будет непрерывной функцией координат на границе. При энергиях много меньше  $\Delta$  (а только такие энергии мы и будем рассматривать) можно считать  $\theta = \pi/2$  в сверхпроводнике, а значит и в нормальном металле на границе со сверхпроводником. Таким образом, мы имеем нулевое граничное условие для уравнения (1.6). На свободной границе нормального металла должно выполняться условие обращения в ноль спектрального потока, что в нашем случае соответствует требованию  $\nabla_{\mathbf{n}} \psi = 0$ .



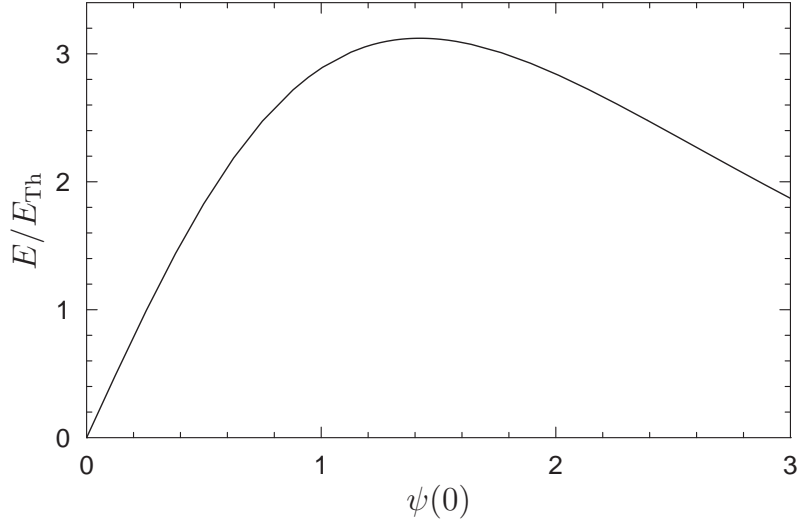
**Рис. 1.1.** Плоский NS и SNS контакт с прямоугольным сечением. Все результаты (за исключением раздела 3.1), относящиеся к контактам такой геометрии, справедливы в случае сечения произвольной формы и зависят только от площади сечения  $A = L_x L_y$ .

Влияние сверхпроводящих контактов приводит к образованию щели в спектре нормального металла [6, 13, 14, 15]. Это соответствует появлению вещественного решения уравнения (1.6). Продемонстрируем образование щели на примере плоского SNS контакта, изображенного на Рис. 1.1. В этом случае уравнение (1.6) легко интегрируется, и получается выражение энергии через значение  $\psi$  в точке  $z = 0$ :

$$\sqrt{\frac{E}{E_{\text{Th}}}} = \int_0^{\psi(0)} \frac{d\psi}{\sqrt{\text{sh } \psi(0) - \text{sh } \psi}}, \quad E_{\text{Th}} = \frac{\hbar D}{4L_z^2}. \quad (1.7)$$

График этой функции приведен на Рис. 1.2. Видно, что  $\psi$  принимает действительные значения (то есть плотность состояний нулевая) только при энергии меньшей определенного порогового значения  $E_g = 3.12E_{\text{Th}}$ . Это и есть таулессовская щель [13, 14]. В случае NS контакта решение уравнения Узаделя имеет такой же вид. Все последующие рассуждения справедливы и для этой геометрии.

На примере плоского контакта можно установить следующие общие свойства решений уравнения Узаделя. Уравнение (1.6) имеет два действительных решения при  $E < E_g$ . Меньшее из них будем обозначать  $\psi_1(\mathbf{r})$ , а большее —  $\psi_2(\mathbf{r})$ . При  $E = E_g$  эти решения совпадают:  $\psi_{1,2}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})$ . При  $E > E_g$  имеются



**Рис. 1.2.** Зависимость  $E/E_{\text{Th}}$  от значения  $\psi$  в середине плоского SNS контакта (1.7). Максимум функции соответствует пороговому значению энергии  $E_g \approx 3.12E_{\text{Th}}$ . Ниже порога уравнение Узаделя имеет два решения, одно из которых расходится при  $E \rightarrow 0$ .

два комплексных решения уравнения Узаделя; из них выбирается то, которое дает положительную плотность состояний. Под щелью из физических соображений выбирается  $\psi_1(\mathbf{r})$ , поскольку при стремлении энергии к нулю  $\psi_2(\mathbf{r})$  неограничено возрастает. Однако в дальнейшем мы покажем, что решение с  $\psi_2(\mathbf{r})$  возможно как флуктуация, которая и обеспечивает ненулевую плотность состояний при энергиях  $E < E_g$ .

В дальнейшем нам понадобится нормированная разность решений уравнения Узаделя при стремлении энергии к пороговой ( $V$  — объем нормальной области):

$$f_0(\mathbf{r}) = \lim_{E \rightarrow E_g} \frac{\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r})}{\sqrt{\int (\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r}))^2 \frac{d\mathbf{r}}{V}}}. \quad (1.8)$$

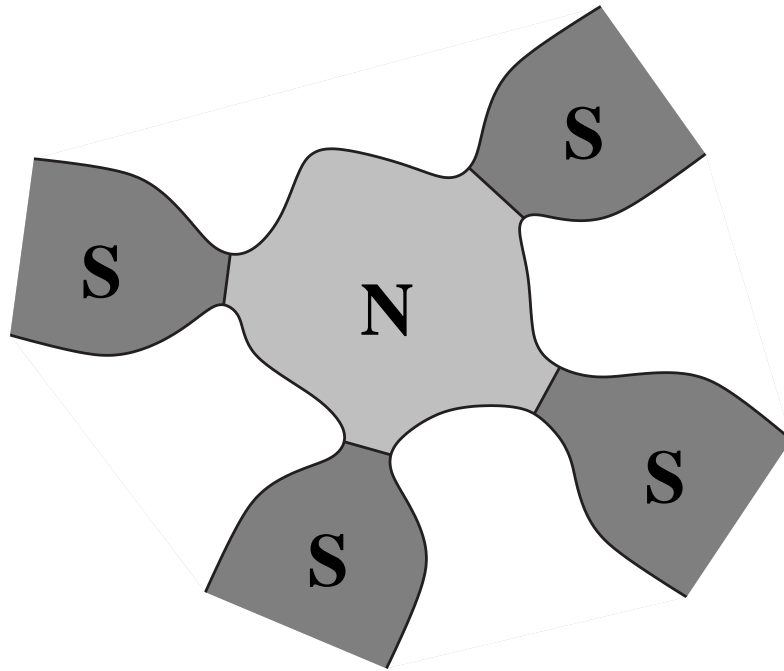
Функция  $f_0(x)$  подчиняется линейному уравнению, которое можно получить, взяв предел по энергии в разности уравнений Узаделя для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\hbar D \nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \text{sh } \psi_0 = 0. \quad (1.9)$$

Выражения для плотности состояний будут зависеть от геометрии системы лишь через два численных параметра:

$$c_1 = \int \frac{d\mathbf{r}}{V} f_0(\mathbf{r}) \text{ch } \psi_0(\mathbf{r}), \quad c_2 = \int \frac{d\mathbf{r}}{V} f_0^3(\mathbf{r}) \text{ch } \psi_0(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

В частности, для плоского NS или SNS контакта (Рис. 1.1)  $c_1 \approx 1.15$ ,  $c_2 \approx 0.88$ .



**Рис. 1.3.** Схематическое изображение нульмерного контакта между нормальной гранулой и несколькими сверхпроводниками. Основные результаты глав 1 и 2 получены в рамках нульмерной  $\sigma$ -модели для контакта произвольной формы.

Ниже мы будем рассматривать контакт произвольной геометрии (Рис. 1.3), предполагая при этом, что нормальная область имеет единственный характерный масштаб длины. В этом случае плотность состояний вблизи пороговой энергии  $E_g$  может быть найдена в рамках приближения нульмерной  $\sigma$ -модели (см. раздел 1.4). В случае контакта, размер которого вдоль границы со сверхпроводниками значительно превосходит расстояние между ними, помимо двух решений уравнения Узаделя, описанных выше, существуют также решения, имеющие вид солитона вдоль длинного направления. Этот случай требует особого рассмотрения, что будет сделано в разделе 3.1.

## 1.2 Суперматричная $\sigma$ -модель

Для нахождения инстантонных поправок к квазиклассической плотности состояний мы будем пользоваться эффективной суперсимметричной теорией поля ( $\sigma$ -модель Ефетова [36]) для сверхпроводящих систем [37]. Этот раздел посвящен краткому изложению вывода  $\sigma$ -модели. Суперматричная  $\sigma$ -модель используется для усреднения функции Грина по беспорядку и последующего выделения низкоэнергетических диффузных мод системы. Мы рассмотрим вывод

модели для гамильтониана Боголюбова – де Жена (1.1).

Плотность состояний выразим через функцию Грина:

$$\rho(E, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im tr} \int d\mathbf{r} G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; E). \quad (1.11)$$

Запаздывающую функцию Грина можно представить с помощью функционального интеграла по коммутирующим переменным следующего вида<sup>1</sup>:

$$G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -i \frac{\int \mathcal{D}u^* \mathcal{D}u u(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}')e^{-\mathcal{S}[u]}}{\int \mathcal{D}u^* \mathcal{D}u e^{-\mathcal{S}[u]}}. \quad (1.12)$$

Действие для функционального интеграла (1.12) выражается через гамильтониан (1.1) следующим образом:

$$\mathcal{S}[u] = -i \int d\mathbf{r} u^+(\mathbf{r})(E + i0 - \mathcal{H})u(\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

Чтобы в дальнейшем провести усреднение по беспорядку, нужно избавиться от нормировочного интеграла в знаменателе (1.12). С этой целью мы введем, дополнительно к полю  $u$ , грассманово (антикоммутирующее) поле  $\chi$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi \\ u \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -i \int \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Phi u(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}')e^{-\mathcal{S}[\Phi]}, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{S}[\Phi] = -i \int d\mathbf{r} \Phi^+(\mathbf{r})(E + i0 - \mathcal{H})\Phi(\mathbf{r}). \quad (1.16)$$

Поле  $\Phi$  состоит из четырех компонент, оно принадлежит произведению пространства Намбу – Горькова и суперсимметричного пространства Ферми – Бозе (FB). После усреднения по беспорядку нам нужно будет написать эффективное действие для медленных мод в  $\langle \Phi\Phi^+ \rangle$ . Кроме того нужно еще учесть медленные моды в куперовском канале  $\langle \Phi\Phi^T \rangle$  и  $\langle \Phi^*\Phi^+ \rangle$ . С этой целью уже сейчас сделаем дополнительное удвоение полей [36] (мы следуем обозначениям, принятым в [63]):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi \\ i\tau_y \Phi^* \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

<sup>1</sup> В этом выражении символ  $\mathcal{D}u^* \mathcal{D}u$  нужно понимать следующим образом:

$$\mathcal{D}u^* \mathcal{D}u = \prod_n \prod_{k=1,2} \pi^{-1} d \text{Re} u_n^{(k)} d \text{Im} u_n^{(k)},$$

где  $u_n^{(k)}$  — коэффициенты разложения  $k$ -ой компоненты вектора  $u(\mathbf{r})$  по некоторому ортонормированному базису функций.

Полученное пространство мы будем называть пространством “частица – дырка” (РН). Удвоение переменных позволит в дальнейшем учесть корреляции, связанные с зеркальной симметрией гамильтониана Боголюбова – де Жена (1.1):  $\mathcal{H} = -(i\tau_y)\mathcal{H}^T(i\tau_y)^T$ . Вектор  $\psi$  состоит из “частичного” (верхнего) и “дырочного” блоков. Матрицы Паули в пространстве РН будем обозначать  $\sigma_i$ . Введем операцию зарядового сопряжения супервекторов и суперматриц [63]:

$$\bar{\psi} = (C\psi)^T, \quad \bar{A} = CA^T C^T, \quad C = -\tau_x \begin{pmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (1.18)$$

Усреднение по примесям в (1.15) приводит к действию следующего вида:

$$\mathcal{S}[\psi] = -i \int d\mathbf{r} \left[ \bar{\psi} \left( \Lambda(E + i0) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - i\tau_y \Delta(\mathbf{r}) \right) \psi + \frac{\hbar(\bar{\psi}\psi)^2}{4\pi\nu\tau} \right], \quad (1.19)$$

где введено обозначение  $\Lambda = \sigma_z \tau_z$  и время свободного пробега  $\tau$ . Член четвертой степени нужно расцепить при помощи преобразования Хаббарда – Стратоновича. Для этого вводится матричное суперполе  $Q$  размера  $8 \times 8$ . Преобразование приводит к следующему действию:

$$\mathcal{S}[\psi, Q] = -i \int d\mathbf{r} \left[ \bar{\psi} \left( \Lambda(E + i0) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - i\tau_y \Delta(\mathbf{r}) + \frac{i\hbar Q}{2\tau} \right) \psi + \frac{\pi\hbar\nu}{8\tau} \text{str} Q^2 \right]. \quad (1.20)$$

Мера функционального интегрирования по новому полю  $Q$  определяется из условия суперсимметрии:  $\int \mathcal{D}Q \exp(-\text{str} Q^2) = 1$ .

В результате, интеграл по полям  $\psi$  стал гауссовым, и его можно взять. Однако есть одна сложность, состоящая в том, что не все компоненты  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  независимы. Когда было введено пространство РН (формула (1.17)), новые переменные не добавились, а только по-другому были перегруппированы старые. Действие, усредненное по  $\psi$ , имеет вид:

$$\mathcal{S}[Q] = \int d\mathbf{r} \text{str} \left\{ \frac{\pi\nu}{8\tau} Q^2 - \frac{1}{2} \ln \left[ \sigma_z(E + i0) - \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) - \tau_x \Delta + \frac{i\hbar\tau_z}{2\tau} Q \right] \right\}. \quad (1.21)$$

Указанное обстоятельство привело к тому, что перед логарифмом появился коэффициент  $1/2$ , и к необходимости наложить условие самосопряженности на  $Q$ :

$$Q = \bar{Q}. \quad (1.22)$$

Очевидной седловой точкой действия (1.21) является  $Q = \Lambda$ . Приближение  $\sigma$ -модели состоит в нахождении седлового решения, медленно зависящего от

координат. С этой целью полагаем  $Q = e^{-iU/2}\Lambda e^{iU/2}$ , и оставляем в действии главные члены по градиентам  $Q$ , энергии  $E$  и по величине параметра порядка  $\Delta$ . Результатом такого разложения является действие  $\sigma$ -модели [37]:

$$\mathcal{S}[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \operatorname{str} [\hbar D(\nabla Q)^2 + 4iQ(\Lambda(E + i0) + i\tau_x \Delta)], \quad Q^2 = 1. \quad (1.23)$$

Плотность состояний в такой модели выражается с помощью интеграла по  $Q$  следующим образом:

$$\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle = \frac{\nu}{4} \operatorname{Re} \int \mathcal{D}Q \operatorname{str}(k\Lambda Q(\mathbf{r})) e^{-\mathcal{S}[Q]}. \quad (1.24)$$

Здесь введено обозначение для нарушающей суперсимметрию матрицы [36]:

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (1.25)$$

### 1.3 Параметризация многообразия $Q$ -матрицы

Суперматрица  $Q$  имеет размер  $8 \times 8$  и содержит, в общем случае, 32 комплексных коммутирующих и столько же антикоммутирующих (грассмановых) параметра. Условие  $Q = \bar{Q}$  уменьшает их количество вдвое. По построению  $\sigma$ -модели матрица  $Q$  обладает такой же структурой собственных значений как  $\Lambda$ :  $Q = e^{-iU/2}\Lambda e^{iU/2}$ , что уменьшает количество независимых параметров до 8 комплексных и 8 грассмановых. В этом разделе мы построим параметризацию коммутирующей части  $Q$ -матрицы.

Условие самосопряженности для  $Q$  приводит к антисамосопряженности для  $U$ :  $U + \bar{U} = 0$ . Кроме того, наложим естественное условие  $\{\Lambda, U\} = 0$ , так как только такие генераторы могут “повернуть” матрицу  $\Lambda$ . В отсутствие грассмановых переменных матрицы  $Q$  и  $U$  распадаются на два независимых сектора (FF и BB). Операция зарядового сопряжения действует по-разному в этих секторах, что приводит к их различной топологии. Матрица  $U$  содержит следующие генераторы:

$U^{\text{FF}}:$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z \tau_x$	$\sigma_z \tau_y$
$U^{\text{BB}}:$	$\sigma_x \tau_z$	$\sigma_y \tau_z$	$\sigma_z \tau_x$	$\sigma_z \tau_y$

FF-сектор порождается четырьмя попарно антикоммутирующими генераторами. Поэтому топологически он представляет собой 4-мерную комплексную сферу  $S_4$ . Генераторы BB-сектора разбиваются на две пары, внутри которых

они антикоммутируют, а между парами — коммутируют. То есть ВВ-сектор представляет собой произведение двух двумерных комплексных сфер. Сферические углы выберем следующим образом:

$$\begin{aligned}
Q^{\text{FF}} &= \tau_z \cos \theta_{\text{F}} [\sigma_z \cos k_{\text{F}} + \sin k_{\text{F}} (\sigma_x \cos \chi_{\text{F}} + \sigma_y \sin \chi_{\text{F}})] + \\
&\quad + \sin \theta_{\text{F}} (\tau_x \cos \varphi_{\text{F}} + \tau_y \sin \varphi_{\text{F}}), \\
Q^{\text{BB}} &= [\sigma_z \cos k_{\text{B}} + \tau_z \sin k_{\text{B}} (\sigma_x \cos \chi_{\text{B}} + \sigma_y \sin \chi_{\text{B}})] \times \\
&\quad \times [\tau_z \cos \theta_{\text{B}} + \sigma_z \sin \theta_{\text{B}} (\tau_x \cos \varphi_{\text{B}} + \tau_y \sin \varphi_{\text{B}})].
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Отметим еще дополнительную симметрию многообразия  $Q^{\text{BB}}$ : матрица не изменяется при одновременной инверсии обеих сфер:  $(\theta_{\text{B}}, \varphi_{\text{B}}, k_{\text{B}}, \chi_{\text{B}}) \rightarrow (\pi - \theta_{\text{B}}, \varphi_{\text{B}} + \pi, \pi - k_{\text{B}}, \chi_{\text{B}} + \pi)$ . В результате, ВВ сектор оказывается топологически эквивалентным профакторизованному произведению  $S_2 \times S_2/Z_2$ .

Общее требование сходимости  $\sigma$ -модели накладывает условие компактности FF-сектора и некомпактности ВВ-сектора, что уменьшает количество независимых переменных до 4 действительных в FF- и ВВ-секторах.

Подставляя матрицу  $Q$  в уравнение (1.23), находим явное представление действия через введенные углы:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \frac{\pi\nu}{2} \int d\mathbf{r} (\mathcal{L}^{\text{FF}} - \mathcal{L}^{\text{BB}}), \\
\mathcal{L}^{\text{FF}} &= \hbar D [(\nabla\theta_{\text{F}})^2 + \sin^2 \theta_{\text{F}} (\nabla\varphi_{\text{F}})^2 + \cos^2 \theta_{\text{F}} (\nabla k_{\text{F}})^2 + \cos^2 \theta_{\text{F}} \sin^2 k_{\text{F}} (\nabla\chi_{\text{F}})^2] + \\
&\quad + 4iE \cos \theta_{\text{F}} \cos k_{\text{F}} - 4\Delta \sin \theta_{\text{F}} \cos \varphi_{\text{F}}, \\
\mathcal{L}^{\text{BB}} &= \hbar D [(\nabla\theta_{\text{B}})^2 + \sin^2 \theta_{\text{B}} (\nabla\varphi_{\text{B}})^2 + (\nabla k_{\text{B}})^2 + \sin^2 k_{\text{B}} (\nabla\chi_{\text{B}})^2] + \\
&\quad + 4iE \cos \theta_{\text{B}} \cos k_{\text{B}} - 4\Delta \sin \theta_{\text{B}} \cos k_{\text{B}} \cos \varphi_{\text{B}}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Углы  $\theta$  и  $\varphi$  в обоих секторах имеют смысл узаделевского угла и фазы параметра порядка. Для определения седловых конфигураций этого действия при отсутствии токов в контакте мы можем сразу положить  $\varphi_{\text{F}} = \varphi_{\text{B}} = 0$ . На седловом решении углы  $\chi_{\text{F,B}}$  не зависят от координат и являются полностью циклическими: действие не зависит от  $\chi_{\text{F,B}}$ . Угол  $k_{\text{F}}$  также равен нулю на седловом решении. В ВВ-секторе удобно сделать замену переменных:

$$\theta_{\text{B}} = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad k_{\text{B}} = \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{1.28}$$

В результате переменные разделяются, и в терминах углов  $\theta_{\text{F}}, \alpha, \beta$  действие

имеет простой вид:

$$\mathcal{S}[\theta_F, \alpha, \beta] = 2S_0[\theta_F] - S_0[\alpha] - S_0[\beta], \quad (1.29)$$

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} [\hbar D(\nabla\theta)^2 + 4iE \cos\theta - 4\Delta \sin\theta]. \quad (1.30)$$

## 1.4 Седловые точки

Вариация действия (1.30) приводит к уравнению (1.4). Таким образом, седловые точки описываются уравнением Узаделя по каждой из трех переменных ( $\theta_F$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ ). Согласно разделу 1.1, уравнение Узаделя имеет два решения:  $\theta_1(\mathbf{r})$  и  $\theta_2(\mathbf{r})$ . (Исключение составляет ситуация, когда размер контакта вдоль границы со сверхпроводниками значительно превосходит расстояние между ними; этот случай будет рассмотрен отдельно в разделе 3.1.) Так как при  $E = E_g$  решения  $\theta_1(\mathbf{r})$  и  $\theta_2(\mathbf{r})$  совпадают, то мода, переводящая  $\theta_1(\mathbf{r})$  в  $\theta_2(\mathbf{r})$ , смягчается вблизи порога. В результате этого, функциональный интеграл по  $Q(\mathbf{r})$  становится обычным интегралом по суперматрице  $Q$ , то есть происходит переход к нульмерной  $\sigma$ -модели.

Итак, в нульмерном случае существует в общей сложности  $2^3 = 8$  седловых решений. Если выбрать решение  $\theta_1$  во всех трех переменных  $\theta_F$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , то автоматически получим, что  $\theta_B = \theta_1$ ,  $\theta_F = \theta_1$  и  $k_B = 0$ , то есть FF- и ВВ-сектора будут тождественны друг другу. После разложения действия (1.27) до второго порядка по флуктуациям около такой седловой точки оказывается, что супердетерминант этой квадратичной формы равен единице, что является прямым следствием FF – ВВ симметрии решения. Функциональный интеграл (1.24) при этом сводится к (1.5). Таким образом, квазиклассика получается из  $\sigma$ -модели в перевальном приближении около суперсимметричной седловой точки.

Высшие порядки разложения действия вблизи суперсимметричного перевала соответствуют пертурбативным поправкам к квазиклассическому ответу. Они были проанализированы в работе [37], где показано, что их учет приводит к перенормировке  $E_g$ . При этом плотность состояний ниже перенормированного значения щели по-прежнему обращается в нуль. Средняя плотность состояний оказывается конечной во всем диапазоне энергий лишь при учете других седловых точек — инстантонов. Иными словами, нужно использовать второе решение уравнения Узаделя в одной или нескольких переменных  $\theta_F$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Плотность состояний обращается в ноль, когда  $\text{Re } \theta_{1,2} = \pi/2$ . Это равенство справедливо для обоих узделевских решений при  $E < E_g$ . Как же инстантон может дать вклад в подщелевую плотность состояний? Оказывается, что квадратичное действие вблизи инстантонной седловой точки содержит отрицательное собственное значение, а значит в интеграле по флуктуациям вблизи инстантона возникает мнимая единица, и, как следствие, появляется ненулевая плотность состояний под щелью.

Перейдем к обсуждению возможных инстантонов в нульмерном случае. Сначала отметим очевидное неравенство:

$$S_0[\theta_1] > S_0[\theta_2]. \quad (1.31)$$

Чтобы действие (1.29) на инстантоне было положительным, необходимо зафиксировать  $\theta_F = \theta_1$ . В дальнейшем, в разделе 1.7, мы покажем, что седловая точка  $\theta_F = \theta_2$  не может быть достигнута деформацией контура интегрирования по переменным FF сектора при условии сходимости  $\sigma$ -модели. Итак, остаются три нестандартных седловых решения в ВВ-секторе:  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_1)$ ,  $(\alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2)$  и  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_2)$ . На первый взгляд, первые два решения нарушают симметрию по углу  $\chi_B$ . На самом деле, эта симметрия восстанавливается за счет того, что существует целое седловое кольцо, которому принадлежат обе эти точки. Различные точки этого кольца отличаются величиной угла  $\chi_B$ . В частности, точки  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_1)$  и  $(\alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2)$  получаются одна из другой изменением угла  $\chi_B$  на  $\pi$ . Это кольцо мы будем называть *первым* инстантоном. Третье решение  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_2)$  представляет собой изолированную седловую точку. Назовем ее *вторым* инстантоном.

Оба инстантонных решения могут быть представлены в виде

$$Q_0 = e^{-iU_0/2} \Lambda e^{iU_0/2} = \Lambda e^{iU_0}, \quad (1.32)$$

где

$$U_0^{\text{FF}} = \sigma_z \tau_y \theta_F, \quad U_0^{\text{BB}} = \sigma_z \tau_y \theta_B + \tau_z k_B (\sigma_y \cos \chi_B - \sigma_x \sin \chi_B). \quad (1.33)$$

При этом на кольце первого инстантона

$$\theta_F = \frac{\pi}{2} + i\psi_1(\mathbf{r}), \quad \theta_B = \frac{\pi}{2} + i \frac{\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})}{2}, \quad k_B = i \frac{\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r})}{2}, \quad \chi_B \in [0, 2\pi), \quad (1.34)$$

а на втором инстантоне

$$\theta_F = \frac{\pi}{2} + i\psi_1(\mathbf{r}), \quad \theta_B = \frac{\pi}{2} + i\psi_2(\mathbf{r}), \quad k_B = 0. \quad (1.35)$$

Инстантонное действие может быть легко найдено вблизи квазиклассического края спектра  $E_g$ . Для этого воспользуемся тем, что на пороге оба решения уравнения Узаделя совпадают:  $\theta_{1,2}(\mathbf{r}) = \theta_0(\mathbf{r}) = \pi/2 + i\psi_0(\mathbf{r})$ . При  $E \rightarrow E_g$  их отличие задается нормированной функцией  $f_0(\mathbf{r})$ , определенной в (1.8).

Для вычисления действия на инстантоне подставим  $\theta(\mathbf{r}) = \pi/2 + i\psi_0(\mathbf{r}) + igf_0(\mathbf{r})$  в выражение (1.30) и разложим его по  $g$  и безразмерной энергии  $\varepsilon$ , отсчитанной от порога:

$$\varepsilon = \frac{E_g - E}{E_g}. \quad (1.36)$$

В результате получим

$$S_0[\theta] = S_0[\theta_0] + \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left[ 2gf_0 (\hbar D\nabla^2 \psi_0 + 2E_g \operatorname{ch} \psi_0) + g^2 f_0 (\hbar D\nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \operatorname{sh} \psi_0) - 4E_g \varepsilon g f_0 \operatorname{ch} \psi_0 + \frac{2}{3} E_g g^3 f_0^3 \operatorname{ch} \psi_0 \right] \quad (1.37)$$

Первое слагаемое под интегралом обращается в ноль в силу уравнения Узаделя (1.6), а второе — в силу (1.9). Таким образом можно представить  $S_0$  в виде кубического многочлена от  $g$ :

$$S_0[\theta] = \text{const} + \frac{\pi E_g}{2\delta} \left[ -2c_1 \varepsilon g + \frac{c_2}{3} g^3 \right]. \quad (1.38)$$

Здесь введено среднее расстояние между уровнями  $\delta = (\nu V)^{-1}$ . Полученное выражение имеет два экстремума:

$$g_{\pm} = \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{2c_1}{c_2} \varepsilon, \quad (1.39)$$

которые соответствуют двум решениям уравнения Узаделя:  $g_+$  соответствует решению  $\theta_2(\mathbf{r})$ , а  $g_-$  — решению  $\theta_1(\mathbf{r})$ . Подставляя их в (1.29), получим для действия первого инстантона:

$$\mathcal{S}_1 = S_0[\theta_1] - S_0[\theta_2] = \frac{4}{3} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2}, \quad (1.40)$$

где мы обозначили

$$\tilde{G} = \frac{\pi c_2 E_g}{2\delta}. \quad (1.41)$$

Для плоского NS контакта (Рис. 1.1) эта величина имеет порядок безразмерного (в единицах  $e^2/\hbar$ ) кондактанса нормальной области:  $\tilde{G} \approx 0.54 G_N$ ,  $G_N = 2\hbar\nu DA/L_z$ . В случае SNS контакта кондактанс вдвое меньше,  $G_N = \hbar\nu DA/L_z$ , а параметр  $\tilde{G}$  вдвое больше —  $\tilde{G} = 2.16 G_N$ .

Согласно уравнению (1.29), действие второго инстантона  $\mathcal{S}_2$ , в два раза превосходит действие первого инстантона  $\mathcal{S}_1$ . Поэтому их относительный вклад в плотность состояний определяется величиной  $\mathcal{S}_1$ . При  $\mathcal{S}_1 \gg 1$  вклад второго инстантона экспоненциально подавлен по сравнению со вкладом первого, который, в свою очередь, также экспоненциально мал. Этот режим, соответствующий энергиям достаточно далеким от порога, будет рассмотрен в разделе 1.6. Строго при  $E = E_g$  действие  $\mathcal{S}_1$  обращается в нуль. Поэтому в окрестности порога существует *флуктуационная область*, определяемая неравенством  $|\tilde{\varepsilon}| \lesssim \tilde{G}^{-2/3}$ , где  $\mathcal{S}_1 \lesssim 1$ , так что вклады обоих инстантонов оказываются одного порядка, и их невозможно разделить.

Точное решение, учитывающее оба инстантона во всей области энергий, будет приведено в разделе 1.7.

## 1.5 Параметризация флуктуаций

Для того чтобы применить метод перевала с найденной нами седловой точкой, нужно взять интеграл по всем возможным флуктуациям  $Q$ -матрицы около инстантона. С этой целью мы в матричной форме разложим действие до второго порядка вблизи седла, а потом предложим параметризацию, диагонализующую квадратичную форму действия.

Введем матрицу  $W$ , которая будет описывать флуктуации:

$$Q = e^{-iU_0/2} e^{-iW/2} \Lambda e^{iW/2} e^{iU_0/2}, \quad \{\Lambda, W\} = 0, \quad W + \bar{W} = 0. \quad (1.42)$$

Теперь нужно матрицу  $Q$ , выраженную через  $W$ , подставить в действие (1.23) и разложить его до второго порядка по  $W$ . Мы будем считать  $\Delta = 0$ , так как работать с этим действием мы собираемся только в нормальной области. Квадратичная часть действия выглядит так:

$$\mathcal{S}^{(2)}[W] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \operatorname{str} \left[ \hbar D (\nabla W)^2 + \frac{\hbar D}{4} [\nabla U_0, W]^2 - 2iE\Lambda Q_0 W^2 \right]. \quad (1.43)$$

Матрица  $W$ , так же как и  $Q$ , содержит 8 коммутирующих и столько же грасмановых параметров. Ее полная параметризация, в которой действие (1.43) оказывается диагональным, приведена в приложении А. Четверки действительных переменных  $a, b, c, d$  и  $m, n, p, q$  параметризуют FF- и ВВ-сектор  $W$  соответственно, а восемь грасмановых переменных  $(\lambda, \mu, \zeta, \varkappa, \eta, \gamma, \xi, \omega)$  параметризуют антикоммутирующую часть матрицы  $W$ . Будучи выраженной через

новые переменные, квадратичная по флуктуациям вблизи решения  $(\theta_F, \alpha, \beta)$  часть действия принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2)} = & \left( a \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ a \right) + \left( b \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^- b \right) + \left( c \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ c \right) + \left( d \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ d \right) + \\ & + \left( m \hat{O}_{\alpha\beta}^+ m \right) + \left( n \hat{O}_{\alpha\beta}^- n \right) + \left( p \hat{O}_{\beta\beta}^- p \right) + \left( q \hat{O}_{\alpha\alpha}^- q \right) + \\ & + \left( \lambda \hat{O}_{\alpha\theta_F}^+ \eta \right) + \left( \mu \hat{O}_{\beta\theta_F}^+ \gamma \right) + \left( \varkappa \hat{O}_{\beta\theta_F}^- \omega \right) + \left( \zeta \hat{O}_{\alpha\theta_F}^- \xi \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Здесь введены операторы  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$ , действующие согласно

$$\left( a \hat{O}_{\alpha\beta}^\pm b \right) = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} a(\mathbf{r}) \left[ -\hbar D \nabla^2 - \frac{\hbar D}{4} (\nabla\alpha \pm \nabla\beta)^2 - iE(\cos\alpha + \cos\beta) \right] b(\mathbf{r}). \quad (1.45)$$

Операторы  $\hat{O}$  обладают дискретным спектром, так как флуктуации происходят в ограниченном пространстве нормальной области. Обозначим собственные значения оператора  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$  через  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_n$ , где  $n$  пробегает значения от 0 до  $\infty$ . Из уравнения (1.45) следует, что расстояние между первым возбужденным и основным состояниями любого оператора  $\hat{O}$  имеет порядок  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_1 - (\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_0 \sim E_g/\delta$ . Низшие собственные значения операторов  $\hat{O}^+$  также имеют масштаб  $E_g/\delta$ . Основное состояние оператора  $\hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-$  имеет нулевое собственное значение, а его собственная функция с точностью до нормировки есть  $\sin[(\theta_1 - \theta_2)/2]$ . Строго на пороге, при  $E = E_g$ , основные состояния операторов  $\hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-$  и  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$  также обладают нулевыми собственными значениями. При отходе от порога в сторону уменьшения энергии,  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0$  становится положительным, а  $(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0$  — отрицательным. При этом в пределе  $E_g - E \ll E_g$  выполняется неравенство  $|(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^-)_0| \ll E_g$ .

Спектр операторов  $\hat{O}$  определяет массы  $\mathcal{E}_n$  различных флуктуаций вблизи инстантонных седловых решений. В зависимости от их величины можно выделить следующие три типа флуктуаций:

1. Нулевые моды. К строго нулевым модам относятся грассмановы голдстоуновские моды, восстанавливающие нарушенную седловым решением суперсимметрию (мода  $\zeta\xi$  для первого инстантона и моды  $\zeta\xi, \varkappa\omega$  для второго инстантона), а также голдстоуновская мода  $n$ , восстанавливающая симметрию первого инстантона по углу  $\chi_B$ . Нулевые моды соответствуют основному состоянию оператора  $\hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-$ .
2. Мягкие моды. К ним относятся флуктуации переменных  $b, p$  и  $q$ , а также, в случае первого инстантона, мода  $\varkappa\omega$ , которые отвечают основным состо-

аниям операторов  $\hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-$  и  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$ . При  $E \rightarrow E_g$  масса мягких мод стремится к нулю.

3. Жесткие моды. Они имеют массу порядка  $E_g/\delta$  и выше, так что их флуктуации малы по параметру  $E_g/\delta \sim G_N \gg 1$ . Это неравенство обеспечивает применимость метода перевала. К жестким модам относятся все собственные состояния операторов  $\hat{O}^+$  и возбужденные состояния операторов  $\hat{O}^-$ .

## 1.6 Одноинстантонное решение

В этом разделе мы найдем вклад первого инстантона в среднюю плотность состояний. Мы будем работать вблизи квазиклассического края спектра  $E_g$ , но вне флуктуационной области,  $\tilde{G}^{-2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ , когда можно пренебречь вкладом второго инстантона. Согласно классификации раздела 1.4, на первом инстантоне  $(\theta_F, \alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2, \theta_1)$  действие (1.44) обладает нулевой модой в переменной  $n$ , грассмановой нулевой модой  $\zeta\xi$  и мягкими модами в переменных  $b, p, q, \kappa\omega$ . Все остальные моды являются жесткими.

Неравенство  $\tilde{G} \gg 1$  гарантирует, что, интегрируя по жестким флуктуациям, можно не учитывать предэкспоненту в формуле (1.24). Тогда интегрирование становится тривиальными и дает супердетерминант квадратичной формы (1.44):

$$\sqrt{\frac{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-}{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-}} = 1 + O(\varepsilon). \quad (1.46)$$

Здесь штрих означает исключение низшего собственного значения, а равенство следует из оценки  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^\pm)_n - (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^\pm)_n = O(\varepsilon)$  (для собственных значений  $\mathcal{E}^-$  индекс  $n > 0$ ) и асимптотики  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_n \propto n^2$ , справедливой при  $n \gg 1$ . Таким образом, жесткие флуктуации не дают вклада в плотность состояний в рассматриваемом пределе.

Остаются мягкие и нулевые моды. Отметим, что нулевые моды в переменных  $n$  и  $\zeta\xi$  ведут себя по-разному при отклонении от инстантонного решения. Нулевая мода в переменной  $n$  соответствует повороту на угол  $\chi_B$  и остается строго безмассовой при любых (необязательно седловых) несовпадающих значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . С другой стороны, грассманова нулевая мода  $\zeta\xi$  приобретает массу при отклонении решения от инстантонного. Такое поведение связано с необходимостью удовлетворить условию  $\int \mathcal{D}Q e^{-S[Q]} = 1$ , что было бы невозможно, если

бы грассманова нулевая мода оставалась строго голдстоуновской при отходе от седлового решения.

Итак, в переменных  $\zeta$  и  $\xi$  недостаточно ограничиться квадратичным действием (1.44), а нужно раскладываться до следующего порядка по флуктуациям. В третьем порядке переменные  $\zeta\xi$  запутываются с  $b$  и  $q$ . Мы, однако, не будем учитывать слагаемое  $b\zeta\xi$ , потому что оно приводит к чисто мнимому вкладу в интеграл (1.24) и не влияет на результат для плотности состояний. С другой стороны, отбрасывание этого члена в действии облегчит дальнейшие вычисления. В итоге, по мягким модам  $b$ ,  $p$  и  $\kappa\omega$  действие остается квадратичным, и по ним можно сразу взять гауссов интеграл, воспользовавшись тем, что мы работаем вне флуктуационной области. В возникающем супердетерминанте вклад коммутирующих переменных в точности сокращает вклад грассмановых.

В результате остается интеграл по переменным  $n$ ,  $\zeta\xi$  и  $q$ . Собственная функция соответствующих операторов  $\hat{O}^-$  вблизи порога есть  $f_0(x)$ , так что мы можем выделить координатную зависимость:  $n = \tilde{n}f_0(x)$  и т.д. В действии необходимо удержать член  $\tilde{q}^2(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0$ , происходящий из (1.44), а также член, пропорциональный  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}\tilde{q}$  и снимающий вырождение грассмановой нулевой моды.

Для вычисления минимального собственного значения оператора  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$  в первом неисчезающем порядке по  $\tilde{\varepsilon}$  можно воспользоваться функцией  $f_0$ , поскольку она является собственной функцией операторов  $\hat{O}^-$  при  $E = E_g$ , соответствующей нулевому собственному значению. Подставляя  $\theta_2 = \pi/2 + i\psi_0 + i\sqrt{\tilde{\varepsilon}}f_0$  в (1.45) и раскладывая по  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ , находим

$$(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0 = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} f_0 \left[ -\hbar D\nabla^2 - 2E_g \operatorname{sh}(\psi_0 + \sqrt{\tilde{\varepsilon}}f_0) \right] f_0 = -\frac{\tilde{G}}{2} \sqrt{\tilde{\varepsilon}}. \quad (1.47)$$

Для вычисления члена в действии, пропорционального  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}\tilde{q}$ , достаточно воспользоваться выражением (1.44), дающим  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0$ , при вычислении которого нужно учесть отличие угла  $\alpha$  от инстантонного решения  $\theta_2$ , обусловленное флуктуацией  $q$ . Пользуясь (A4), положим  $\alpha = \theta_2 - i\tilde{q}/\sqrt{2}f_0$ . Разлагая по  $\tilde{q}$  аналогично (1.47), получим

$$(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0 = \frac{\tilde{G}\tilde{q}}{4\sqrt{2}}. \quad (1.48)$$

Теперь посчитаем предэкспоненту в (1.24). Для усредненной по объему плот-

ности состояний нужно вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) &= \frac{\nu}{2} \int d\mathbf{r} \left[ 2 \cos \theta_F + \cos \alpha + \cos \beta \right] = \\ &= -\frac{i\nu}{2} \int d\mathbf{r} \left[ 3 \operatorname{sh} \left( \psi_0 - \sqrt{\tilde{\varepsilon}} f_0 \right) + \operatorname{sh} \left( \psi_0 + (\sqrt{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{q}/\sqrt{2}) f_0 \right) \right] = \operatorname{const} + \frac{ic_1 \tilde{q}}{2\sqrt{2}\delta}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Здесь мы выделили мнимую константу, которая не дает вклада в плотность состояний<sup>2</sup>. При вычислении предэкспоненты (1.49) мы опустили грасмановы переменные  $\zeta$  и  $\xi$ , которые, таким образом, остались лишь в действии. Можно показать, что вклад опущенных членов мал по параметру  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ .

С учетом (1.47–1.49) получим для плотности состояний

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= e^{-S_1} \operatorname{Re} \int \frac{d\tilde{n} d\tilde{q}}{\pi} d\tilde{\zeta} d\tilde{\xi} \frac{ic_1 \tilde{q}}{2^{3/2} \delta} \exp \left[ -\frac{\tilde{G}}{2} \left( -\sqrt{\tilde{\varepsilon}} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{q} \tilde{\zeta} \tilde{\xi}}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= -\frac{c_1 \tilde{G}}{16\pi\delta} e^{-S_1} \operatorname{Im} \int d\tilde{n} d\tilde{q} \tilde{q}^2 \exp \left( \frac{\tilde{G}}{2} \sqrt{\tilde{\varepsilon}} \tilde{q}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Чтобы проинтегрировать по нулевой моде  $\tilde{n}$ , воспользуемся соотношением (A4):

$$n = 2i \sin k_V \chi_V = (\psi_1 - \psi_2) \chi_V = -2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} f_0 \chi_V, \quad \tilde{n} = -2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} \chi_V, \quad \int d\tilde{n} = 4\pi\sqrt{\tilde{\varepsilon}}. \quad (1.51)$$

Для сходимости интеграла по  $\tilde{q}$  нужно выбрать контур интегрирования вдоль мнимой оси, что дает нам необходимую мнимую единицу. Подставляя инстантонное действие (1.40), окончательно получаем для плотности состояний

$$\langle \rho \rangle = \frac{c_1}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{8\tilde{G}\sqrt{\tilde{\varepsilon}}}} \exp \left( -\frac{4}{3} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2} \right), \quad (1.52)$$

где величины  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{G}$  определены в (1.36), (1.39), (1.41). Результат (1.52) описывает поведение средней плотности состояний вне флуктуационной области при  $\tilde{G}^{-2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ .

Найдем также плотность состояний выше порога. В этой области  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}} = i\sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}$ . Инстантонное решение нам не нужно, поскольку плотность состояний определяется окрестностью суперсимметричной седловой точки  $\theta_F = \alpha = \beta = \theta_1 =$

<sup>2</sup> Коэффициент при  $\tilde{q}$  тоже мнимый, однако в дальнейшем (см. (1.50)) интегрирование по  $\tilde{q}$  будет проводиться вдоль мнимой оси, поэтому плотность состояний получится именно из оставленного члена.

$\pi/2 + i\psi_0 - \sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}f_0$ . Интеграл по флуктуациям обращается в единицу, а пред-экспонента имеет вид:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\nu}{4} \operatorname{Re} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) = 2\nu \operatorname{Im} \int d\mathbf{r} \operatorname{sh} \left( \psi_0 + i\sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}f_0 \right) = \frac{2c_1}{\delta} \sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}. \quad (1.53)$$

Два результата для плотности состояний выше и ниже пороговой энергии “сшиваются”: значения слева и справа от флуктуационной области оказываются одного порядка

$$\langle \rho \rangle \Big|_{\tilde{\varepsilon} \sim \pm \tilde{G}^{-2/3}} \sim \frac{1}{\tilde{G}^{1/3} \delta}. \quad (1.54)$$

Еще одно характерное свойство подщелевой плотности состояний (1.52) состоит в том, что полное число уровней под щелью не зависит от  $\tilde{G}$  и оказывается порядка единицы:

$$\mathcal{N} \sim \int_0^{E_g} \langle \rho(E) \rangle dE \sim \frac{E_g}{\tilde{G} \delta} \sim 1. \quad (1.55)$$

В главе 2 мы увидим, что для контакта с туннельными границами или близкой к  $\pi$  разностью фаз это свойство может нарушаться в пределе так называемого “сильного хвоста”.

## 1.7 Точное решение вблизи порога

Теперь мы переходим к вычислению плотности состояний с учетом второго инстантона. Ответ, который мы получим, будет *точным* во всей флуктуационной области около критической энергии.

Выше было показано, что жесткие моды не дают вклада в плотность состояний. Поэтому в общем случае остается 8 квазиуловых мод, отвечающих минимальным собственным значениям операторов  $\hat{O}^- : b, n, p, q, \xi, \omega$  (так как мы ищем точное решение, то разделение на нулевые и мягкие моды, имевшее место на седловых решениях, теряет смысл). Учтем координатную зависимость с помощью  $n = \tilde{n}f_0(x)$  и т.д., а вместо переменных  $\tilde{b}, \tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  введем симметричные переменные, интерполирующие между обоими решениями Узаделя:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + iuf_0, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + ivf_0, \quad \theta_F = \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + iwf_0. \quad (1.56)$$

Теперь необходимо разложить действие до кубических членов по квазиуловым переменным. Вычисления, аналогичные (1.38), (1.47) и (1.48), приводят к

следующему выражению для действия:

$$\mathcal{S} = \tilde{G} \left[ \tilde{\varepsilon}(u + v - 2w) - \frac{u^3 + v^3 - 2w^3}{3} - \tilde{\zeta}\tilde{\xi} \frac{u + w}{4} - \tilde{\varkappa}\tilde{\omega} \frac{v + w}{4} \right]. \quad (1.57)$$

Восемь экстремумов этого действия (два по каждой из переменных  $u, v, w$ ) соответствуют суперсимметричному седлу и различным инстантонам. Аналогично (1.49) получим для предэкспоненты

$$\frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) = -\frac{ic_1}{2\delta}(u + v + 2w). \quad (1.58)$$

Теперь нужно установить правильную меру интегрирования. Связь между переменными  $u, v, w$  и  $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{b}$  следует из соотношений (A4). Поскольку мера интегрирования по  $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{b}$  тривиальна (см. A9), заключаем

$$\mathcal{D}Q = \frac{1}{\pi^2} d\tilde{b} d\tilde{p} d\tilde{q} d\tilde{n} d\tilde{c} d\tilde{\xi} d\tilde{\varkappa} d\tilde{\omega} = \frac{4i}{\pi^2} du dv dw d\tilde{n} d\tilde{c} d\tilde{\xi} d\tilde{\varkappa} d\tilde{\omega}. \quad (1.59)$$

Интеграл по нулевой моде  $\tilde{n}$  берется аналогично (1.51):  $\int d\tilde{n} = 2\pi|u - v|$ . После интегрирования по  $\tilde{n}$  и грассмановым переменным получаем для плотности состояний

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = \frac{c_1 \tilde{G}^2}{4\pi\delta} \operatorname{Re} \int du dv dw |u - v|(u + w)(v + w)(u + v + 2w) \times \\ \times \exp \left[ -\tilde{G} \left( \tilde{\varepsilon}(u + v - 2w) - \frac{u^3 + v^3 - 2w^3}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

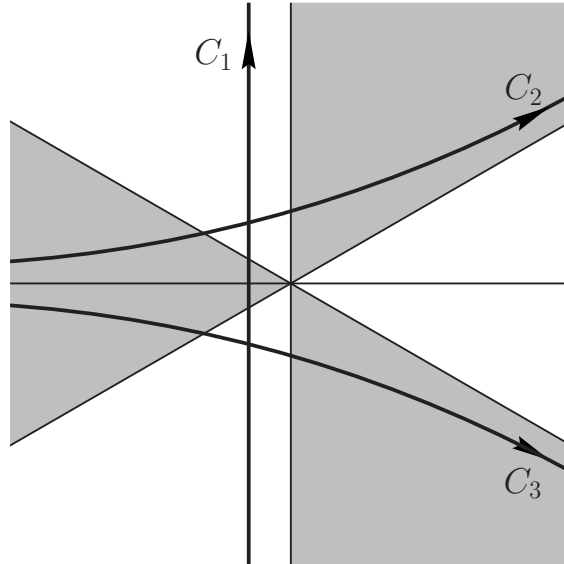
Сделаем масштабное преобразование переменных интегрирования, чтобы исключить  $\tilde{G}$ :  $(u, v, w) \rightarrow (2\tilde{G})^{-1/3}(u, v, w)$  и перейдем к новым переменным  $l = (u + v)/2$ ,  $m = (u - v)^2/2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = \frac{1}{8\pi^2 \Delta_g} \operatorname{Re} \int_0^\infty dm \int dl dw (w + l)(w^2 + 2lw + l^2 - m) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{w^3}{3} + \epsilon w + \frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l \right], \end{aligned} \quad (1.61)$$

где мы определили

$$\epsilon = (2\tilde{G})^{2/3} \tilde{\varepsilon} = \frac{E_g - E}{\Delta_g}, \quad \Delta_g = \frac{c_2^{1/3} (\delta^2 E_g)^{1/3}}{2\pi^{2/3} c_1}. \quad (1.62)$$

На этом этапе нам нужно выбрать контуры интегрирования по  $w$  и  $l$ . Интеграл (1.61) сходится, если контур интегрирования по  $l$  уходит на бесконечность



**Рис. 1.4.** Возможные контуры интегрирования по  $w$  и  $l$ . Правильный выбор:  $C_1$  для  $w$  и  $C_3$  — для  $l$ .

в темных областях на Рис. 1.4, а по  $w$  — в светлых. Это, однако, справедливо, только когда в действии можно ограничиться разложением до третьего порядка по  $w$  и  $l$ . Когда же мы отходим достаточно далеко от нуля, сходимость определяется свойствами выражения (1.30): контур  $w$  должен уходить на бесконечность вдоль мнимой оси (компактность FF-сектора), а  $l$  — по действительной (некомпактность ВВ-сектора). Основной вклад в интеграл, тем не менее, дает окрестность нуля, поэтому мы будем брать его с кубическим действием в бесконечных пределах, сместив контур по  $w$  влево ( $C_1$  на Рис. 1.4). Для  $l$  возникает две возможности:  $C_2$  и  $C_3$ . Правильный выбор определяется условием положительности плотности состояний, что соответствует контуру  $C_3$  для  $l$ .

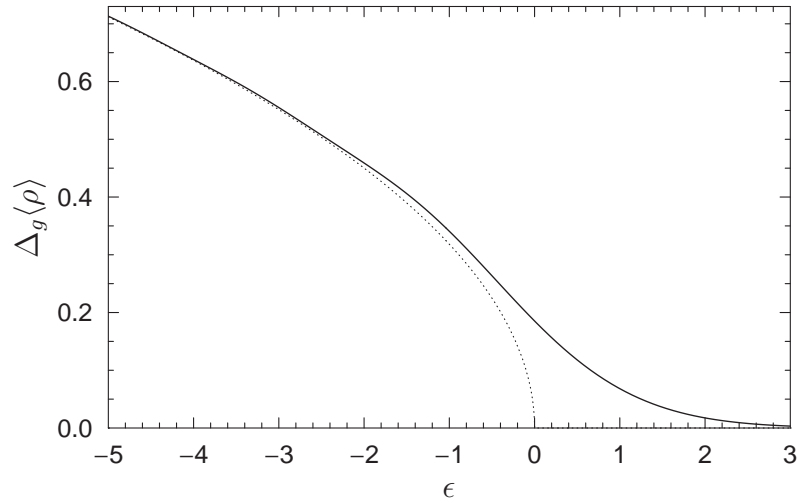
Вычисление интеграла (1.61) приведено в приложении Б. Результатом этого вычисления является следующее выражение для плотности состояний:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\Delta_g} \left[ -\epsilon \text{Ai}^2(\epsilon) + [\text{Ai}'(\epsilon)]^2 + \frac{\text{Ai}(\epsilon)}{2} \int_{-\infty}^{\epsilon} dy \text{Ai}(y) \right], \quad (1.63)$$

где  $\epsilon$  определена в (1.62). Эта зависимость изображена на Рис. 1.5 вместе с асимптотикой (1.53).

Одноинстантонное приближение справедливо в пределе  $\epsilon \gg 1$ . Если подставить в (1.63) асимптотическое выражение для функции Эйри<sup>3</sup>, то первые два

<sup>3</sup> Асимптотика функции Эйри при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид  $\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$ .



**Рис. 1.5.** Точная зависимость (1.63) плотности состояний  $\langle \rho \rangle$  (в единицах  $1/\Delta_g$ ) от приведённой энергии  $\epsilon$  (1.62) (сплошная линия). Размер флуктуационной области в этих переменных порядка единицы. Квазиклассический результат для плотности состояний (1.53) изображен точечной линией.

члена в скобках сократятся, а интеграл можно заменить на единицу. В итоге (1.63) в точности совпадет с (1.52).

Функциональная зависимость (1.63) совпадает с предсказаниями (формула (2.90) ниже) теории случайных матриц для края спектра в случае ортогонального ансамбля [32]. Такое совпадение не удивительно ввиду эквивалентности теории случайных матриц и нульмерной  $\sigma$ -модели [36]. В рассматриваемом нами случае “нульмеризация”  $\sigma$ -модели вблизи порога происходит на стадии перехода к квазиулевым переменным (1.56) с фиксированной координатной зависимостью, задаваемой функцией  $f_0$ . Подробнее применение теории случайных матриц для сверхпроводящих гибридных структур обсуждается в разделе 2.3.

Результаты этого и предыдущего разделов применимы в случае, когда нормальная область имеет произвольную форму и присоединена идеальными контактами к произвольному числу сверхпроводников (Рис. 1.3). Необходимо только, чтобы было справедливым приближение нульмерной  $\sigma$ -модели. Критерий, определяющий эффективную размерность задачи в важном частном случае плоского SNS контакта, будет дан в разделе 3.1.

## 2 Квазилокализованные состояния в гибридной структуре с подавленной щелью

В этой главе мы рассматриваем гибридную структуру (Рис. 1.3) с неидеальными границами. С уменьшением прозрачности границы квазичастицы больше времени проводят в нормальной области между двумя андреевскими отражениями, и щель в плотности состояний, соответственно, становится меньше. В туннельном пределе, когда прозрачность каждого канала между сверхпроводниками и нормальной частью контакта мала, щель открывается на энергии  $E_g = G_T \delta / 4$ , где  $G_T$  — суммарный безразмерный (в единицах  $e^2 / \hbar$ ) туннельный кондактанс границ контактов. Вблизи  $E_g$  квазиклассическая плотность состояний обращается в ноль корневым образом  $\propto \sqrt{|\varepsilon|}$ , при удалении от порога достигает максимума, а затем начинает убывать по закону обратного корня  $\propto 1 / \sqrt{|\varepsilon|}$  (см. далее Рис. 2.2), все более напоминая сингулярность типа БКШ.

Форма “хвоста” при этом тоже меняется, но полное количество квазилокализованных состояний, по-прежнему, остается порядка единицы. Качественная картина меняется при  $G_T \ll G^{1/4}$  (здесь  $G$  — характерный кондактанс нормальной части контакта, его строгое определение будет дано ниже). В этом пределе среднее число уровней на участке корневого роста плотности состояний над  $E_g$  оказывается порядка единицы, так что весь этот участок попадает в область сильных флуктуаций. Одновременно количество подщелевых состояний начинает расти. Этот режим, который мы называем “сильным хвостом”, будет рассмотрен в разделе 2.1.4.

Также будет рассмотрен SNS контакт с ненулевой разностью фаз. По мере приближения разности фаз к  $\pi$  щель в плотности состояний закрывается [14] во многом аналогично ситуации с туннельными границами: куперовская пара, проникая из сверхпроводника в нормальную часть контакта, несет фазу, соответствующую параметру порядка в сверхпроводнике. Чем сильнее эта

фаза отличается от фазы второго сверхпроводника, тем труднее куперовской паре уйти в него. Иными словами, аномальная функция Грина, которая наводится благодаря эффекту близости, несет ту же фазу, что и параметр порядка сверхпроводника; если фазы двух сверхпроводников различны, то наводимые ими корреляции частично компенсируются. Оказывается, что подщелевая плотность состояний в нормальной области SNS контакта с некоторой разностью фаз также ведет себя во многом аналогично случаю контакта с туннельными границами, включая и случай “сильного хвоста”, рассмотренный в разделе 2.2.4.

В конце главы кратко изложен феноменологический подход теории случайных матриц [33]. Микроскопическое вычисление в рамках нелинейной суперматричной  $\sigma$ -модели позволяет определить пределы справедливости гипотезы универсальности, лежащей в основе этой теории.

## 2.1 SIN структура

### 2.1.1 Действие для границы

Если граница между сверхпроводником и нормальным металлом идеальна, то матрица  $Q$  непрерывна при переходе из одной области в другую. Если же граница неидеальна, то граничные условия становятся сложнее [64, 65]. Их, однако, можно учесть автоматически, если добавить к действию  $\sigma$ -модели дополнительный граничный член. Он имеет следующий вид [36, 66]:

$$\mathcal{S}_b = -\frac{1}{4} \sum_i N_i \operatorname{str} \ln \left[ 1 - \frac{\Gamma_i}{2} + \frac{\Gamma_i}{4} \{Q_S, Q^{(i)}\} \right]. \quad (2.1)$$

Индекс  $i$  нумерует присоединенные к нормальной области сверхпроводники,  $N_i$  — полное число проводящих каналов в  $i$ -том контакте для одной проекции спина. Для границы с площадью  $A$  число каналов  $N = \pi \hbar \nu v_0 A / 2$ , где  $v_0$  — фермиевская скорость.  $\Gamma_i$  — прозрачность одного канала, которую мы для простоты считаем одинаковой для всех каналов данного контакта,  $Q^{(i)}$  — значение матрицы  $Q$  в нормальной области вблизи  $i$ -ой границы,  $Q_S$  — значение матрицы  $Q$  в сверхпроводнике. Пользоваться выражением (2.1) можно только при условии, что матрица  $Q^{(i)}$  постоянна вдоль границы каждого контакта. Такое условие будет удовлетворяться автоматически для плоского SNS контакта (Рис. 1.1), в общем случае (Рис. 1.3) нужно требовать малости размеров контактов по

сравнению с характерными размерами нормальной части.

В нашей параметризации, по-прежнему, сохраняется разделение переменных (1.29), а в выражении для  $S_0$  появляется дополнительное слагаемое:

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left[ \hbar D(\nabla\theta)^2 + 4iE \cos\theta \right] - \frac{1}{2} \sum_i N_i \ln(1 + \gamma_i \sin\theta^{(i)}), \quad (2.2)$$

где  $\gamma_i = \Gamma_i/(2 - \Gamma_i)$ . Под  $\theta^{(i)}$  мы понимаем значение угла  $\theta$  внутри нормальной области вблизи  $i$ -го контакта. Это значение не должно зависеть от координат вдоль границы, как уже было указано. Именно это обстоятельство позволяет нам использовать для первого слагаемого в действии координатное представление, а для второго — представление каналов. В дальнейшем мы будем использовать верхний индекс  $(i)$  для значений различных полей вблизи  $i$ -ой границы.

Вся классификация инстантонов, которая была сделана ранее в разделе 1.4, не изменяется. В разложении по флуктуациям необходимо дополнить действие (1.43) граничным членом:

$$\mathcal{S}^{(2)}[W] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \operatorname{str} \left[ \hbar D(\nabla W)^2 + \frac{\hbar D}{4} [\nabla U_0, W]^2 - 2iE\Lambda Q_0 W^2 \right] + \frac{1}{4} \sum_i N_i T_i \operatorname{str} \left( \frac{Q_S Q_0}{1 + T_i Q_S Q_0} \widetilde{W}^{(i)} \frac{1}{1 + T_i Q_S Q_0} \widetilde{W}^{(i)} \right). \quad (2.3)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\widetilde{W} = e^{-iU_0/2} W e^{iU_0/2}$  и  $T_i = (2 - \Gamma_i - 2\sqrt{1 - \Gamma_i})/\Gamma_i = \gamma_i - 2\sqrt{1 - \gamma_i^2}/\gamma_i$ . Параметризация  $W$ , которая диагонализует это действие, остается такой же, как раньше (приложение A), но в операторе  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$  тоже появится граничный член:

$$\begin{aligned} (a \hat{O}_{\alpha\beta}^\pm b) &= \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \left[ \hbar D(\nabla a(\mathbf{r}))(\nabla b(\mathbf{r})) - \right. \\ &\quad \left. - a(\mathbf{r}) \left( \frac{\hbar D}{4} (\nabla\alpha \pm \nabla\beta)^2 + iE(\cos\alpha + \cos\beta) \right) b(\mathbf{r}) \right] + \\ &\quad + \sum_i \frac{N_i \gamma_i}{16} \left( a^{(i)} \frac{(\sin\alpha^{(i)} + \sin\beta^{(i)}) + \gamma_i(1 \mp \cos(\alpha^{(i)} \pm \beta^{(i)}))}{(1 + \gamma_i \sin\alpha^{(i)})(1 + \gamma_i \sin\beta^{(i)})} b^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, учет неидеальности границы не приводит к принципиальному изменению стратегии вычислений плотности состояний вблизи порога. Можно повторить все вычисления, проделанные для случая идеальной границы в главе 1, учитывая граничный член в действии. Все отличие будет заключаться в переопределении функций  $\psi_{1,2}$ ,  $f_0$ , и констант  $c_{1,2}$ . Новые определения

выглядят так:

$$\hbar D \nabla^2 \psi + 2E \operatorname{ch} \psi = 0, \quad D \nabla_{\mathbf{n}} \psi^{(i)} + \frac{v_0}{2} \frac{\gamma_i \operatorname{sh} \psi^{(i)}}{1 + \gamma_i \operatorname{ch} \psi^{(i)}} = 0; \quad (2.5)$$

$$\hbar D \nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \operatorname{sh} \psi_0 = 0, \quad D \nabla_{\mathbf{n}} f_0^{(i)} + f_0^{(i)} \frac{v_0}{2} \frac{(\gamma_i + \operatorname{ch} \psi_0^{(i)})}{(1 + \gamma_i \operatorname{ch} \psi_0^{(i)})^2} = 0; \quad (2.6)$$

$$c_1 = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} f_0 \operatorname{ch} \psi_0; \quad (2.7)$$

$$c_2 = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} f_0^3 \operatorname{ch} \psi_0 - \frac{\delta}{2\pi E_g} \sum_i N_i \gamma_i \operatorname{sh} \psi_0^{(i)} \frac{1 - \gamma_i^2 - \gamma_i \operatorname{ch} \psi_0^{(i)}}{(1 + \gamma_i \operatorname{ch} \psi_0^{(i)})^3} \left[ f_0^{(i)} \right]^3. \quad (2.8)$$

С такими определениями сохраняются все результаты разделов 1.6 и 1.7.

Еще раз напомним, что все формулы этого раздела имеют смысл только при условии постоянства функций  $\psi_{1,2}$  и  $f_0$  на границах со сверхпроводником.

### 2.1.2 Нульмерное действие

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда градиентные члены в действии (2.2) имеют смысл малой поправки. Такая ситуация возникает либо в пределе туннельных контактов  $\Gamma \approx 2\gamma \ll 1$ , либо если размеры контактов малы (Рис. 1.3) по сравнению с длиной свободного пробега. В последнем случае даже не обязательно требовать диффузной проводимости в нормальной части контакта, длина свободного пробега может быть порядка размеров системы. Учитывая градиентные члены как малую поправку, мы найдем оптимальную зависимость от координат  $\psi(\mathbf{r})$  и получим нульмерное действие.

Итак, если  $\psi(\mathbf{r})$  слабо меняется в пространстве, мы выделяем большую константу

$$\psi = K + k(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

и разлагаем действие (2.2) до первого порядка по  $k$  и до второго — по  $\nabla k$ ; кроме того, разложим логарифм в действии до второго порядка по  $\gamma \operatorname{ch} K$  (опуская несущественную константу). Справедливость неравенства  $\gamma \operatorname{ch} K \ll 1$  будет показана в дальнейшем.

$$\begin{aligned} S_0[\psi] = & \frac{\pi E}{\delta} \operatorname{sh} K - \frac{\pi G_T}{4} \operatorname{ch} K + \\ & + \frac{1}{4} \left( \sum_i N_i \gamma_i^2 \right) \operatorname{ch}^2 K + \\ & + \frac{\pi \nu}{4} \int d\mathbf{r} \left( -\hbar D (\nabla k)^2 + 4E k \operatorname{ch} K \right) - \frac{1}{2} \sum_i N_i \gamma_i k^{(i)} \operatorname{sh} K, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где мы ввели полный безразмерный (в единицах  $e^2/\hbar$ ) туннельный кондактанс контактов

$$G_T = \frac{1}{\pi} \sum_i N_i \Gamma_i \approx \frac{2}{\pi} \sum_i N_i \gamma_i. \quad (2.11)$$

Пренебрегая в (2.10) слагаемыми из второй и третьей строки и варьируя действие по  $K$ , получаем  $4E/(G_T \delta) = \text{th } K$ . Влияние опущенных членов становится существенным при больших значениях  $K$ , при этом поправки к  $\text{th } K$  будут отрицательными. Это обеспечивает появление максимума в зависимости энергии от  $K$ , который определяет величину щели. В первом приближении можно считать

$$E_g = \frac{G_T \delta}{4}. \quad (2.12)$$

Также можно заменить энергию  $E$  в четвертом слагаемом (2.10) на  $E_g$  и, пользуясь большой величиной  $K$ , во второй и третьей строках (2.10) вместо гиперболических функций от  $K$  подставить  $P/2$ , где  $P = e^K$ . В результате получим действие в виде:

$$S_0[P, k] = -\frac{\pi G_T}{8} \left[ \varepsilon P + \frac{2}{P} \right] + \frac{P^2}{16} \sum_i N_i \gamma_i^2 + \frac{\pi \nu}{4} \int d\mathbf{r} \left( -\hbar D (\nabla k)^2 + 2E_g P k \right) - \frac{P}{4} \sum_i N_i \gamma_i k^{(i)}. \quad (2.13)$$

Здесь мы также ввели безразмерную энергию, отсчитанную от края щели:

$$\varepsilon = \frac{E_g - E}{E_g} = 1 - \frac{4E}{G_T \delta}. \quad (2.14)$$

Варьируя полученное действие по  $k$ , получим уравнения

$$\hbar D \nabla^2 k + E_g P = 0, \quad D \nabla_{\mathbf{n}} k^{(i)} + \frac{v_0}{4} P \gamma_i = 0. \quad (2.15)$$

Эти уравнения определяют функцию  $k$  с точностью до постоянного слагаемого, поскольку мы не зафиксировали константу в (2.9). Для удобства введем функцию  $\Xi(\mathbf{r}) = 4Dk(\mathbf{r})/(Pv_0)$ , которая имеет размерность длины и подчиняется уравнениям

$$V \nabla^2 \Xi + \sum_i A_i \gamma_i = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \Xi^{(i)} + \gamma_i = 0. \quad (2.16)$$

Здесь  $A_i$  — площадь  $i$ -го контакта. В таком виде становится очевидной совместность уравнения и граничных условий. Действительно, проинтегрировав по объему первое уравнение и применив теорему Гаусса, получим  $\sum_i A_i (\nabla_{\mathbf{n}} \Xi^{(i)} + \gamma_i) = 0$ , что согласуется с граничными условиями в (2.16).

Воспользовавшись уравнениями (2.16), можно упростить действие (2.13), которое теперь становится функцией только от  $P$ :

$$S_0(P) = -\frac{\pi G_T}{8} \left[ \varepsilon P + \frac{2}{P} \right] + \frac{P^2}{16} \sum_i N_i \gamma_i^2 + \frac{3\pi \hbar \nu v_0}{64l} P^2 \int d\mathbf{r} (\nabla \Xi)^2. \quad (2.17)$$

В этом выражении еще раз проявляется тот факт, что произвольная константа в  $\Xi$  не имеет физического смысла. Для дальнейших вычислений нам понадобится только одна величина, характеризующая геометрию системы и свойства контактов:

$$\gamma = \left( \sum_i A_i \gamma_i \right)^{-1} \left[ \sum_i A_i \gamma_i^2 + \frac{3}{2l} \int d\mathbf{r} (\nabla \Xi)^2 \right]. \quad (2.18)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

**Одномерный контакт.** Рассмотрим плоский SNS контакт (Рис. 1.1) с длиной нормальной области  $2L_z$ . Будем считать, что сверхпроводники присоединяются одинаковыми туннельными контактами с прозрачностью одного канала  $\Gamma \ll 1$ . Тогда решение уравнения (2.16) имеет вид  $\Xi(x) = -\Gamma x^2/(4L)$ , а параметр (2.18):

$$\gamma_{1D} = \frac{\Gamma}{2} + \frac{L_z \Gamma}{4l} \approx \frac{L_z \Gamma}{4l}. \quad (2.19)$$

Такое же значение  $\gamma$  получается и для плоского NS контакта с длиной нормальной области  $L_z$ . В дальнейшем будет полезно следующее тождество, связывающее величину щели с энергией Таулесса для плоского контакта

$$E_g = 6\gamma_{1D} E_{Th}. \quad (2.20)$$

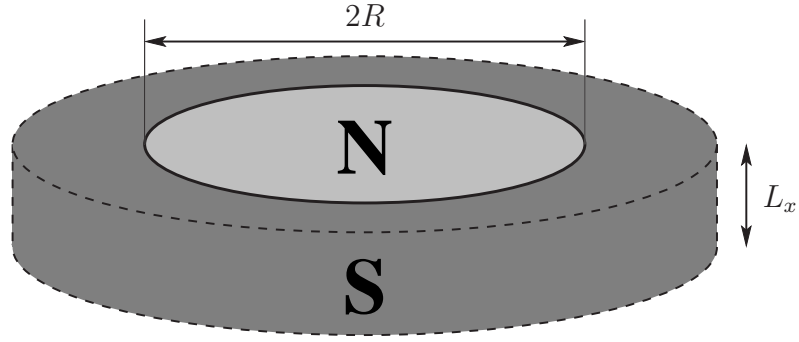
Его легко получить, воспользовавшись тем, что число каналов, входящее в (2.11), пропорционально площади сечения контакта.

**Двумерный контакт.** Если нормальная область имеет форму диска радиуса  $R$  (см. Рис. 2.1), по краю присоединенного к сверхпроводнику, то  $\Xi(r) = -\Gamma r^2/(4R)$ , и в итоге получаем

$$\gamma_{2D} = \frac{3R\Gamma}{16l}. \quad (2.21)$$

В этом случае связь между величиной щели и энергией Таулесса определяется формулой

$$E_g = 4\gamma_{2D} E_{Th}, \quad E_{Th} = \frac{\hbar D}{R^2}. \quad (2.22)$$



**Рис. 2.1.** Двумерный NS контакт в форме диска. Толщина нормального слоя  $L_x$ , радиус —  $R$ .

**Трехмерный контакт.** Аналогично, если нормальная область имеет форму шара радиуса  $R$ , то функция  $\Xi(r)$  получается такой же, как в предыдущем случае, а результат для параметра  $\gamma$  имеет вид

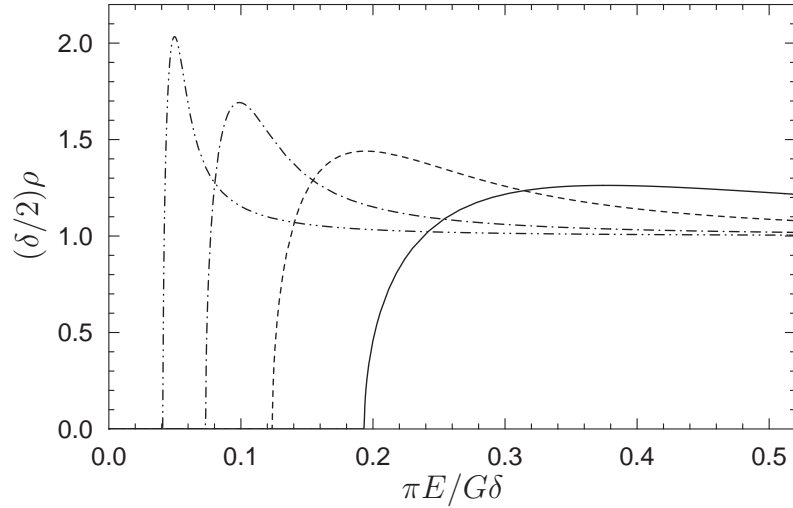
$$\gamma_{3D} = \frac{3R\Gamma}{20l}. \quad (2.23)$$

**Нульмерный контакт.** Под нульмерным контактом мы подразумеваем нормальный металл произвольной формы, соединенный со сверхпроводниками узкими контактами (Рис. 1.3). В этом случае можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в (2.18) по сравнению с первым; если при этом все каналы имеют одинаковую прозрачность  $\Gamma$ , то  $\gamma = \Gamma/2$ . Действительно, если контакт имеет форму типа Рис. 1.3, то основной вклад в интеграл  $\int d\mathbf{r} (\nabla\Xi)^2$  набирается вблизи сверхпроводников. Если расстояние  $r$  до  $i$ -го контакта со сверхпроводником много больше размера контакта ( $r \gg \sqrt{A_i}$ ), но много меньше размера всего нормального металла, то можно приближенно считать  $|\nabla\Xi| \sim A_i\gamma_i/r^2$ . Интеграл от квадрата этой величины пропорционален  $A_i^{3/2}\gamma_i^2$ , им можно пренебречь в выражении (2.18) при условии  $A_i \ll l^2$ .

Величина  $\gamma$  зависит от геометрии системы и, кроме того, пропорциональна “средней” прозрачности одного канала в контакте. Туннельный кондактанс  $G_T$  также пропорционален прозрачности одного канала. Чтобы рассматривать поведение различных характеристик системы при изменении сопротивления контактов, введем величину, которая описывает только форму системы:

$$G = \frac{\pi G_T}{2\gamma}. \quad (2.24)$$

В нульмерной системе, когда прозрачности всех каналов одинаковы, этот параметр совпадает с полным числом каналов. В одномерном случае плоского



**Рис. 2.2.** Квазиклассическая зависимость плотности состояний в нормальной части нульмерной гибридной структуры (Рис. 1.3) от энергии. Сплошная линия соответствует случаю  $\gamma = 0.4$ , пунктирная линия —  $\gamma = 0.2$ , штрихпунктирная —  $\gamma = 0.1$ , штрихштрихпунктирная —  $\gamma = 0.01$ . По мере уменьшения прозрачности границ щель закрывается, а выше порога в плотности состояний появляется острый максимум. Такая же зависимость наблюдается и для SNS контакта по мере приближения разности фаз к  $\pi$  (см. раздел 2.2.1).

контакта (Рис. 1.1) величина  $G$  пропорциональна кондактансу нормальной области:  $G = 6\pi G_N$  для SNS контакта и  $G = (3\pi/2)G_N$  для NS контакта.

Используя обозначения (2.18) и (2.24), получаем нульмерное действие в виде

$$S_0(P) = \frac{G\gamma}{4} \left[ -\varepsilon P - \frac{2}{P} + \frac{\gamma P^2}{4} \right]. \quad (2.25)$$

В случае нульмерного контакта, когда можно пренебречь градиентным членом в (2.5), уравнение Узаделя становится алгебраическим и сравнительно просто решается. Полученная в результате такого решения плотность состояний изображена на Рис. 2.2. По мере уменьшения прозрачности границ щель становится меньше, и, кроме того, появляется острый максимум при энергиях выше пороговой.

### 2.1.3 Классификация “хвостов”

В этом разделе мы рассмотрим различные предельные случаи изменения параметров  $\gamma$  и  $\varepsilon$ , вычислим действия инстантонов и построим грубую картину возможного поведения подщелевой плотности состояний для различных пре-

дельных случаев.

Варьируя  $S_0(P)$ , получим уравнение<sup>1</sup>, связывающее  $P$  и  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{2}{P^2} + \frac{\gamma P}{2}. \quad (2.26)$$

Минимальное значение  $\varepsilon$  достигается при  $P = P_0 = 2\gamma^{-1/3}$  и равно  $3\gamma^{2/3}/2 \ll 1$ . Отличие этой величины от нуля связано с тем, что пороговая энергия  $E_g$  в действительности меньше, чем  $G\gamma\delta/(2\pi)$ , однако эта поправка маленькая, и ее нужно будет учесть только при выводе следующей формулы.

При  $E < E_g$  уравнение (2.26) имеет два действительных положительных корня  $P_{1,2}$ , которые соответствуют двум решениям уравнения Узаделя  $\theta_{1,2}$ . Их можно найти, если разложить (2.25) по малым параметрам  $\varepsilon$  и  $\delta P = P - P_0$ :

$$S_0(P) = S_0(P_0) + \frac{G\gamma}{4} \left[ -\varepsilon\delta P + \frac{2(\delta P)^3}{P_0^4} \right]. \quad (2.27)$$

Здесь в  $\varepsilon$  учтена поправка, которая была опущена в (2.14):  $\varepsilon = 1 - 3\gamma^{2/3}/2 - 2\pi E/(G\gamma\delta)$ . В дальнейшем нам будет достаточно точности выражения (2.14).

Из разложения (2.27) заключаем, что два решения уравнения Узаделя соответствуют  $P_{1,2} = P_0(1 \mp P_0\sqrt{\varepsilon/6})$ , а показатель экспоненты для плотности состояний имеет вид:

$$S_1 = S_0(P_1) - S_0(P_2) = G\gamma^{1/3} \left( \frac{2\varepsilon}{3} \right)^{3/2}. \quad (2.28)$$

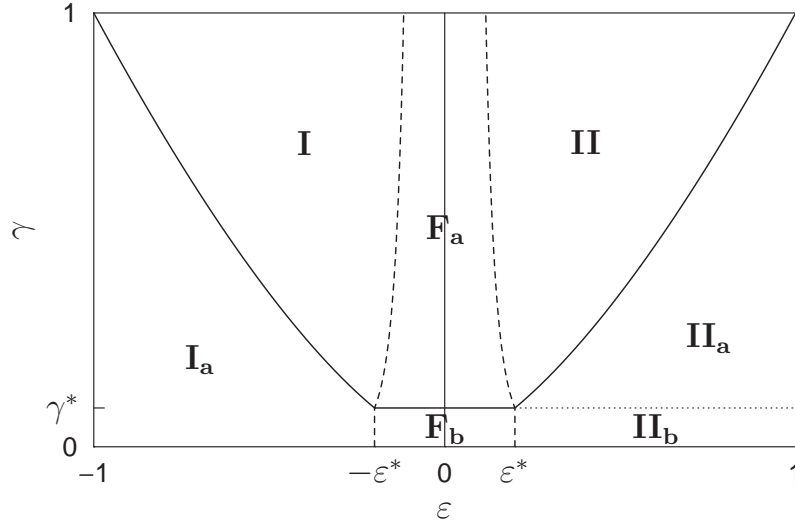
Тот же результат можно получить, сравнив разложения (2.27) и (1.38). Для этого нужно сначала установить связь между  $g$  и  $\delta P$ . В режиме  $\gamma \ll 1$  функция  $\psi_0(\mathbf{r})$  мало отличается от константы, поэтому в главном порядке можно считать  $f_0(\mathbf{r}) \approx 1$ . Таким образом,  $\delta\psi = g$ , с другой стороны  $\delta\psi = \delta \ln P = \delta P/P_0$ . В результате, приравнявая почленно правые части (2.27) и (1.38), получим

$$c_1 = \frac{P_0}{2} = \gamma^{-1/3}, \quad c_2 = \frac{6}{P_0} = 3\gamma^{1/3}, \quad \tilde{G} = \frac{3}{4}G\gamma^{4/3}, \quad \Delta_g = \frac{(3G)^{1/3}\gamma^{7/9}\delta}{2^{4/3}\pi}. \quad (2.29)$$

Если подставить эти константы в (1.40), то вновь получится результат (2.28). Используя выражения (2.29), можно обобщить все результаты разделов 1.6 и 1.7. В частности, для плотности состояний над щелью из (1.53) получаем

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\gamma^{2/3}\delta} \sqrt{\frac{8|\varepsilon|}{3}}. \quad (2.30)$$

<sup>1</sup> Для случая идеальной границы его аналогом было уравнение (1.7).



**Рис. 2.3.** Фазовая диаграмма для различных асимптотических зависимостей плотности состояний от энергии ( $\gamma^* = G^{-3/4}$ ,  $\varepsilon^* = G^{-1/2}$ ). Области **I** соответствует выражение (2.30), области **I<sub>a</sub>** — (2.35), области **II** — (2.31), областям **II<sub>a</sub>** и **II<sub>b</sub>** — (2.49). Плотность состояний в областях **I**, **F<sub>a</sub>** и **II** описывается единой формулой (1.63) с учетом (2.29). В режиме **II<sub>b</sub>** полное количество квазилокализованных состояний велико (см. (2.51)).

Аналогично можно определить предэкспоненту для плотности состояний под щелью из (1.52):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{2G\gamma^{5/3}\sqrt{6\varepsilon}}} \exp \left[ -G\gamma^{1/3} \left( \frac{2\varepsilon}{3} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.31)$$

Две последние формулы справедливы вне флуктуационной области при условии  $|\varepsilon| \gg G^{-2/3}\gamma^{-2/9}$ , когда можно пренебречь вкладом второго инстантона по сравнению с первым. На Рис. 2.3 приведена грубая “фазовая диаграмма” возможных поведений плотности состояний при различных значениях  $\gamma$  и  $\varepsilon$ . Формула (2.30) соответствует области **I**, а выражение (2.31) — области **II**. Между ними находится флуктуационная область **F<sub>a</sub>**. Единое выражение для плотности состояний во всех трех областях (**I**, **F<sub>a</sub>** и **II**) получается из (1.63) также с помощью (2.29).

Разложение (2.27) справедливо, если энергия не сильно отличается от пороговой. Для его применимости необходимо потребовать выполнение неравенства  $|\delta P| \ll P_0$  или, иначе,  $|\varepsilon| \ll \gamma^{2/3}$ . В противоположном пределе  $\gamma^{2/3} \ll \varepsilon \ll 1$  приближение кубической параболы (2.27) не работает, и, чтобы найти  $P_{1,2}$ , нужно решать уравнение (2.26). Для отыскания меньшего корня ( $P_1$ ) можно прене-

бречь последнем слагаемым, а для  $P_2$  — вторым:

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}, \quad P_2 = \frac{2\varepsilon}{\gamma}. \quad (2.32)$$

Подставляя эти значения в выражение для действия (2.27), получим

$$S_0(P_1) = -G\gamma\sqrt{\varepsilon/2}, \quad S_0(P_2) = -\frac{G\varepsilon^2}{4}. \quad (2.33)$$

Поскольку  $S_0(P_1) \ll S_0(P_2)$ , экспонента для плотности состояний определяется только  $S_0(P_2)$ :

$$\mathcal{S}_1 = -S_0(P_2) = \frac{G\varepsilon^2}{4}. \quad (2.34)$$

Плотность состояний с таким показателем экспоненты соответствует областям  $\mathbf{II}_a$  и  $\mathbf{II}_b$ . Предэкспоненциальный множитель для этого режима будет получен в следующем разделе.

Над щелью в области  $\mathbf{I}_a$  формула (2.30) также не применима. Чтобы определить плотность состояний в этом режиме, нужно решить уравнение (2.26) при большом отрицательном  $\varepsilon$ . Для нахождения пары комплексно сопряженных корней можно пренебречь последним членом в (2.26):  $P_{1,2} = \pm i\sqrt{2/|\varepsilon|}$ . Плотность состояний при этом имеет вид

$$\langle \rho \rangle = \frac{2}{\delta} \operatorname{Re} \cos \theta = \frac{1}{\delta} \operatorname{Im}(P - P^{-1}) \approx \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}}. \quad (2.35)$$

Здесь мы использовали значение  $P_1$ , поскольку плотность состояний должна быть положительна. Таким образом, непосредственно выше щели плотность состояний растет (Рис. 2.2) по закону (2.30), а затем убывает как (2.35). Когда энергия становится настолько большой, что  $|\varepsilon| \gtrsim 1$ , плотность состояний стремится к своему нормальному металлическому значению  $2/\delta$ .

По мере уменьшения прозрачности  $\gamma$  области  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{II}$  становятся уже и исчезают, когда  $\gamma \sim \gamma^* = G^{-3/4}$ . Одноинстантонный вклад в плотность состояний при этом описывается только экспонентой с показателем (2.34). Как будет показано в разделе 2.1.4, при уменьшении  $\gamma$  ниже  $\gamma^*$  (область  $\mathbf{II}_b$ ) полное число подщелевых состояний начинает расти. Такое поведение мы назовем “сильным хвостом”.

Вблизи энергии Ферми ( $\varepsilon = 1$ ) происходит кроссовер к ненулевой  $\sigma$ -модели. Соответствующая плотность состояний будет рассматриваться в разделе 3.3.

Еще раз подчеркнем, что вблизи границ областей происходит кроссовер от одной зависимости к другой, а все приведенные нами формулы справедливы только при достаточном удалении вглубь соответствующей области.

#### 2.1.4 “Сильный хвост”

Теперь мы переходим к случаю  $\gamma \ll G^{-3/4}$ . Он соответствует области **П<sub>б</sub>** на Рис. 2.3. С экспоненциальной точностью плотность состояний была найдена в разделе 2.1.3, сейчас нашей задачей будет нахождение предэкспоненты.

Флуктуационная область для рассматриваемого случая уже настолько велика, что вне ее разность функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  нельзя считать малой, но, тем не менее, их зависимость от координат все еще слабая. При вычислении гауссова интеграла по жестким модам так же, как и в разделе 1.6, возникает множитель

$$\sqrt{\frac{\det \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_2}^+ \det' \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_2}^-}{\det \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_1}^+ \det' \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_1}^-}} = \sqrt{\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0}{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0}}, \quad (2.36)$$

где мы ограничились лишь минимальными собственными значениями операторов  $\hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_2}^+$  и  $\hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_1}^+$ , потому что высшие собственные значения определяются в основном градиентным членом и, по-прежнему, слабо зависят от энергии.

Мы, однако, начнем с нахождения величин  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0$  и  $(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0$ , которые нам все равно понадобятся в дальнейшем. Для этого воспользуемся связью (A4) и формулами (1.29) и (2.25)

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial p^2} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{4} S_0''(P) \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{P=P_1} = \\ &= \frac{G\gamma}{4} \left[ \frac{1}{P_1} - \frac{\gamma P_1^2}{8} \right] = \frac{G\gamma}{8} \sqrt{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Аналогичное дифференцирование по переменной  $q$  дает

$$(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0 = -\frac{G\varepsilon^2}{8}. \quad (2.38)$$

Собственное значение  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^-)_0$  соответствует вращению угла  $\chi_B$  и равно нулю. Для вычисления  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0$  применим теорию возмущений. Соответствующая собственная функция слабо отличается от константы, и нам будет достаточно

положить ее равной единице.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0 &= \left(1 \left[ \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_2}^+ - \hat{\mathcal{O}}_{\theta_1\theta_2}^- \right] 1\right) = \\
&= \frac{\pi\hbar\nu D}{8} \int d\mathbf{r} (\nabla\psi_1)(\nabla\psi_2) + \sum_i \frac{N_i\gamma_i^2}{8} \text{sh}\psi_1^{(i)} \text{sh}\psi_2^{(i)} = \\
&= \frac{\pi\hbar\nu v_0}{64} P_1 P_2 \left[ \frac{3}{2l} \int d\mathbf{r} (\nabla\Xi)^2 + \sum_i A_i \gamma_i^2 \right] = \\
&= \frac{G\gamma^2}{32} P_1 P_2 = \frac{G\gamma}{16} \sqrt{2\varepsilon}. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались выражением (2.18) для  $\gamma$ .

Таким же способом можно посчитать  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0$ , однако при этом оказывается, что поправка теории возмущений к (2.37) мала, и можно считать

$$(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0 = (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0 = \frac{G\gamma}{8} \sqrt{2\varepsilon}. \quad (2.40)$$

Таким образом, вклад в предэкспоненту от жестких флуктуаций сводится к

$$\sqrt{\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0}{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.41)$$

Дальнейшее вычисление аналогично приведенному в разделе 1.6. Флуктуации мягких мод в переменных  $b$ ,  $p$  и  $\varkappa\omega$  сокращают друг друга. Остается интеграл по переменным  $n$ ,  $\zeta\xi$  и  $q$ . Пара грассмановых переменных<sup>2</sup>  $\zeta, \xi$  входит в действие в виде  $\zeta\xi(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0$ . Для вычисления этого собственного значения (оно отлично от нуля, если  $\alpha \neq \theta_2$ ) будем использовать собственную функцию  $\text{sh}[(\psi_2 - \psi_1)/2]$ , которая после нормировки принимает вид

$$a(\mathbf{r}) = 1 + \frac{3(P_1 + P_2)}{8l} \Xi(\mathbf{r}). \quad (2.42)$$

Подставляя это выражение в (2.4) и используя (2.16) и (2.18), после довольно громоздких, но элементарных преобразований получаем

$$(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0 = \frac{G\gamma}{32} \frac{P_2 + P_1}{P_2 - P_1} \left[ P_1 \left( -\varepsilon + \frac{2}{P_1^2} + \frac{\gamma P_1}{2} \right) - P_2 \left( -\varepsilon + \frac{2}{P_2^2} + \frac{\gamma P_2}{2} \right) \right]. \quad (2.43)$$

<sup>2</sup> В разделе 1.6 использовались обозначения  $\zeta(x) = \tilde{\zeta}f_0(x)$  и т.п., где явно были отделены амплитуда флуктуаций и их пространственный профиль. В рассматриваемом сейчас пределе нормированные собственные функции операторов  $\hat{\mathcal{O}}$ , отвечающие нижним собственным значениям, мало отличаются от единицы, так что с необходимой точностью можно не отличать  $\tilde{\zeta}$  и  $\zeta$ .

Здесь под  $P_2$  мы понимаем не корень уравнения (2.26), а переменную, параметризующую угол  $\alpha$ :  $\alpha \approx \pi/2 + i \ln P_2$ .  $P_2$  удовлетворяет (2.26) только при  $\alpha = \theta_2$ , при этом (2.43), очевидно, обращается в ноль. То же самое было и в случае идеальных границ. В седловой точке мода  $\zeta\xi$  нулевая, однако ее масса растет линейно при отклонении по переменной  $q$ . В нашем случае это соответствует отклонению по  $P_2$ :

$$\delta P_2 = -i P_2 \delta \alpha = -\frac{P_2}{\sqrt{2}} q. \quad (2.44)$$

Продифференцировав выражение (2.43) по  $P_2$  (нужно дифференцировать только второе слагаемое в квадратных скобках), приходим к результату:

$$(\mathcal{E}_{\theta_1 \alpha}^-)_0 = -\frac{G\gamma\varepsilon}{32} \delta P_2 = \frac{G\varepsilon^2 q}{16\sqrt{2}}. \quad (2.45)$$

Теперь вычислим в нашем приближении предэкспоненту в (1.24). По аналогии с (1.49) имеем

$$\frac{\nu}{4} \int dr \operatorname{str}(k\Lambda Q) = \operatorname{const} - \frac{\nu}{2} \delta \alpha \int dr \operatorname{ch} \psi_2 = \operatorname{const} + \frac{i}{2\sqrt{2}\delta} \frac{\varepsilon q}{\gamma}. \quad (2.46)$$

Осталось только определить меру интегрирования по переменной  $n$ , соответствующей нулевой моде вращения угла  $\chi_B$ . Пользуясь соотношением (A4), получим аналогично (1.51)

$$n = 2i \sin k_B \chi_B = -2 \operatorname{sh} \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} \chi_B = -2 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \chi_B = -\frac{(2\varepsilon)^{3/4}}{\sqrt{2}\gamma} \chi_B, \quad \int dn = \pi \sqrt{\frac{2}{\gamma}} (2\varepsilon)^{3/4}. \quad (2.47)$$

Теперь все готово для расчета плотности состояний. Используя (2.38), (2.41) и (2.45–2.47), имеем

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{e^{-S_1}}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \int \frac{dn dq}{\pi} d\zeta d\xi \frac{i}{2\sqrt{2}\delta} \frac{\varepsilon q}{\gamma} \exp \left[ \frac{G\varepsilon^2}{8} \left( q^2 - \frac{q\zeta\xi}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= -\frac{2^{3/4}}{64\delta} G \frac{\varepsilon^{15/4}}{\gamma^{3/2}} e^{-S_1} \operatorname{Im} \int dq q^2 \exp \left( \frac{G\varepsilon^2}{8} q^2 \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Интегрируя вдоль мнимой оси, получаем окончательно

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{\pi}{G\gamma^3}} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{3/4} \exp \left( -\frac{G\varepsilon^2}{4} \right). \quad (2.49)$$

Этот результат описывает поведение плотности состояний в областях  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$  на Рис. 2.3. В области  $\Pi_a$  полученная зависимость “сшивается” с (2.31) при  $\varepsilon \sim \gamma^{2/3}$ :

$$\langle \rho \rangle \Big|_{\varepsilon \sim \gamma^{2/3}} \sim \frac{1}{\delta \sqrt{G\gamma}} \exp(-G\gamma^{4/3}). \quad (2.50)$$

Сложнее обстоит дело со “сшивкой” в области  $\mathbf{\Pi}_b$ . Квазиклассическая плотность состояний обращается на границе щели в ноль корневым образом (2.30), достигает максимума при  $|\varepsilon| \sim \gamma^{2/3}$ , а далее начинает убывать (см. Рис. 2.2) по закону обратного корня (2.35). По мере уменьшения прозрачности границы размер флуктуационной области увеличивается, и при  $\gamma \sim \gamma^* = G^{-3/4}$  она накрывает максимум плотности состояний. В итоге оказывается, что плотность состояний растет по мере приближения к флуктуационной области  $\mathbf{F}_b$  с обеих сторон. В этой ситуации нельзя привести выражение для плотности состояний к универсальному виду, как это делалось в случае (1.63), поэтому никакой формальной “сшивки” зависимостей выше и ниже области  $\mathbf{F}_b$  нет: во флуктуационной области происходит сильное изменение плотности состояний, зависящее от малого параметра  $\gamma$ .

Оценим, наконец, полное число квазилокализованных состояний

$$\mathcal{N} \sim \int_0^1 \frac{E_g d\varepsilon}{\delta \sqrt{G\gamma^3}} \varepsilon^{3/4} e^{-G\varepsilon^2} \sim \gamma^{-1/2} G^{-3/8} \gg 1. \quad (2.51)$$

Таким образом, при  $\gamma \ll G^{-3/4}$  число состояний под щелью становится большим, почему мы и назвали этот случай “сильным хвостом”.

Существенное отличием “сильного хвоста” от результата (2.31) заключается в поведении плотности состояний над щелью. В случае, когда квазиклассическая плотность состояний обращается в ноль корневым образом (2.30), результат для “хвоста” имеет вид (2.31), и справедливо точное выражение (1.63). Если же на участке корневого роста квазиклассической плотности состояний оказывается в среднем меньше одного уровня (см. Рис. 2.2), то можно говорить о сингулярности типа БКШ (2.35) на пороге, и тогда форма “хвоста” приобретает вид (2.49).

## 2.2 SNS контакт с разностью фаз

### 2.2.1 Зависимость щели от разности фаз

Если фаза параметра порядка меняется в пространстве, матричное уравнение Узаделя не допускает простой параметризации одним углом. Помимо угла  $\theta$  нужно вводить фазовый угол, и решать систему нелинейных уравнений на обе переменные. Подход, основанный на применении суперматричной  $\sigma$ -модели,

эффективен, только если возможно отделение пространственной зависимости переменных и переход к нульмерному пределу. Такое приближение возможно и в случае контакта с разностью фаз, если изменение фазы происходит относительно небольшой по объему области вблизи границ контакта. Это действительно так для системы с *квантовыми точечными контактами*. Этим термином называют квазиклассическое сужение, посредством которого осуществляется контакт двух резервуаров.

Мы будем рассматривать случай баллистических контактов, что значительно упростит дальнейшие вычисления. Под баллистическим мы понимаем точечный контакт без дополнительного туннельного барьера. В квазиклассическом приближении (количество открытых каналов велико) можно рассуждать в терминах траекторий электронов. Среди большого количества траекторий, по которым электрон может подойти из объема к области контакта, лишь небольшая часть позволяет пройти через контакт. Остальные траектории будут отражены назад стенками. Всю область сужения можно рассматривать как рассеиватель, описываемый некоторой матрицей рассеяния, задающей амплитуды перехода из объема одного резервуара в другой. В представлении каналов квадрат этой матрицы можно диагонализировать, причем большинство собственных значений будут практически нулевыми, а остальные — близки к единице, что соответствует понятию о баллистическом контакте.

Полное действие  $\sigma$ -модели для баллистического контакта сверхпроводника и нормального металла имеет обычный вид (1.23), но при этом требуется самосогласованное нахождение параметра порядка  $\Delta$ . С точки зрения минимума действия, все пространственные изменения переменных более выгодны в малой по объему области вблизи границы, а не во всем объеме системы, поэтому мы можем считать матрицу  $Q$  независимой от координат в объеме и опустить градиентный член в действии, а сужение описывать с помощью граничного члена вида (2.1), взяв прозрачность  $\Gamma = 1$  (что соответствует предположению о баллистичности) и число каналов  $N$ , определенное размерами сужения. Для симметричного SNS контакта действие  $\sigma$ -модели будет иметь вид

$$\mathcal{S}[Q] = \frac{i\pi E}{2\delta} \text{str}(\Lambda Q) - \frac{N}{4} \sum_{i=L,R} \text{str} \ln \left[ 1 + Q_S^{(i)} Q \right]. \quad (2.52)$$

В этой формуле индекс  $i$  принимает два значения, отвечающие левой и правой границе. Здесь под  $Q$  нужно понимать значение матрицы достаточно далеко от сужения, что исключает лишь малую часть всего объема системы. В рас-

смотренном случае нам не нужно самосогласованно определять величину  $\Delta$ . В нормальной области параметр порядка отсутствует, а в сверхпроводниках можно считать его заданным, поскольку области сужений вблизи границ уже исключены.

Мы предполагаем, что к контакту приложена разность фаз  $\varphi$ . Будем использовать симметричную калибровку, считая что фазы левого и правого сверхпроводника равны  $\pm\varphi/2$ . Тогда выражения для матриц  $Q_S^{(L,R)}$  при энергиях много меньше  $\Delta$  принимают вид

$$Q_S^{(L,R)} = \tau_x \cos(\varphi/2) \pm \tau_y \sin(\varphi/2). \quad (2.53)$$

Используя угловую параметризацию (1.26) матрицы  $Q$  получим следующее выражение для действия  $\sigma$ -модели

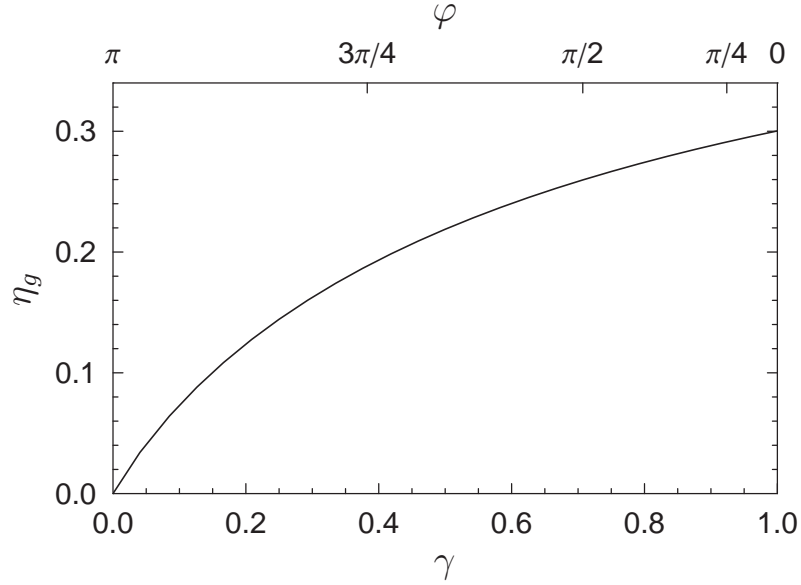
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}^{\text{FF}} - \mathcal{S}^{\text{BB}}, \\ \mathcal{S}^{\text{FF}} &= N \left[ 2i\eta \cos \theta_F \cos k_F - \sum_{\lambda=\pm 1} \ln \left( 1 + \cos \left( \varphi_F + \lambda \frac{\varphi}{2} \right) \sin \theta_F \right) \right], \\ \mathcal{S}^{\text{BB}} &= N \left[ 2i\eta \cos \theta_B \cos k_B - \sum_{\lambda=\pm 1} \ln \left( \cos k_B + \cos \left( \varphi_B + \lambda \frac{\varphi}{2} \right) \sin \theta_B \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Здесь мы для удобства ввели безразмерный энергетический параметр  $\eta = \pi E/(N\delta)$ .

Из симметричных соображений очевидно, что минимум действия достигается при нулевых значениях фаз  $\varphi_{F,B}$  (конечно, это легко установить и прямой вариацией действия). Также легко установить, что все седловые точки действия соответствуют нулевому значению угла  $k_F$ . Положив в действии  $k_F = \varphi_{F,B} = 0$  и введя обозначение  $\gamma = \cos(\varphi/2)$  и  $G = 2N$  (величины  $\gamma$  и  $G$  будут играть такую же роль, как раньше), получим выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{FF}} &= G \left[ i\eta \cos \theta_F \cos k_F - \ln (1 + \gamma \sin \theta_F) \right], \\ \mathcal{S}^{\text{BB}} &= G \left[ i\eta \cos \theta_B \cos k_B - \ln (\cos k_B + \gamma \sin \theta_B) \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

В следующем разделе мы подробно проанализируем это действие и определим его седловые точки, а сейчас обратимся к более простому вопросу — рассмотрим зависимость щели от разности фаз. Для этого нам достаточно оставить всего один угол  $\theta$ , например, в FF-секторе модели. Разумеется, такой же результат мы получим и из BB-сектора в силу суперсимметрии квазиклассического решения. Для единственного угла  $\theta_F = \pi/2 + i\psi$  варьирование действия



**Рис. 2.4.** Зависимость щели в плотности состояний симметричного SNS контакта от разности фаз. Значение  $\eta_g$  соответствует максимуму выражения (2.56).

дает следующее седловое уравнение

$$\eta = \frac{\gamma \operatorname{th} \psi}{1 + \gamma \operatorname{ch} \psi}. \quad (2.56)$$

Здесь мы сразу выразили энергию через мнимую часть угла  $\theta_F$  по аналогии с (1.7) и (2.26). Решая это уравнение относительно  $\psi$ , можно определить квазиклассическую плотность состояний. Результат такого вычисления изображен на Рис. 2.2.

Максимум правой части (2.56) определяет величину щели. Для нахождения этого максимума в общем случае произвольной разности фаз (параметра  $\gamma$ ) нужно решить кубическое уравнение. Зависимость щели от разности фаз, полученная таким способом, изображена на Рис. 2.4. При нулевой разности фаз соответствующее кубическое уравнение упрощается до квадратного и дает известный результат [6]

$$\eta_g|_{\varphi=0} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-5/2} \approx 0.3. \quad (2.57)$$

В противоположном пределе разности фаз близкой к  $\pi$  максимум выражения (2.56) достигается при больших значениях  $\psi$ . Действуя по аналогии со случаем туннельных контактов, введем переменную  $P$  согласно  $\psi = e^P$  и сделаем разложение по малой  $\gamma$  и большой  $P$

$$\eta = \gamma \left( 1 - \frac{\gamma P}{2} - \frac{2}{P^2} \right). \quad (2.58)$$

Теперь максимальное значение  $\eta$ , определяющее величину щели, будет

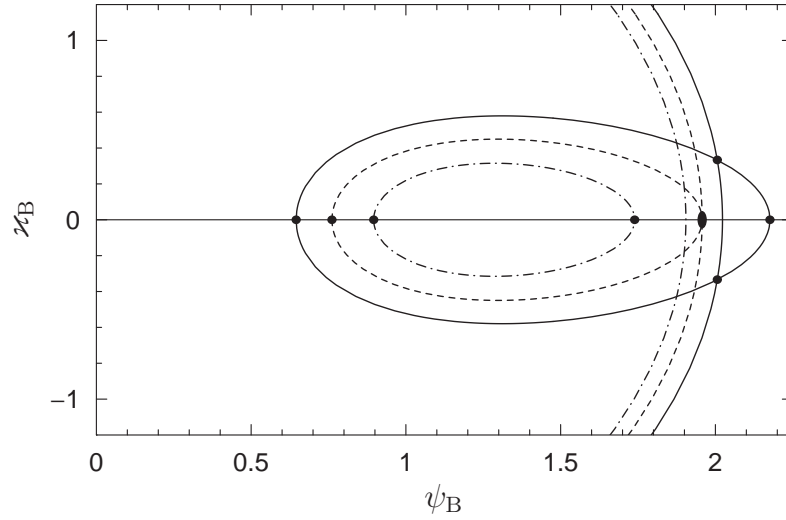
$$\eta_g = \gamma - \frac{3}{2}\gamma^{5/3}. \quad (2.59)$$

Такое поведение щели в пределе разности фаз близкой к  $\pi$  полностью аналогично зависимости щели от прозрачности туннельных контактов, полученному в предыдущей главе. Это совпадение не случайно. Величина щели характеризует влияние сверхпроводящих берегов на нормальную область контакта. Если два сверхпроводника имеют разные фазы параметра порядка, их влияние частично компенсируется. По мере приближения разности фаз к  $\pi$  эта компенсация становится практически полной. Таким образом, влияние сверхпроводников на нормальную часть контакта подавляется разностью фаз во многом аналогично тому, как происходит подавление эффекта близости в случае туннельных границ контакта. Однако у этих двух случаев есть и принципиальное отличие: ненулевая разность фаз на контакте нарушает симметрию по обращению времени. Это обстоятельство не влияет на квазиклассическую плотность состояний, но станет существенным при рассмотрении квазилокализованных состояний под щелью, как будет показано ниже.

### 2.2.2 Классификация седловых точек

Теперь мы переходим к рассмотрению седловых точек действия (2.55). В FF-секторе модели действие, по сути, аналогично случаю с нулевой разностью фаз и прозрачностью границ  $\gamma$ . Поэтому для переменной  $\theta_F$  по-прежнему существует два стационарных значения  $\theta_{1,2}$ . В терминах величины  $\psi$  они определяются двумя решениями уравнения (2.56). В ВВ-секторе у нас есть две нетривиальные переменные  $\theta_B$  и  $k_B$ . При ненулевой разности фаз мы уже не можем разделить переменные, переходя к  $\theta_B \pm k_B$ , как это было раньше, и должны анализировать экстремумы функции двух углов. Выражение для действия становится вещественным после замены переменных  $\theta_B = \pi/2 + i\psi_B$  и  $k_B = i\kappa_B$ . В новых переменных имеем

$$\mathcal{S}^{BB} = G[\eta \operatorname{sh} \psi_B \operatorname{ch} \kappa_B - \ln(\operatorname{ch} \kappa_B - \gamma \operatorname{ch} \psi_B)]. \quad (2.60)$$



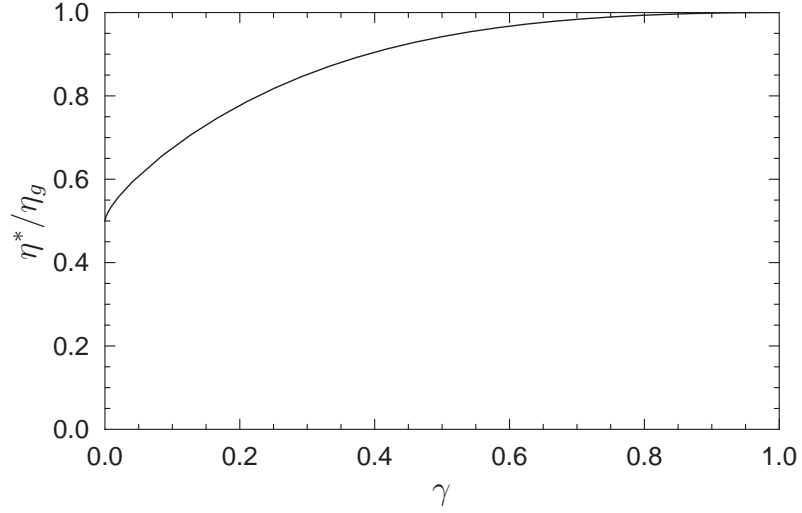
**Рис. 2.5.** Графическое решение системы уравнений (2.61) при  $\gamma = 0.3$ . Замкнутые кривые соответствуют решениям первого уравнения, а открытые — второго. Сплошные линии отвечают значению  $\eta = 0.125$ , пунктирные —  $\eta = 0.138$ , штрихпунктирные —  $\eta = 0.150$ . Кругжками отмечены седловые точки.

Варьируя действие по обеим переменным, получим систему уравнений, определяющую седловые точки

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}^{\text{BB}}}{G \partial \psi_B} = \eta \operatorname{ch} \psi_B \operatorname{ch} \kappa_B + \frac{\gamma \operatorname{sh} \psi_B}{\operatorname{ch} \kappa_B + \gamma \operatorname{ch} \psi_B} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{S}^{\text{BB}}}{G \partial \kappa_B} = \eta \operatorname{sh} \psi_B \operatorname{sh} \kappa_B - \frac{\operatorname{sh} \kappa_B}{\operatorname{ch} \kappa_B + \gamma \operatorname{ch} \psi_B} = 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Второе уравнение этой системы удовлетворяется при  $\kappa_B = 0$ . Таким образом, существует по крайней мере пара стационарных точек для действия ВВ-сектора:  $\kappa_B = 0$ ,  $\psi_B = \psi_{1,2}$ . Суперсимметричная седловая точка  $\psi_F = \psi_B = \psi_1$ ,  $\kappa_B = 0$ , как и раньше, определяет квазиклассическую плотность состояний. Вторая возможная комбинация  $\psi_F = \psi_1$ ,  $\psi_B = \psi_2$ ,  $\kappa_B = 0$  отвечает *второму* инстантону, рассмотренному в разделе 1.4.

Существование *первого* инстантона менее очевидно. Когда разность фаз обращается в ноль, соответствующая стационарная точка имеет вид  $\psi_F = 0$ ,  $\psi_B = (\psi_1 + \psi_2)/2$ ,  $\kappa_B = (\psi_2 - \psi_1)/2$ . При малой, но не нулевой разности фаз соответствующее решение также должно существовать. На Рис. 2.5 приведено графическое решение уравнений (2.61). Его анализ показывает, что по мере увеличения разности фаз, положение первого инстантона постепенно приближается ко второму инстантону, при некотором значении  $\gamma$  они совпадают, а при больших значениях разности фаз остается только второй инстантон. Значение



**Рис. 2.6.** Зависимость критической энергии (2.62) от  $\gamma$ . Первый инстантон исчезает, если энергия превышает критическую величину.

разности фаз, при котором седловые точки совпадают, зависит от энергии. Эту ситуацию можно описать и с другой точки зрения: при данной разности фаз существует некоторое критическое значение энергии  $\eta^*$ , выше которого первый инстантон исчезает. Оказывается, что это критическое значение энергии сравнительно легко определить. Как видно из Рис. 2.5, в момент, когда два инстантона совпадают, кривые  $\partial\mathcal{S}^{\text{BB}}/\partial\psi_{\text{B}} = 0$  и  $\partial\mathcal{S}^{\text{BB}}/\partial\kappa_{\text{B}} = 0$  касаются в точке  $\psi_{\text{B}} = \psi_2$ ,  $\kappa_{\text{B}} = 0$ . Для нахождения этой точки нужно положить  $\kappa_{\text{B}} = 0$  во втором уравнении (2.61), предварительно сократив это уравнение на  $\text{sh } \kappa_{\text{B}}$ , а затем выразить из него  $\eta$  и подставить в первое уравнение. В результате получается квадратное уравнение для  $\text{ch } \psi_{\text{B}}$ . Решая это уравнение и подставляя его решение в любое из двух уравнений (2.61), можно получить выражение для  $\eta^*$ :

$$\eta^* = \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\left(3 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}\right) \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}}}. \quad (2.62)$$

Зависимость критической энергии от разности фаз представлена на Рис. 2.6.

Полученная критическая энергия всегда меньше величины щели и совпадает с ней при нулевой разности фаз, когда первый инстантон заведомо существует. При ненулевой разности фаз около порога всегда есть только второй инстантон, а первый появляется лишь на энергиях, меньших  $\eta^*$ . Более того, при разности фаз близкой к  $\pi$  критическая энергия вдвое меньше величины щели  $\eta^* \approx \gamma/2$ . Поскольку мы вычисляем плотность состояний вблизи порога, первый инстантон можно не рассматривать.

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай близкой к  $\pi$  разности фаз и пренебрегать первым инстантоном, положив  $\varkappa_B = 0$ . Таким образом, по аналогии с (1.29,1.30) действие принимает вид

$$\mathcal{S} = 2S_0[\theta_F] - 2S_0[\theta_B], \quad (2.63)$$

$$S_0[\theta] = \frac{G}{2} \left[ i\eta \cos \theta - \ln(1 + \gamma \sin \theta) \right]. \quad (2.64)$$

### 2.2.3 Решение вблизи порога

Как было показано в предыдущем разделе, при близкой к  $\pi$  разности фаз и энергии около порога все седловые точки действия описываются двумя углами  $\theta_{F,B}$ . При этом из двух возможных инстантонов существует только второй инстантон по классификации раздела 1.4. В этом разделе мы вычислим плотность состояний, соответствующую вкладу этого инстантонного решения. Для этого нам нужно параметризовать флуктуации матрицы  $Q$  вблизи седловой точки. Разложение действия до второго порядка по  $W$  можно сделать воспользовавшись выражением (2.3). Для этого нужно опустить в нем градиентные члены и учесть различие в матрицах  $Q_S^{(L)}$  и  $Q_S^{(R)}$ . Это приводит к квадратичной форме следующего вида:

$$\mathcal{S}^{(2)}[W] = \frac{N}{4} \text{str} \left[ -i\eta \Lambda Q_0 W^2 + \sum_{i=L,R} \frac{Q_S^{(i)} Q_0}{1 + Q_S^{(i)} Q_0} \widetilde{W} \frac{1}{1 + Q_S^{(i)} Q_0} \widetilde{W} \right]. \quad (2.65)$$

Напомним, что матрица  $Q_0$  соответствует выбранной нами седловой точке, а  $\widetilde{W}$  дается выражением  $\widetilde{W} = e^{-iU_0/2} W e^{iU_0/2}$ , где  $U_0$  определяется формулами (1.33).

Параметризация матрицы  $W$ , диагонализующая эту квадратичную форму, приведена в приложении А. Как и ранее, матрица  $W$  содержит 8 коммутирующих  $(a, b, c, d, m, n, p, q)$  и 8 грассмановых  $(\lambda, \mu, \zeta, \varkappa, \eta, \gamma, \xi, \omega)$  параметров. Квадратичное действие диагонально в этих переменных и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2)} = & \mathcal{A}_{\theta_F \theta_F}^+ a^2 + \mathcal{B}_{\theta_F \theta_F}^- b^2 + \mathcal{B}_{\theta_F \theta_F}^+ (c^2 + d^2) + \\ & + \mathcal{A}_{\theta_B \theta_B}^+ m^2 + \mathcal{B}_{\theta_B \theta_B}^- n^2 + \mathcal{A}_{\theta_B \theta_B}^- (p^2 + q^2) + \\ & + \mathcal{A}_{\theta_F \theta_B}^+ \lambda \eta + \mathcal{B}_{\theta_F \theta_B}^+ \mu \gamma + \mathcal{B}_{\theta_F \theta_B}^- \zeta \xi + \mathcal{A}_{\theta_F \theta_B}^- \varkappa \omega. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Здесь, в отличие от аналогичного предыдущего выражения (1.44), где собственные значения определялись операторами  $\hat{O}^\pm$ , используются обычные функции  $\mathcal{A}^\pm$  и  $\mathcal{B}^\pm$ , зависящие от двух углов. Такое упрощение связано с тем, что

мы уже перешли к нульмерному пределу, исключив пространственную зависимость матрицы  $Q$ . Нарушение симметрии относительно обращения времени привело к некоторому усложнению квадратичной формы: теперь ее собственные значения определяются четырьмя, а не двумя функциями углов. Эти функции имеют вид

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\pm} = \frac{G}{16} \left[ -i\eta(\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{2 + \gamma(\sin \alpha + \sin \beta) - \gamma^2(1 \pm \cos(\alpha \pm \beta))}{(1 + \gamma \sin \alpha)(1 + \gamma \sin \beta)} \right], \quad (2.67)$$

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta}^{\pm} = \frac{G}{16} \left[ -i\eta(\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{\gamma(\sin \alpha + \sin \beta) + \gamma^2(1 \mp \cos(\alpha \pm \beta))}{(1 + \gamma \sin \alpha)(1 + \gamma \sin \beta)} \right]. \quad (2.68)$$

Сравнивая эти выражения с (2.4), легко установить, что функции  $\mathcal{B}^{\pm}$  полностью аналогичны операторам  $\hat{O}^{\pm}$ ; для этого достаточно в формуле (2.4) отбросить градиентные члены. Этот факт позволяет применить некоторые результаты анализа собственных значений операторов  $\hat{O}^{\pm}$ , проделанного в предыдущих разделах. Классифицируем массы различных мод, разделив их на три группы:

1. Нулевые моды. На седле есть единственная нулевая мода  $\mathcal{B}_{\theta_1\theta_2}^-$ , соответствующая паре грассмановых переменных  $\zeta\xi$ . В отличие от первого инстантона, нет вырождения по углу  $\chi_B$ , поскольку второй инстантон является изолированной точкой на многообразии матрицы  $Q$ , а не кольцом. Вырождение по переменным  $\zeta\xi$  снимается при отклонении от седловой конфигурации. Этот факт будет учтен при вычислении плотности состояний ниже.
2. Мягкие моды. К мягким модам мы относим флуктуации, масса которых мала в меру отклонения энергии от пороговой. К ним относятся все моды с массами  $\mathcal{B}^{\pm}$ , кроме нулевой моды, описанной выше. Мягкие флуктуации испытывают переменные  $b, c, d, n$  и пара грассмановых переменных  $\mu\gamma$ . Переменные  $b$  и  $n$  соответствуют флуктуациям углов  $\theta_F$  и  $\theta_B$  (см. соотношения (A8)), именно они представляют физический интерес. Вырождение нулевой моды снимается именно благодаря этим флуктуациям, поскольку тождество  $\mathcal{B}_{\theta_F\theta_B}^- = 0$  нарушается при отклонении углов  $\theta_F$  и  $\theta_B$  от их седловых значений. Масса флуктуаций переменной  $n$  отрицательна на инстантоне, что необходимо для появления состояний под щелью. Переменные  $c, d$  и  $\mu\gamma$  отделяются от остальных переменных, и по ним можно сразу взять интеграл в гауссовом приближении. При этом вклад

пары  $\mu\gamma$  сократит вклад от переменных  $c$  и  $d$ . Это справедливо для случая не слишком близкой к  $\pi$  разности фаз. В следующем разделе, вклад этих переменных будет учтен явно при рассмотрении “сильного хвоста”.

3. Жесткие моды имеют большую массу во всей области энергий около порога. Соответствующие собственные значения даются функциями  $\mathcal{A}^\pm$ . Мы сразу исключим их из рассмотрения, поскольку вклады от жестких мод взаимно сокращаются в супердетерминанте.

Проделав классификацию флуктуаций, мы оставляем только физически интересные переменные  $b$ ,  $n$  и  $\zeta\xi$ . Будем сразу вычислять точную зависимость плотности состояний от энергии, не предполагая, что действие на инстантоне велико, однако будем считать, как и прежде,  $G \gg 1$  для исключения вклада жестких мод.

Прежде чем вычислять плотность состояний, воспользуемся малостью параметра  $\gamma$  (близостью разности фаз к  $\pi$ ) и сделаем разложение в действии (2.64), введя переменные  $P_{F,B}$  согласно  $\theta_{F,B} = \pi/2 + i \ln P_{F,B}$

$$S_0[P] = \frac{G\gamma}{4} \left[ -\varepsilon P - \frac{2}{P} + \frac{\gamma P^2}{4} \right]. \quad (2.69)$$

Это выражение полностью аналогично (2.25). Если энергия равна своему пороговому значению, то две стационарных точки этого действия совпадают:  $P_{1,2} = P_0 = 2\gamma^{-1/3}$ . Разлагая полное действие по степеням отклонений  $\delta P = P - P_0$ , получим

$$\mathcal{S} = 2S_0[P_F] - 2S_0[P_B] = \frac{G\gamma}{2} \left[ -\varepsilon(\delta P_F - \delta P_B) + \frac{2}{P_0^4} ((\delta P_F)^3 - (\delta P_B)^3) \right]. \quad (2.70)$$

Такое разложение применимо при выполнении условия  $|\varepsilon| \ll \gamma^{2/3}$ . Чтобы обезразмерить действие (2.70) мы перемасштабируем переменные, вводя новый параметр размерности энергии  $\Delta_g$ . Он оказывается таким же, как и для контакта с туннельными границами (2.29)

$$\Delta_g = \frac{(3G)^{1/3} \gamma^{7/9} \delta}{2^{4/3} \pi}, \quad \epsilon = \frac{E_g - E}{\Delta_g} = \frac{E_g}{\Delta_g} \varepsilon, \quad (2.71)$$

$$P_F = P_0 + \frac{\delta}{\pi \Delta_g} u, \quad P_B = P_0 + \frac{\delta}{\pi \Delta_g} v. \quad (2.72)$$

В новых переменных действие приобретает вид

$$\mathcal{S} = -\epsilon(u - v) + \frac{u^3 - v^3}{3}. \quad (2.73)$$

Связь между переменными  $u, v$  и переменными  $b$  и  $n$ , параметризующими  $W$ , можно установить, воспользовавшись соотношениями (A8). Это позволяет найти меру интегрирования по  $u$  и  $v$ :

$$\frac{db dn}{\pi} = -i \frac{\gamma^{2/3} \delta^2}{\pi^3 \Delta_g^2} du dv. \quad (2.74)$$

Для определения вклада в действие от пары грассмановых переменных  $\zeta \xi$  сделаем разложение  $\mathcal{B}_{\theta_F \theta_B}^-$  по отклонениям  $\delta P_F$  и  $\delta P_B$ . Результат полностью аналогичен (2.43):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\theta_F \theta_B}^- &= \frac{G\gamma}{32} \frac{P_F + P_B}{P_F - P_B} \left[ \left( \varepsilon P_F - \frac{2}{P_F} - \frac{\gamma P_F^2}{2} \right) - \left( \varepsilon P_B - \frac{2}{P_B} - \frac{\gamma P_B^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{3G\gamma^2}{64} P_0 (\delta P_F + \delta P_B) = \frac{3G\gamma^{5/3} \delta}{32\pi \Delta_g} (u + v). \end{aligned} \quad (2.75)$$

После интегрирования по грассмановым переменным это выражение попадает в предэкспоненциальный множитель. Кроме того в предэкспоненте содержится величина, определяющая плотность состояний

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) &= \frac{1}{\delta} [\cos \theta_F + \cos \theta_B] = \\ &= \operatorname{const} - \frac{i}{2\delta} (\delta P_F + \delta P_B) = \operatorname{const} - i \frac{u + v}{2\pi \Delta_g}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

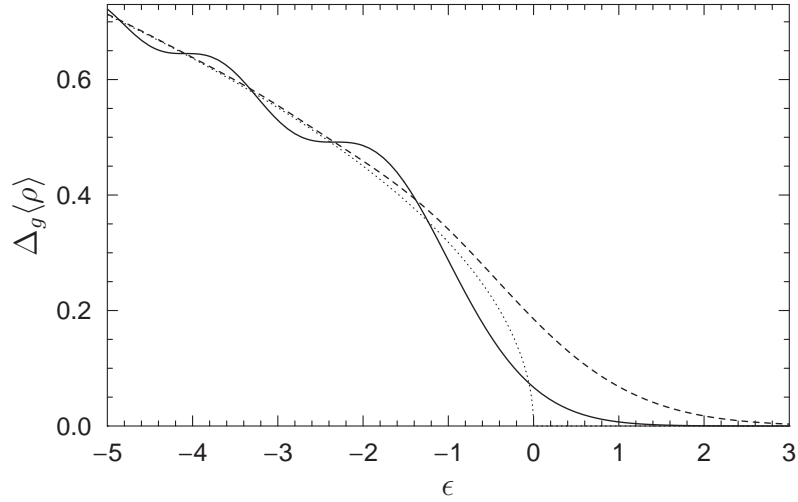
Выделенная здесь константа, как и в предыдущих случаях, не дает вклада в плотность состояний. Сбрав выражения (2.74), (2.75) и (2.76) и воспользовавшись действием (2.73), окончательно получаем плотность состояний в виде

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 \Delta_g} \operatorname{Re} \int du dv (u + v)^2 \exp \left[ \epsilon(u - v) - \frac{u^3 - v^3}{3} \right]. \quad (2.77)$$

Выбор контуров интегрирования по  $u$  и  $v$  делается аналогично случаю интеграла (1.61). Сходимость интеграла относительно полного действия (2.55) требует выбора контура  $C_1$  для переменной  $u$  (см. Рис. 1.4). Из двух возможных контуров для переменной  $v$  —  $C_2$  и  $C_3$  — только  $C_2$  дает положительную плотность состояний. Вычисление интеграла (2.77) приведено в приложении Б. Плотность состояний имеет вид

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\Delta_g} [-\epsilon \operatorname{Ai}^2(\epsilon) + [\operatorname{Ai}'(\epsilon)]^2]. \quad (2.78)$$

Эта зависимость плотности состояний от энергии изображена на Рис. 2.7. Имея точное выражение (2.78), можно получить асимптотические зависимости



**Рис. 2.7.** Зависимость плотности состояний (2.78) от энергии (сплошная линия) в SNS контакте с разностью фаз близкой к  $\pi$ . Для сравнения пунктирной линией показан результат для контакта с нулевой разностью фаз (1.63). Точечная линия отвечает квазиклассическому результату (2.30).

выше и ниже пороговой энергии. Для плотности квазилокализованных состояний под щелью имеем

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{4\delta G \gamma \varepsilon} \exp \left[ -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} G \gamma^{1/3} \varepsilon^{3/2} \right]. \quad (2.79)$$

Это асимптотическое выражение справедливо, когда показатель экспоненты велик, то есть  $\varepsilon \gg G^{-2/3} \gamma^{-2/9}$ . При меньших  $\varepsilon$  флуктуации становятся сильными, и работает только точная зависимость (2.78). С другой стороны, разложение (2.70) было сделано в предположении  $\varepsilon \ll \gamma^{2/3}$ . Это условие ограничивает область применимости формулы (2.79) сверху. Плотность состояний при больших  $\varepsilon$  будет вычислена в следующем разделе. Отметим, что полное число подщелевых уровней по-прежнему порядка единицы

$$\mathcal{N} \sim \int_0^{E_g} \langle \rho(E) \rangle dE \sim \frac{E_g}{G \gamma \delta} \sim 1. \quad (2.80)$$

Плотность состояний выше порога ( $\varepsilon < 0$ ) также может быть вычислена как асимптотика выражения (2.78). При этом помимо стандартной корневой зависимости, соответствующей квазиклассическому результату, имеет смысл удерживать следующий, осциллирующий член асимптотического ряда (см. Рис. 2.7):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\gamma^{2/3} \delta} \sqrt{\frac{8|\varepsilon|}{3}} - \frac{1}{2G\delta\gamma|\varepsilon|} \cos \left[ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} G \gamma^{1/3} |\varepsilon|^{3/2} \right]. \quad (2.81)$$

Первое слагаемое имеет в точности такой же вид, как (2.30), а осцилляции демонстрируют эффект отталкивания уровней, который в случае близкой к  $\pi$  разности фаз гораздо сильнее, чем в ранее рассмотренных случаях. В разделе 2.3 этот вопрос будет обсуждаться более подробно.

Выражение (2.81) также имеет смысл лишь в области  $G^{-2/3}\gamma^{-2/9} \ll |\varepsilon| \ll \gamma^{2/3}$ . При бóльших по абсолютной величине  $\varepsilon$  (то есть еще выше над порогом) плотность состояний начинает убывать по закону обратного корня (2.35).

## 2.2.4 “Сильный хвост”

Выражения для плотности состояний, полученные в предыдущем разделе, применимы для энергий, близких к пороговой:  $|\varepsilon| \ll \gamma^{2/3}$ . При нарушении этого условия седловая точка, соответствующая инстантону, оказывается настолько далеко от суперсимметричной седловой точки, что их уже нельзя описывать с помощью разложения действия (2.70). Однако по-прежнему можно представлять действие в форме (2.69). В этом разделе мы вычислим вклад инстантона в плотность состояний в пределе  $\gamma^{2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ . Это вычисление во многом повторяет подход, развитый в разделе 2.1.4, и дает аналогичный результат — “сильный хвост” — в том смысле, что полное число квазилокализованных состояний оказывается велико для достаточно малых значений  $\gamma$ .

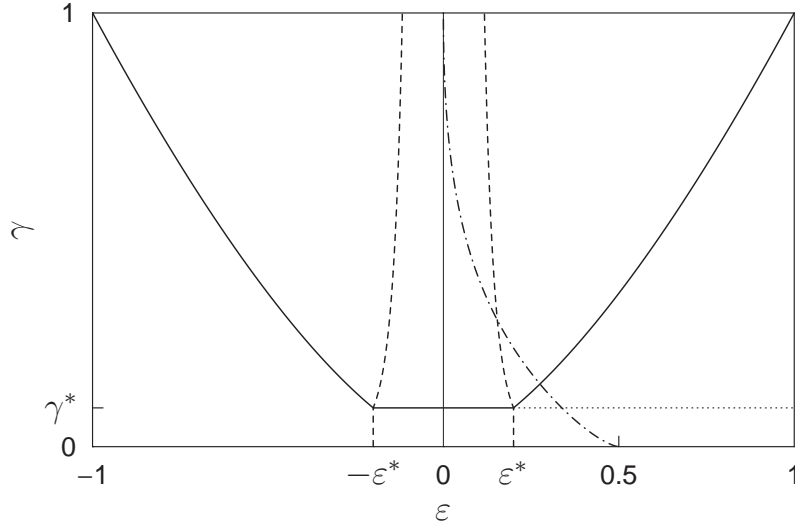
В рассматриваемом пределе нужно учесть вклад всех мягких мод около инстантона. Переменная  $n$  запутывается с грассмановой нулевой модой  $\zeta\xi$ , снимая ее вырождение, а вклад остальных мягких мод —  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $\mu\gamma$  — можно учесть в гауссовом приближении. Действуя по аналогии с вычислениями раздела 2.1.4, получаем

$$\mathcal{B}_{\theta_1\theta_1}^- = \mathcal{B}_{\theta_1\theta_1}^+ = 2\mathcal{B}_{\theta_2\theta_2}^- = \frac{G\gamma}{8}\sqrt{2\varepsilon}, \quad \mathcal{B}_{\theta_1\theta_2}^+ = -\frac{G\varepsilon^2}{8}, \quad \mathcal{B}_{\theta_1\theta_B}^- = i\frac{G\varepsilon^2}{32}n, \quad (2.82)$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{G\varepsilon^2}{2}, \quad \frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) = -\frac{\varepsilon n}{2\delta\gamma}. \quad (2.83)$$

Подщелевая плотность состояний определяется интегралом

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= e^{-\mathcal{S}_2} \frac{\mathcal{B}_{\theta_1\theta_2}^+}{\mathcal{B}_{\theta_1\theta_1}^+ \sqrt{\mathcal{B}_{\theta_1\theta_1}^-}} \operatorname{Re} \int \frac{dn d\zeta d\xi}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{\varepsilon n}{2\delta\gamma} \right) \exp \left[ \frac{G\varepsilon^2}{8} \left( n^2 - \frac{in\zeta\xi}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{2^{1/4}}{64\delta} \sqrt{G} \frac{\varepsilon^{11/4}}{\gamma^{3/2}} e^{-G\varepsilon^2/2} \operatorname{Im} \int dn n^2 \exp \left( \frac{G\varepsilon^2}{8} n^2 \right). \quad (2.84) \end{aligned}$$



**Рис. 2.8.** Фазовая диаграмма для различных асимптотик плотности состояний в контакте с разностью фаз близкой к  $\pi$ . Эта диаграмма полностью совпадает с диаграммой для контакта с нулевой разностью фаз (Рис. 2.3), за исключением условия  $\eta > \eta^*$ . Штрихпунктирная кривая соответствует критическим значениям энергии; все полученные результаты справедливы в области параметров левее этой линии.

Интегрируя по  $n$  вдоль мнимой оси, приходим к выражению

$$\langle \rho \rangle = \frac{\exp(-G\varepsilon^2/2)}{4G\delta\gamma^{3/2}(2\varepsilon)^{1/4}}. \quad (2.85)$$

Эта зависимость, как и раньше, справедлива в области  $\varepsilon \gg \gamma^{2/3}$  и корректно “сшивается” с зависимостью (2.79)

$$\langle \rho \rangle \Big|_{\varepsilon \sim \gamma^{2/3}} \sim \frac{\exp(-G\gamma^{4/3})}{G\delta\gamma^{5/3}}. \quad (2.86)$$

Выражение (2.85) получено в перевальном приближение около второго инстантона. Метод перевала работает при условии  $\varepsilon \gg G^{-1/2}$ , когда  $\gamma < G^{-3/4}$ ; выражение (2.85) описывает плотность состояний непосредственно около порога за исключением флуктуационной области. При этих же условиях выше флуктуационной области справедливо выражение (2.35). Итак, вся фазовая диаграмма (Рис. 2.8) сохраняет свой вид, за исключением дополнительного условия  $\eta > \eta^*$ , гарантирующего отсутствие первого инстантона.

Выражение (2.85) соответствует “сильному хвосту” в том смысле, что полное число подщелевых состояний оказывается велико

$$\mathcal{N} \sim \int_0^{1/2} \frac{E_g d\varepsilon}{G\delta\gamma^{3/2}\varepsilon^{1/4}} e^{-G\varepsilon^2} \sim \gamma^{-1/2} G^{-3/8} \gg 1. \quad (2.87)$$

Свойство, указанное в конце раздела 2.1.4, оказывается справедливым и в этом случае: “сильный хвост” появляется одновременно с сингулярностью в квазиклассической плотности состояний на пороге.

## 2.3 Метод теории случайных матриц

Теория случайных матриц была предложена Вигнером [25] в 1951 году для описания свойств ядерных спектров. Его идея заключалась в том, что статистические свойства спектра сложного и не известного нам ядерного гамильтониана не изменяются, если заменить все матричные элементы случайными числами. В дальнейшем теория случайных матриц была развита в работах Дайсона [26] и Меты [27].

В простейшем случае теория случайных матриц формулируется для так называемых гауссовых ансамблей, когда эрмитовой случайной матрице  $H$  размера  $N \times N$  сопоставляется статистический вес

$$\mathcal{P}(H) \propto \exp\left(-\frac{\pi^2}{2N\delta^2} \text{tr } H^2\right). \quad (2.88)$$

Средняя плотность состояний для распределения (2.88) в пределе  $N \rightarrow \infty$  имеет вид вигнеровского полукруга:

$$\langle \rho(E) \rangle_{\text{RMT}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\pi^2 E^2}{4N^2 \delta^2}}, \quad (2.89)$$

обращаясь в нуль при  $|E| > E_0 \equiv (2/\pi)N\delta$ . Согласно теории случайных матриц, статистические свойства спектра в центре зоны при  $|E| \ll E_0$  определяются только средним расстоянием между уровнями  $\delta$  и симметрией гамильтониана  $H$  (ортогональной, унитарной или симплектической [27]).

В 1965 году Горьков и Элиашберг [29] предложили применить теорию случайных матриц для описания статистических свойств уровней энергии в неупорядоченных металлических гранулах. Однако теория оставалась феноменологической вплоть до 1982 года, когда Ефетов [30] с помощью суперматричной  $\sigma$ -модели вычислил парный коррелятор уровней в металлической грануле  $R_2(\omega) = \delta^2 \langle \rho(E)\rho(E + \omega) \rangle$  и показал, что он совпадает с предсказаниями теории случайных матриц в нульмерном пределе  $\omega \ll E_{\text{Тн}}$ . В дальнейшем гипотеза универсальности, гласящая, что локальные спектральные свойства хаотических систем вблизи центра зоны определяются только симметрией гамильтониана, а не его микроскопическими свойствами, была доказана для широкого класса ансамблей случайных матриц [67].

В 1997 году Алтланд и Цирнбауэр [68] предложили обобщение трех стандартных ансамблей Вигнера и Дайсона на случай гибридных структур, введя еще четыре симметричных класса, учитывающих зеркальную симметрию уравнений Боголюбова – де Жена. В своем рассмотрении они, однако, ограничились системами, в которых средний фазовый множитель  $\langle e^{i\varphi} \rangle = 0$ , где  $\varphi$  — фаза электрона, набираемая за счет процессов андреевского отражения. Такая ситуация реализуется, например, в коре сверхпроводящего вихря или в SNS контакте с разностью фаз  $\pi$ . При указанном условии эффект близости не приводит к образованию щели в спектре нормальной области, но возможно проявление специфических сверхпроводящих корреляций на энергиях очень близких к энергии Ферми (на “расстоянии” порядка  $\delta$ ).

Если же средний по системе сверхпроводящий параметр порядка не обращается в нуль, то происходит подавление плотности состояний на Ферми-поверхности до нуля и образование (в квазиклассическом приближении) щели при  $E = E_g$ . Возникающие вблизи щели состояния не могут быть описаны с помощью теории случайных матриц в центре вигнеровского полукруга (2.89), даже с использованием новых симметричных классов [68]. В 2001 году Вавилов и др. [33] обратили внимание на то, что как квазиклассическая плотность состояний в гибридных структурах вблизи порога, так и плотность состояний для вигнеровского полукруга одинаковым (корневым) образом зависят от расстояния до порога. На этом основании они впервые предложили использовать теорию случайных матриц на краю спектра для описания околороговых состояний в гибридных структурах.

Вигнеровский полукруг (2.89) описывает среднюю плотность состояний вдали от порогов  $\pm E_0$ . Поправки к нему становятся существенными на расстоянии одного уровня от порога, т.е. при  $|E| - E_0 \sim \Delta_0$ , где  $\Delta_0 = (\delta^2 E_0 / 2\pi^2)^{1/3}$ . В запрещенной области  $|E| > E_0$  возникает ненулевая средняя плотность состояний, при этом  $\int_{E_0}^{\infty} \langle \rho(E) \rangle dE \sim 1$ , означая, что фактически вся плотность состояний вне вигнеровского полукруга обеспечивается флуктуациями положения наименее энергичного уровня. Универсальные свойства спектра случайных матриц вблизи его края исследованы в работах [32]. В частности, точный профиль средней плотности состояний вблизи порога  $E = E_0$  принимает универсальный вид в терминах безразмерной величины  $x = (E - E_0) / \Delta_0$ :

$$\langle \rho(E) \rangle = \frac{1}{\Delta_0} \left[ -x \text{Ai}^2(x) + [\text{Ai}'(x)]^2 + \delta_{\beta,1} \frac{\text{Ai}(x)}{2} \int_{-\infty}^x dy \text{Ai}(y) \right], \quad (2.90)$$

где  $\beta = 1$  (2) для ортогонального (унитарного) класса симметрии.

Вычисления, проделанные в этой и предыдущей главах с применением нелинейной суперматричной  $\sigma$ -модели, представляют собой полное микроскопическое доказательство применимости теории случайных матриц для описания края спектра в гибридных структурах и, кроме того, устанавливают пределы этой применимости:  $\varepsilon \ll \gamma^{2/3}$ . Гибридная структура без протекающего тока может описываться ортогональным ансамблем случайных матриц. Разность фаз нарушает симметрию по обращению времени и переводит задачу в унитарный класс. На языке  $\sigma$ -модели этот переход проявляется в исчезновении первого инстантона.

За пределами применимости гипотезы универсальности  $\sigma$ -модель предсказывает появление “сильного хвоста”. Как объясняется в разделе 2.1.4, это связано с тем, что край квазиклассического спектра имеет в этом случае сингулярность типа БКШ. Результат, полученный в работе [35] для сверхпроводника с исчезающе малой концентрацией магнитных примесей, соответствует именно такому случаю. Причина этого соответствия заключается в пренебрежении подавлением щели магнитными примесями [34], и, как следствие, сохранении сингулярности в квазиклассической плотности состояний. Если же концентрация магнитных примесей достаточно велика, чтобы снять сингулярность, то форма “хвоста” имеет вид [38]. Этот случай будет подробно рассмотрен в разделе 3.2.

## 3 Неуниверсальная плотность состояний

В этой главе мы рассмотрим различные случаи, в которых плотность состояний не описывается нульмерной  $\sigma$ -моделью. В разделе 3.1 изучается ситуация, когда инстантон, дающий подщелевые состояния, имеет конечный пространственный размер, меньший, чем размер нормальной части контакта. Флуктуации около такого инстантонного решения будут иметь квазинепрерывный спектр, что сильно затрудняет вычисление предэкспоненциального множителя в плотности состояний. Поэтому все результаты этого раздела (и всей главы) будут получены лишь с экспоненциальной точностью.

В разделе 3.2 мы рассмотрим задачу о подщелевых состояниях в сверхпроводнике с магнитными примесями. В отличие от всего остального материала, в этом разделе речь идет не о гибридной системе, а о пространственно однородном образце. Квазилокализованные состояния появляются благодаря пространственным флуктуациям магнитных примесей. Задача о подщелевых состояниях в такой системе была решена в работах [38]. Здесь мы приводим вывод этих результатов и показываем их связь с квазилокализованными состояниями в гибридных системах.

В последнем разделе этой главы рассматривается плотность состояний глубоко под щелью вблизи энергии Ферми. Она также не описывается нульмерной  $\sigma$ -моделью и будет найдена с экспоненциальной точностью.

### 3.1 Контакт большой площади

Этот раздел посвящен изучению плоского NS и SNS контакта (Рис. 1.1). В случае когда нормальная часть структуры имеет достаточно малые поперечные размеры (точный критерий будет указан ниже), применимы результаты разделов 1.6 и 1.7. Напомним, что соответствующие численные параметры для систе-

мы с идеальными границами имеют следующие значения:  $c_1 \approx 1.15$ ,  $c_2 \approx 0.88$ ,  $E_g = 3.12E_{\text{Th}}$ ,  $\tilde{G} = \pi c_2 E_g / (2\delta)$ . В случае контакта с туннельными границами можно использовать значения (2.29), разумеется, если  $\varepsilon \ll \gamma^{2/3}$ .

Действие инстантона, определяемое формулой (1.40), пропорционально контактансу нормальной области и растет с увеличением размеров ее сечения  $A$ . Когда поперечные размеры становятся достаточно большими, оказывается более выгодным образование инстантона, локализованного в поперечном направлении. При этом возникнет проигрыш за счет градиентных членов, но при достаточно большом  $A$  он компенсируется независимостью действия от площади сечения нормальной области. Как будет показано ниже, характерный размер такой полевой конфигурации зависит от близости к порогу и имеет порядок  $L_{\perp}(E) \sim L_z \varepsilon^{-1/4}$ . Отметим, что, в силу малости  $\varepsilon$ , справедливо неравенство  $L_{\perp} \gg L_z$ , которое обеспечивает отсутствие инстантонных конфигураций, сильно локализованных в направлении оси  $z$ .

Чтобы вычислить действие для инстантона, имеющего нетривиальную пространственную структуру в поперечном направлении, повторим рассуждения, которые привели к формуле (1.38), но будем считать, что коэффициент  $g$  зависит от поперечных координат:  $\theta = \pi/2 + i\psi_0(z) + ig(\mathbf{r}_{\perp})f_0(z)$ . Тогда к выражению (1.38) добавится соответствующее градиентное слагаемое

$$S_0[\theta] = \text{const} + \frac{\pi}{2\delta} \int \frac{d^2 \mathbf{r}_{\perp}}{A} \left[ -\frac{\hbar D}{2} (\nabla_{\perp} g)^2 + E_g \left( -2c_1 \varepsilon g + \frac{c_2}{3} g^3 \right) \right]. \quad (3.1)$$

Это действие имеет две очевидные не зависящие от поперечных координат седловые точки  $g = \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ , как это было для рассмотренного ранее случая. Для функции  $\theta_1$  мы оставим решение  $\theta_1 = \pi/2 + i\psi_0 - i\sqrt{\tilde{\varepsilon}}f_0$ , а для  $\theta_2$  будем искать решение, зависящее от поперечных координат. Для удобства введем функцию  $\tilde{g}(\mathbf{r}_{\perp})$ , которая будет описывать отклонение  $\theta_2 - \theta_1$

$$g(\mathbf{r}_{\perp}) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} [2\tilde{g}(\mathbf{r}_{\perp}) - 1]. \quad (3.2)$$

Действие для первого инстантона при этом принимает вид

$$S_1 = S_0[\theta_1] - S_0[\theta_2] = 8\tilde{G}\tilde{\varepsilon}^{3/2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}_{\perp}}{A} \left[ \frac{L_{\perp}^2}{2} (\nabla_{\perp} \tilde{g})^2 + \frac{\tilde{g}^2}{2} - \frac{\tilde{g}^3}{3} \right], \quad (3.3)$$

а параметр, соответствующий характерному поперечному размеру инстантона,  $L_{\perp}$  выражается в виде

$$L_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar D}{2c_2 E_g \sqrt{\tilde{\varepsilon}}}}. \quad (3.4)$$

Варьируя полученное действие, находим уравнение на функцию  $\tilde{g}$ , которое позволяет определить форму инстантона в поперечных направлениях:

$$L_{\perp}^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{g} = \tilde{g} - \tilde{g}^2. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение для лапласиана обратно в действие и интегрируя по частям, окончательно находим

$$\mathcal{S}_1 = \frac{4}{3} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}_{\perp}}{A} \tilde{g}^3(\mathbf{r}_{\perp}). \quad (3.6)$$

В некоторых частных случаях плоского контакта уравнение (3.5) относительно легко решается. Эти случаи соответствуют квазиодномерной, двумерной и трехмерной системе.

**Одномерный контакт.** Одномерным мы называем плоский контакт, поперечные размеры которого гораздо меньше  $L_{\perp}$ . В этом случае  $\tilde{g} \equiv 1$ , интеграл в (3.6) равен единице, и мы возвращаемся к выражению (1.40), а в случае туннельных контактов — к (2.28). В этом пределе применимо приближение нульмерной  $\sigma$ -модели, поэтому справедливы наши предыдущие результаты с предэкспоненциальным множителем (1.52) и (2.31) для туннельных контактов. Также будет справедливым и точное выражение (1.63).

**Двумерный контакт.** Если поперечное сечение нормальной части контакта имеет прямоугольную форму, и выполняются неравенства  $L_x \ll L_{\perp} \ll L_y$ , то можно искать решение уравнения (3.5), зависящее от единственной координаты  $y$ . Такое решение соответствует хорошо известному безотражательному потенциалу [69]

$$\tilde{g}(y) = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(y/2L_{\perp})}. \quad (3.7)$$

Подставляя  $\tilde{g}$  в (3.6), найдем выражение для плотности состояний:

$$\langle \rho \rangle \propto \exp\left(-\frac{48}{5} \frac{L_{\perp}}{L_y} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2}\right) = \begin{cases} \exp(-14.7 G_{\square} \varepsilon^{5/4}), & \text{NS;} \\ \exp(-29.4 G_{\square} \varepsilon^{5/4}), & \text{SNS.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь большой безразмерный параметр, который стоит в экспоненте и определяет применимость метода перевала,— это безразмерный кондактанс на квадрат пленки нормального металла, краем присоединенной к сверхпроводнику,  $G_{\square} = 2\hbar\nu DL_x$ .

В случае туннельных границ, используя (2.29) и (2.20), получаем

$$\langle \rho \rangle \propto \begin{cases} \exp\left(-6.81 \gamma_{1D}^{-1/6} G_{\square} \varepsilon^{5/4}\right), & \text{NS;} \\ \exp\left(-13.6 \gamma_{1D}^{-1/6} G_{\square} \varepsilon^{5/4}\right), & \text{SNS.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Здесь  $\gamma_{1D}$  определяется выражением (2.19). Мы используем одномерное выражение для  $\gamma$ , поскольку речь идет о плоском контакте, который всегда считается одномерным в смысле раздела 2.1.2.

**Трехмерный контакт.** Трехмерным мы называем плоский контакт, у которого оба поперечных размера превосходят  $L_{\perp}$ . Это приводит к двумерному уравнению (3.5). Такое уравнение нельзя решить аналитически, но можно численно получить значение интеграла (3.6).

$$\int d^2 \mathbf{r}_{\perp} \tilde{g}^3(\mathbf{r}_{\perp}) \approx 46.5 L_{\perp}^2. \quad (3.10)$$

В результате, для идеального контакта плотность состояний выражается в виде

$$\langle \rho \rangle \propto \exp(-63.6 G_{\square} \varepsilon). \quad (3.11)$$

В этой формуле  $G_{\square}$  обозначает безразмерный кондактанс на квадрат пленки, ориентированной параллельно сверхпроводящим берегам:  $G_{\square} = 2\hbar\nu D L_z$ . Полученное выражение для плотности состояний имеет одинаковый вид для случаев NS и SNS контакта.

Для структуры с туннельными границами, как и выше, используем значения (2.29) и (2.20) и получаем

$$\langle \rho \rangle \propto \exp\left(-16.2 G_{\square} \gamma_{1D}^{-2/3} \varepsilon\right), \quad (3.12)$$

где, по-прежнему,  $\gamma_{1D}$  дается выражением (2.19).

Критерий, определяющий, нужно ли учитывать зависимость инстантонного решения от поперечной координаты, состоит в сравнении  $L_{\perp}$  с размерами сечения контакта. Поскольку  $L_{\perp}$  сама зависит от энергии, то по мере приближения к порогу размерности “вымерзают”: происходит кроссовер от двумерной  $\sigma$ -модели к одномерной и далее к нульмерной. Если поперечные размеры нормальной области меньше длины  $L_z$ , то плотность состояний всегда определяется нульмерным пределом  $\sigma$ -модели.

## 3.2 Сверхпроводник с магнитными примесями

В этом разделе мы рассмотрим квазилокализованные состояний в сверхпроводнике с магнитными примесями. В данном случае речь идет о макроскопически однородной системе, в отличие от всего предыдущего (и последующего) материала. Метод нелинейной  $\sigma$ -модели для нахождения аномально локализованных состояний в такой системе был развит в работах [38].

Сверхпроводник с магнитными примесями в приближении среднего поля был подробно изучен в знаменитой работе Абрикосова и Горькова [34]. В частности, было показано, что сверхпроводимость подавляется магнитными примесями, причем параметр порядка  $\Delta$  оказывается больше, чем щель в спектре возбуждений  $E_g$ . Таким образом, возможно существование режима бесщелевой сверхпроводимости, когда  $E_g = 0$ , в то время как  $\Delta > 0$ . Мы, однако, (вслед за [38]) будем рассматривать случай конечной щели и найдем инстантонную поправку к плотности состояний под щелью с экспоненциальной точностью.

Введение магнитных примесей требует уточнения  $\sigma$ -модели. Гамильтониан Боголюбова – де Жена теперь содержит дополнительный член, описывающий рассеяние на магнитных примесях<sup>1</sup>:

$$\mathcal{H} = \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}) \right) + \tau_x \Delta(\mathbf{r}) + JS(\mathbf{r})\hat{\sigma}. \quad (3.13)$$

Поскольку магнитные примеси подавляют сверхпроводимость, параметр порядка  $\Delta$ , который входит в гамильтониан (3.13), должен определяться самоогласованно. Мы считаем, что концентрация магнитных примесей достаточно мала и не разрушает сверхпроводимость полностью. Во всех формулах этого раздела полагаем, что влияние примесей уже учтено в  $\Delta$ .

Случайное поле  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  в (3.13) будем считать дельта-коррелированным и введем стандартным образом время рассеяния на магнитных примесях  $\tau_s$ :

$$\langle JS_\alpha(\mathbf{r})JS_\beta(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}}{6\pi\nu\tau_s}. \quad (3.14)$$

Таким образом, в нашей системе появляется еще один безразмерный параметр

$$\zeta = \frac{\hbar}{\tau_s\Delta}. \quad (3.15)$$

<sup>1</sup> Обозначение  $\hat{\sigma}$  для оператора спина электрона снабжено крышкой, чтобы отличать его от матриц Паули  $\sigma_i$ , действующими в пространстве РН. Оператор спина выражается через матрицы Паули так:  $\hat{\sigma} = \tau_z\sigma$ .

Вывод  $\sigma$ -модели тривиально обобщается на случай гамильтониана (3.13). Действие при этом принимает вид

$$\mathcal{S}[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \operatorname{str} \left[ \hbar D (\nabla Q)^2 + 4iQ(\Lambda E + i\tau_x \Delta) - \frac{\hbar(Q\tau_z \boldsymbol{\sigma})^2}{3\tau_s} \right], \quad (3.16)$$

Здесь коэффициент диффузии определяется рассеянием только на немагнитных примесях. Уравнение Узаделя можно получить, не вводя полную параметризацию матрицы  $Q$ , а воспользовавшись простым выражением в терминах одного угла  $\theta$ :  $Q = \sigma_z \tau_z \cos \theta + \tau_x \sin \theta$ . Выделяя, как обычно, мнимую часть  $\theta = \pi/2 + i\psi$  получаем:

$$D\nabla^2 \psi + 2E \operatorname{ch} \psi - 2\Delta \operatorname{sh} \psi + \frac{\hbar}{\tau_s} \operatorname{sh} 2\psi = 0. \quad (3.17)$$

Сначала рассмотрим однородные решения этого уравнения. Как и раньше, при энергиях ниже определенного порога  $E_g$  таких решений будет два. Опуская градиентный член, перепишем уравнение в виде, напоминающем (1.7):

$$\frac{E}{\Delta} = \operatorname{th} \psi - \zeta \operatorname{sh} \psi. \quad (3.18)$$

Это уравнение имеет два решения. Энергия, при которой решения совпадают, определяет величину щели. Максимум функции в правой части достигается при  $\operatorname{ch} \psi = \zeta^{-1/3}$ , что соответствует

$$E_g = \Delta(1 - \zeta^{2/3})^{3/2}. \quad (3.19)$$

Этот замечательный результат был впервые получен в работе [34].

Вблизи порога можно разложить действие по безразмерной энергии  $\varepsilon = (E_g - E)/\Delta$  и по отклонению угла  $\psi = \psi_0 + g(\mathbf{r})$ . В результате для  $g(\mathbf{r})$  получим следующее действие

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu\Delta}{4} \int d\mathbf{r} \left[ \xi^2 (\nabla g)^2 + 4\varepsilon \zeta^{-1/3} g - 2\zeta^{1/3} \sqrt{1 - \zeta^{2/3}} g^3 \right]. \quad (3.20)$$

Здесь мы ввели длину когерентности  $\xi = \sqrt{\hbar D / \Delta}$ . Полученное действие полностью аналогично выражению (3.1). Таким образом, дальнейшие вычисления просто повторяют рассуждения предыдущего раздела и приводят к результату [38]

$$\langle \rho \rangle \propto \exp \left[ -\frac{16}{3} a_d \pi \nu^{(d)} \Delta \xi^d \zeta^{-2/3} \left( 24 \sqrt{1 - \zeta^{2/3}} \right)^{-\frac{2+d}{4}} \varepsilon^{\frac{6-d}{4}} \right]. \quad (3.21)$$

Здесь  $d$  — эффективная пространственная размерность сверхпроводника,  $\nu^{(d)}$  —  $d$ -мерная плотность состояний, а величина  $a_d = \int d^d \mathbf{r} \tilde{g}^3$  вычислялась в разделе 3.1 (функция  $\tilde{g}$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \tilde{g} = \tilde{g} - \tilde{g}^2$ ). Она принимает следующие значения:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 36/5, \quad a_2 \approx 46.5, \quad a_3 \approx 262. \quad (3.22)$$

### 3.3 Предел малых энергий

В этом разделе мы рассмотрим область энергий, близких к фермиевской. При таких энергиях плотность состояний подавлена наиболее сильно. Мы, как и ранее в этой главе, будем искать ответ с экспоненциальной точностью, для чего необходимо решить уравнение Узаделя (1.4) и вычислить действие для инстантона.

Вычисления этого раздела практически повторяют вычисления Музыкантского и Хмельницкого [43], применивших инстантонный метод в диффузной  $\sigma$ -модели для определения длинновременной асимптотики кондактанса  $G(t)$  мезоскопического образца. Возникающее при этом седловое уравнение, описывающее инстантонное решение, имеет вид  $D\nabla^2 \theta + i\omega \operatorname{sh} \theta = 0$  с условием  $\theta = 0$  на границе, где величина  $\omega$ , определяемая уравнением самосогласования [43], обратно пропорциональна  $t$ . В пределе  $\hbar\omega \ll E_{\text{Th}}$  нетривиальное решение этого уравнения практически совпадает с решением  $\psi_2$  уравнения (1.6) для SNS контакта при  $E \ll E_{\text{Th}}$ . В результате оказываются одинаковыми и действия инстантонов в нашей задаче и в задаче [43].

Начнем с квазиодномерного плоского SNS контакта (Рис. 1.1). Разность  $\psi_2 - \psi_1$  не мала при энергиях  $E \rightarrow 0$ , поэтому нужно напрямую решать уравнение (2.5). Заметим, что по мере уменьшения энергии  $\psi_1(0) \rightarrow 0$ , в то время как  $\psi_2(0) \rightarrow \infty$  (см. Рис. 1.2). Это позволяет нам положить  $\psi_1 = 0$ , а для  $\psi_2$  воспользоваться “треугольным” приближением [43]:

$$\psi_2(x) = A + B \left( 1 - \frac{|z|}{L_z} \right), \quad (3.23)$$

основанном на том, что при малых энергиях в уравнении (2.5) можно пренебречь вторым слагаемым почти во всей области  $z$ , кроме окрестности точки  $z = 0$ . Подставляя (3.23) в действие (2.2), интегрируя и разлагая граничный

логарифм, находим

$$S_0 = \frac{\pi\hbar\nu DA}{2L_z} \left[ -B^2 + \frac{E}{BE_{\text{Th}}} (\text{ch}(A+B) - \text{ch} A) - 6\gamma_{1\text{D}} \text{ch} A \right]. \quad (3.24)$$

При выводе этого действия было использовано равенство (2.19). Сначала рассмотрим случай идеальных границ, когда можно положить  $A = 0$ . После варьирования по  $B$  (с учетом  $B \gg 1$ ) находим

$$2B = \frac{Ee^B}{2BE_{\text{Th}}}. \quad (3.25)$$

С логарифмической точностью получаем для  $B$

$$B = \ln \frac{E_{\text{Th}}}{E} = \ln \frac{E_g}{E}. \quad (3.26)$$

Подставляя этот результат обратно в (3.24), находим плотность состояний

$$\langle \rho \rangle \propto \exp \left( -\frac{\pi G_{\text{N}}}{2} \ln^2 \frac{E_g}{E} \right), \quad (3.27)$$

где  $G_{\text{N}} = \hbar\nu DA/L_z$  — безразмерный кондактанс нормальной части контакта. В случае NS контакта кондактанс будет вдвое больше, а действие (3.24) — вдвое меньше, поэтому коэффициент в экспоненте (3.27) окажется меньше в четыре раза.

В случае туннельных границ между нормальным металлом и сверхпроводниками нужно варьировать (3.24) по обоим переменным в пределе  $A, B \gg 1$ . В результате получим

$$e^B = 6\gamma_{1\text{D}} \frac{E_{\text{Th}}}{E} B = \frac{E_g}{E} B, \quad e^{A+B} = \frac{4E_{\text{Th}}}{E} B^2. \quad (3.28)$$

Здесь мы воспользовались равенством (2.20). С логарифмической точностью получаем следующее решение:

$$B = \ln \frac{E_g}{E}, \quad e^A = \frac{2}{3\gamma_{1\text{D}}} \ln \frac{E_g}{E}. \quad (3.29)$$

В силу малости  $E/E_g$  и  $\gamma_{1\text{D}}$  первый член в действии (3.24) доминирует. При этом плотность состояний, как и в случае контакта с идеальными границами, имеет вид (3.27). Это не удивительно, поскольку глубоко под щелью находятся сильно локализованные состояния, которые очень слабо связаны со сверхпроводящими берегами. Плотность таких состояний слабо зависит от свойств границы.

При достаточно низких энергиях полученный ответ перестает быть справедливым. Дело в том, что градиент  $\psi_2$  стремится к бесконечности, а уравнение диффузии, на основе которого была построена  $\sigma$ -модель, не учитывает

нелокальных (баллистических) эффектов, которые становятся важными в этом пределе. Для применимости локальной теории необходимо выполнение условия  $|\nabla\psi_2| \sim B/L_z \ll 1/l$ , что приводит к ограничению на энергию:

$$E \gg E_g \exp\left(-\frac{L_z}{l}\right). \quad (3.30)$$

Теперь рассмотрим двумерный случай. Для простоты будем предполагать, что нормальная область имеет форму диска радиуса  $R$  и толщины  $L_z$ , по всему краю соединенного со сверхпроводником (Рис. 2.1). Так же, как и в предыдущем примере,  $\psi_1 = 0$ . Уравнение (2.5) на  $\psi_2$  запишем в полярных координатах, заменив гиперболический косинус экспонентой:

$$\psi_2'' + \frac{\psi_2'}{r} + \frac{E}{\hbar D} e^{\psi_2} = 0, \quad \psi_2'(0) = 0. \quad (3.31)$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\psi_2(r) = 2 \ln \frac{B \sqrt{8E_{\text{Th}}/E}}{B^2 + (r/R)^2}. \quad (3.32)$$

Здесь использована энергия Таулесса (2.22). Величина  $B$  определяется граничным условием (2.5).

Если граница между сверхпроводником и нормальным металлом прозрачная, то нужно потребовать  $\psi_2(R) = 0$ . При  $E \ll E_{\text{Th}}$  находим  $B = \sqrt{E/8E_{\text{Th}}}$ . Как и раньше, пренебрегая в (1.30) членом с энергией, получим для действия следующее выражение:

$$\mathcal{S}_1 = -S_0[\theta_2] = \frac{\pi \hbar \nu D L_x}{4} \int_0^R (\nabla \psi_2)^2 2\pi r dr = 4\pi^2 \nu D L_x \ln \frac{E_g}{E}. \quad (3.33)$$

Плотность состояний оказывается степенной функцией энергии [43]:

$$\langle \rho \rangle \propto \left( \frac{E}{E_g} \right)^{2\pi^2 G_{\square}}, \quad (3.34)$$

где  $G_{\square} = 2\hbar \nu D L_x$  — безразмерный кондактанс на квадрат двумерной нормальной пленки. В случае туннельного контакта, заменяя в граничном условии (2.5) синус на экспоненту и используя (2.21) и (2.22), получаем

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{\gamma_{2D} E_{\text{Th}}}} = \sqrt{\frac{E}{E_g}}. \quad (3.35)$$

Итак, с логарифмической точностью результат (3.34) остается справедливым и в случае туннельной границы, то есть, как и в одномерной структуре, сопротивление контактов не влияет на плотность состояний глубоко под щелью. Для

двумерного SNS контакта другой формы ответ останется таким же по порядку величины, поскольку только  $E_g$  зависит от продольных размеров, и это изменит лишь общий численный коэффициент в выражении для плотности состояний.

Найдем область применимости полученного результата. Максимальный градиент  $\psi_2$  достигается вблизи центра,  $|\nabla\psi_2| \propto \sqrt{E_g/E}/R$ , и должен быть меньше  $1/l$ . Таким образом, степенная зависимость плотности состояний (3.34) верна при

$$E \gg E_g \left( \frac{l}{R} \right)^2. \quad (3.36)$$

Это условие гораздо сильнее, чем (3.30). В трехмерном случае рассуждения, аналогичные приведенным в этом разделе, совсем невозможны, так как соответствующее условие оказывается чересчур сильным. В этом случае, а также в двумерном случае при энергиях ниже (3.36) подщелевая плотность состояний может быть найдена с помощью баллистической  $\sigma$ -модели [70] (см. также [71]).

Отметим, что после замены  $E \rightarrow \hbar t_\phi^{-1}$  выражения (3.27) и (3.34) совпадают (с точностью до множителя) с функцией распределения  $\mathcal{P}(t_\phi)$  времен релаксации соответствующей мезоскопической системы [42, 72]. Длинновременная асимптотика кондактанса выражается с ее помощью как  $G(t) \propto \int dt_\phi e^{-t/t_\phi} \mathcal{P}(t_\phi)$ . Вычисляя интеграл методом перевала, находим в случае одномерной системы  $G(t) \propto \exp[-(\pi G_N/2) \ln^2(\delta t/\hbar)]$ , что в формализме Музыкантского и Хмельницкого соответствует замене  $i\omega \rightarrow G_N/t$ . Указанное обстоятельство объясняет происхождение различных энергетических масштабов в рассматриваемой задаче и задаче про асимптотику кондактанса. Результаты (3.27) и (3.34) переходят в асимптотические выражения [43] для  $G(t)$  путем замены  $E_{\text{Th}}/E \rightarrow \delta t/\hbar$ .

## 4 Кулоновские эффекты в SIN структуре

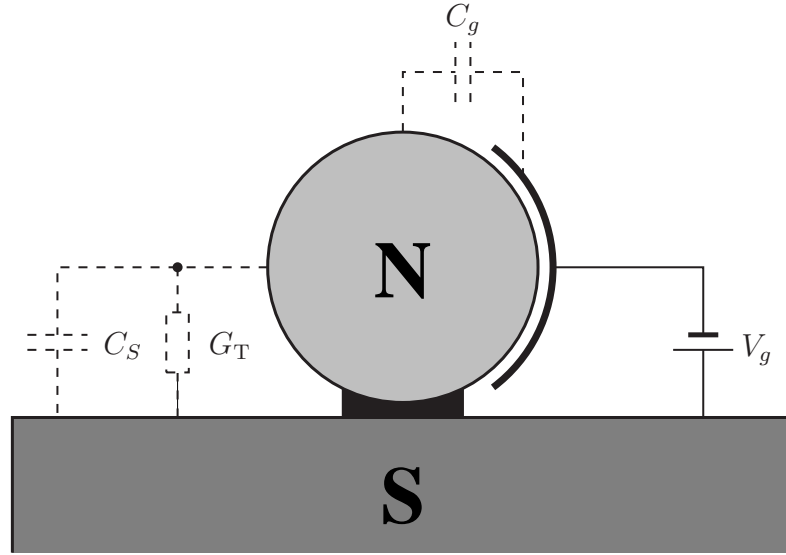
Эта глава посвящена изучению влияния кулоновского взаимодействия на плотность состояний в нормальной металлической грануле, соединенной со сверхпроводящими контактами. В отличие от предыдущих глав, мы не будем интересоваться подщелевыми состояниями, а сконцентрируемся на самосогласованном вычислении щели, наведенной в нормальном металле. Во втором разделе изучается эффект Джозефсона в ситуации, когда гранула присоединена к двум сверхпроводящим контактам. Оказывается, что теория, развитая для вычисления щели, может быть обобщена и для вычисления сверхпроводящего тока в такой системе.

### 4.1 SIN контакт

Начнем с рассмотрения SIN контакта — нормальной металлической гранулы присоединенной к сверхпроводнику туннельным контактом (Рис. 4.1). Предполагается, что контакт обладает большим нормальным туннельным кондактансом  $G_T$  и взаимной емкостью  $C_S$ . Кроме того, имеется затвор, который связан с гранулой емкостью  $C_g$ , и на который подается отрицательный потенциал  $-V_g$  относительно сверхпроводника. Полную емкость гранулы обозначим  $C_0 = C_S + C_g$ . Будем считать, что для гранулы применимо нульмерное приближение, то есть энергия Таулесса велика:  $E_{Th} > \Delta$ . В отсутствие кулоновских эффектов щель определяется туннельным кондактансом и имеет вид (2.12)

$$E_g = \frac{G_T \delta}{4} \ll \Delta. \quad (4.1)$$

Взаимодействие приводит к флуктуациям электрического потенциала, а значит и фазы гранулы. В результате происходит подавление эффекта близости и щель получается меньше, чем  $E_g$ .



**Рис. 4.1.** SIN контакт с затвором. Пунктирными линиями изображены элементы эквивалентной схемы. Нормальная гранула связана со сверхпроводником туннельным контактом с безразмерным кондактансом  $G_T$  и емкостью  $C_S$ . Затвор связан с гранулой емкостью  $C_g$ ; на него подается отрицательный потенциал  $-V_g$ .

#### 4.1.1 Динамическая репличная $\sigma$ -модель

Для изучения эффектов взаимодействия суперматричная  $\sigma$ -модель не применима. Мы будем пользоваться динамической репличной  $\sigma$ -моделью Финкельштейна [58], краткому выводу которой посвящен этот раздел. Как и при выводе суперматричной  $\sigma$ -модели, мы сначала рассмотрим изолированную гранулу, в которой есть отличный от нуля сверхпроводящий параметр порядка  $\Delta$ . Это позволит нам в дальнейшем определить действие для нормальной гранулы и равновесное значение матрицы  $Q$  в сверхпроводнике; граничный член будет добавлен к действию на последнем этапе вывода.

В представлении вторичного квантования динамику электронов можно описывать гамильтонианом Боголюбова с кулоновским членом и с членом, описывающим взаимодействие с затвором

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r} \left[ \hat{\psi}_\alpha^+ \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}_\alpha + \Delta \hat{\psi}_\downarrow^+ \hat{\psi}_\uparrow^+ + \Delta^* \hat{\psi}_\uparrow \hat{\psi}_\downarrow \right] + \frac{e^2}{2C_0} \left[ \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^+ \hat{\psi}_\alpha \right]^2 - \frac{C_g}{C_0} eV_g \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^+ \hat{\psi}_\alpha. \quad (4.2)$$

Если гранула замкнута, то ее заряд сохраняется, и кулоновский член не дает вклада в динамику. Мы же будем считать, что сохраняется химический потенциал  $\mu$ , имея в виду, что в дальнейшем к нашей модели добавится граничный

член, и заряд сохраняться не будет. Статсумма системы выражается при помощи функционального интеграла по когерентным состояниям [73] в мнимом времени (мы считаем, что оно имеет размерность обратной энергии). Сразу введем  $M$  реплик

$$\mathcal{Z}^M = \int D\psi^* D\psi e^{-\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} = \sum_{a=1}^M \int_0^{1/T} d\tau \mathcal{L}[\psi^{a*}, \psi^a], \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}[\psi^{a*}, \psi^a] = \int d\mathbf{r} \psi_\alpha^{a*} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu \right) \psi_\alpha^a + \mathcal{H}[\psi^{a*}, \psi^a]. \quad (4.4)$$

Здесь  $\psi$  и  $\psi^*$  — грассмановы функции<sup>1</sup>, зависящие от мнимого времени  $\tau$  с антипериодическим условием  $\psi(\tau + 1/T) = -\psi(\tau)$ . Четырехфермионный член в гамильтониане, описывающий кулоновское взаимодействие, расщепляем преобразованием Хаббарда – Стратоновича, вводя электрический потенциал  $\phi$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\psi^{a*}, \psi^a, \phi^a] = \int d\mathbf{r} \left[ \psi_\alpha^{a*} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi - ie\phi^a + U(\mathbf{r}) \right) \psi_\alpha^a + \Delta \psi_\uparrow^{a*} \psi_\downarrow^{a*} + \Delta^* \psi_\uparrow^a \psi_\downarrow^a \right] + \\ + \frac{C_0}{2} \left[ \phi^a + i \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Стандартным образом вводим матричное представление Намбу – Горькова [61]

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow^* \end{pmatrix}, \quad \Psi^+ = (\psi_\uparrow^*, \psi_\downarrow), \quad \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

После усреднения по беспорядку в приближении гауссова  $\delta$ -коррелированного случайного потенциала получаем действие в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\Psi^+, \Psi, \phi] = \\ = \sum_a \int d\tau \left\{ \frac{C_0}{2} \left[ \phi_\tau^a + i \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 + \int d\mathbf{r} \Psi_\tau^{a+} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \tau_z (\xi - ie\phi_\tau^a) + \hat{\Delta} \right] \Psi_\tau^a \right\} - \\ - \frac{\hbar}{4\pi\nu\tau} \sum_{ab} \int d\tau d\tau' d\mathbf{r} \Psi_\tau^{a+} \tau_z \Psi_\tau^a \Psi_{\tau'}^{b+} \tau_z \Psi_{\tau'}^b. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Расщепляем четырехфермионный член преобразованием Хаббарда – Стратоно-

<sup>1</sup> В этой главе, в отличие от суперматричной  $\sigma$ -модели, мы пользуемся следующими соглашениями для операции сопряжения грассмановых переменных:  $\psi^{**} = \psi$ ,  $(\chi\psi)^* = \psi^*\chi^*$ . В таком виде грассманова алгебра имеет большее формальное сходство с алгеброй антикоммутирующих фермионных операторов.

вича с матричным полем  $Q_{\tau\tau'}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\Psi^+, \Psi, Q, \phi] &= \frac{\pi\hbar\nu}{4\tau} \text{Tr} Q^2 + \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2} \left[ \phi_\tau^a + i \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 + \\ &+ \sum_{a,b} \int d\tau d\tau' d\mathbf{r} \Psi_\tau^{a+} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial\tau} + \tau_z (\xi - ie\phi_\tau^a) + \hat{\Delta} \right) \delta^{ab} \delta(\tau - \tau') - \frac{i\hbar\tau_z}{2\tau} Q_{\tau\tau'}^{ab} \right] \Psi_{\tau'}^b \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь операция  $\text{Tr}$  обозначает взятие следа по всем пространствам, включая суммирование по репликам и интегрирование по мнимому времени (или суммирование по мацубаровским энергиям).

В общем случае матрица  $Q$  должна быть функцией от одной пространственной координаты  $\mathbf{r}$ . Имея в виду нульмерный предел  $\sigma$ -модели, мы уже на этом этапе будем считать, что  $Q$  постоянна в пространстве. Это предположение заметно упрощает дальнейшие вычисления.

Действие (4.8) квадратично по фермионным полям  $\Psi$ , что позволяет взять гауссов интеграл и получить выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[Q, \phi] &= \frac{\pi\hbar\nu}{4\tau} \text{Tr} Q^2 + \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2} \left[ \phi_\tau^a + i \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 - \\ &- \text{Tr} \ln \left[ \xi - i\varepsilon\tau_z - ie\phi + \tau_z \hat{\Delta} - \frac{i\hbar Q}{2\tau} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь мы ввели мацубаровскую энергию  $\varepsilon = i\partial/\partial\tau$ . При  $\phi = 0$  найденное действие имеет седловую точку, диагональную в пространстве реплик и энергий (мы фиксируем фазу  $\hat{\Delta} = \tau_y \Delta$ ):

$$Q_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} = T^{-1} \delta^{ab} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \Lambda(\varepsilon), \quad \Lambda(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\tau_z + \Delta\tau_x}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}. \quad (4.10)$$

Такой вид будет иметь матрица  $Q$  в сверхпроводнике.

В пределе  $\varepsilon = \Delta = e\phi = 0$  действие (4.9) обладает седловым многообразием  $Q^2 = 1$ . Моды, приводящие к отклонению от него, массивны по металлическому параметру  $k_F l \gg 1$ . Члены с  $\varepsilon$  и  $\Delta$  снимают вырождение и приводят к нетривиальному действию на многообразии  $\sigma$ -модели. При выводе суперматричной  $\sigma$ -модели делалось разложение логарифма до главных порядков по  $\varepsilon$ ,  $\Delta$  и градиентам матрицы  $Q$ . Однако для системы с взаимодействием такое разложение делать нельзя из-за наличия члена с  $\phi$ , поскольку электрический потенциал сдвигает всю энергетическую зону, что приводит к появлению высокочастотных вкладов в  $Q$ . Чтобы преодолеть это затруднение, сделаем калибровочное

преобразование, предложенное Каменевым и Андреевым [74], которое позволяет избавиться от  $\phi$  под логарифмом

$$K_\tau^a = e \int^\tau d\tau' \phi_\tau^a, \quad Q_{\tau\tau'}^{ab} = e^{i\tau_z K_\tau^a} \tilde{Q}_{\tau\tau'}^{ab} e^{-i\tau_z K_{\tau'}^b}. \quad (4.11)$$

В матрице  $\tilde{Q}$  высокочастотный вклад исключен, и в новых переменных действии приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = & \frac{\pi\hbar\nu}{4\tau} \text{Tr} \tilde{Q}^2 + \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2e^2} \left[ \dot{K}_\tau^a + ie \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 - \\ & - \text{Tr} \ln \left[ \xi - i\varepsilon\tau_z - i\Delta\tau_x e^{2i\tau_z K} - \frac{i\hbar\tilde{Q}}{2\tau} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Теперь ограничиваем пространство изменения  $\tilde{Q}$  многообразием  $\tilde{Q}^2 = 1$  и разлагаем логарифм до главных членов по  $\varepsilon$  и  $\Delta$ . В итоге получаем

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2e^2} \left[ \dot{K}_\tau^a + ie \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 - \frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ (\varepsilon\tau_z + \Delta\tau_x e^{2i\tau_z K}) \tilde{Q} \right]. \quad (4.13)$$

Для нормальной гранулы, соединенной со сверхпроводником туннельным контактом, в действии (4.13) нужно положить  $\Delta = 0$  и добавить граничный член, который имеет вид (2.1), причем достаточно ограничиться главным порядком разложения логарифма в туннельном пределе. Окончательно получаем действие в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = & \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2e^2} \left[ \dot{K}_\tau^a + ie \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 - \\ & - \frac{\pi G_T}{4} \text{Tr} \left[ e^{-i\tau_z K} Q_S e^{i\tau_z K} \tilde{Q} \right] - \frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ \varepsilon\tau_z \tilde{Q} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

где матрица  $Q_S$  определяется выражением (4.10).

### 4.1.2 Самосогласованный подход

В этом разделе будет развит самосогласованный подход к описанию эффектов кулоновского взаимодействия на основе действия (4.14). Основная идея этого подхода заключается в интегрировании по переменной  $K$  и использовании седлового приближения для получившегося действия от  $\tilde{Q}$ . Чтобы проинтегрировать по  $K$ , будем использовать *adiaбатическое приближение*. Оно основано на предположении, что характерные частоты фазы  $K$  велики по сравнению

с частотами матрицы  $\tilde{Q}$ . Это предположение будет обосновано ниже на основе полученного результата. После взятия функционального интеграла по  $K$  останется действие для матрицы  $\tilde{Q}$ , к которому мы будем применять седловое приближение. Условия применимости этого приближения также будут установлены позднее.

Граничный член в действии (4.14), который связывает  $\tilde{Q}$  и  $K$ , обладает сложной структурой, не позволяющей разделить переменные. Однако его можно упростить, воспользовавшись неравенством  $E_g \ll \Delta$ . На малых энергиях порядка  $E_g$  это неравенство позволяет положить  $Q_S = \tau_x$ . Чтобы вычислить вклад от энергий порядка  $\Delta$  и выше можно пренебречь эффектом близости и зафиксировать для матрицы  $\tilde{Q}$  значение, отвечающее состоянию в нормальном металле,  $\tilde{Q}_{\varepsilon\varepsilon'} = T^{-1}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\tau_z \operatorname{sgn} \varepsilon$ , а для  $Q_S$  воспользоваться точной формулой (4.10). При этом граничный член приобретает вид

$$\tilde{\mathcal{S}} = -\frac{\pi G_T}{2} \sum_a T^2 \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \int d\tau d\tau' \frac{\varepsilon \operatorname{sgn} \varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} e^{i(\varepsilon - \varepsilon')(\tau - \tau')} \cos(K_\tau^a - K_{\tau'}^a). \quad (4.15)$$

Предположим, что характерный энергетический масштаб для фазы  $K$  мал по сравнению с  $\Delta$ . Тогда можно сделать разложение  $\cos(K_\tau - K_{\tau'}) \approx 1 - (\dot{K}_\tau)^2(\tau - \tau')^2/2$ . Подставим его в (4.15) и заменим сумму по мацубаровским частотам на интеграл, считая температуру малой по сравнению с  $\Delta$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} &= \text{const} + \frac{3G_T}{8} \sum_a \int d\varepsilon d\tau \frac{\Delta^2 |\varepsilon|}{(\varepsilon^2 + \Delta^2)^{5/2}} (\dot{K}_\tau^a)^2 = \\ &= \text{const} + \frac{G_T}{4\Delta} \sum_a \int d\tau (\dot{K}_\tau^a)^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь выделена не зависящая от  $K$  константа.

В итоге действие  $\tilde{\mathcal{S}}$  сводится к добавке к емкости

$$C = C_0 + \frac{e^2 G_T}{2\Delta}. \quad (4.17)$$

Этот результат был впервые получен Ларкиным и Овчинниковым Овчинниковым [75]. Характерные частоты фазы  $K$  заведомо  $e^2/C < 2\Delta/G_T \ll \Delta$ . Таким образом, разложение косинуса по степеням  $\dot{K}$  оказывается самосогласованным.

Вклад в действие от высоких энергий свелся к перенормировке емкости. Внеся эту поправку в (4.14) и ограничимся малыми энергиями  $\varepsilon \lesssim \Delta$ , полагая

$Q_S = \tau_x$ . Тогда получим действие в виде

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = -\frac{\pi}{\delta} \text{Tr} [\varepsilon \tau_z \tilde{Q}] + \sum_a \int d\tau \left[ \frac{(\dot{K}_\tau^a)^2}{4E_C} + iN \dot{K}_\tau^a - \frac{e^2 N^2}{2C_0} - \frac{\pi G_T}{4} \left( \text{tr}(\tau_x \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa}) \cos 2K_\tau^a + \text{tr}(\tau_y \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa}) \sin 2K_\tau^a \right) \right]. \quad (4.18)$$

Здесь мы ввели величину зарядовой энергии  $E_C = e^2/(2C)$  и равновесного заряда на грануле  $eN = C_g V_g$ . Операция  $\text{tr}$  подразумевает взятие следа только по пространству Намбу – Горькова.

В действии (4.18) можно разделить переменные  $\tilde{Q}$  и  $K$  применяя адиабатическое приближение. Будем считать, что фаза  $K$  является относительно быстрой степенью свободы, а матрица  $\tilde{Q}$ , взятая в совпадающие моменты времени, — медленной. Такое предположение справедливо при условии  $E_C \gg \delta$ , как будет показано в следующем разделе. Это позволяет взять функциональный интеграл по  $K$  и найти действие только для  $\tilde{Q}$ . Очевидно, что это действие получится однородным в мнимом времени и поэтому будет обладать стационарной (то есть диагональной в пространстве реплик и энергий) седловой точкой  $\underline{\tilde{Q}}$ . В дальнейшем мы будем использовать метод перевала около этой точки, однако удобнее уже сейчас, до интегрирования по  $K$ , представить матрицу  $\tilde{Q}$  в стационарном виде

$$\underline{\tilde{Q}}_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} = T^{-1} \delta^{ab} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} (\tau_z \cos \theta_\varepsilon + \tau_x \sin \theta_\varepsilon). \quad (4.19)$$

В общем случае матрица  $\underline{\tilde{Q}}$  должна содержать еще член  $\tau_y$ , однако его можно исключить надлежащим выбором произвольной константы в определении фазы  $K$ . Для диагональной в пространстве реплик матрицы  $\underline{\tilde{Q}}$  действие распадается в сумму независимых вкладов от каждой реплики. Поэтому седловое решение, которое будет найдено ниже, имеет одинаковый вид во всех репликах, и можно считать, что угол  $\theta$  не зависит от индекса  $a$ .

Подставляя  $\tilde{Q} = \underline{\tilde{Q}}$  в (4.18), получаем действие с разделенными переменными

$$\mathcal{S}[\underline{\tilde{Q}}, K] = \sum_a \int d\tau \left[ -\frac{e^2 N^2}{2C_0} - \frac{2\pi T}{\delta} \sum_\varepsilon \varepsilon \cos \theta_\varepsilon + \mathcal{L}[K_\tau^a] \right], \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}[K] = \frac{\dot{K}^2}{4E_C} - iNK - 2E_C q \cos 2K, \quad q = \frac{\pi G_T T}{4E_C} \sum_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon. \quad (4.21)$$

Введенный здесь безразмерный параметр  $q$  описывает влияние  $\underline{\tilde{Q}}$  на динамику фазы  $K$ . Пока мы рассматриваем его как неизвестную константу, значение которой будет определено позднее.

Теперь можно проинтегрировать по фазе  $K$ . Функциональный интеграл берется точно, поскольку действие локально в мнимом времени. В результате интегрирование сводится к вычислению статсуммы [76] для системы с гамильтонианом <sup>2</sup>

$$H = E_C [(-i\partial/\partial K + N)^2 - 2q \cos 2K]. \quad (4.22)$$

Этот гамильтониан действует на кольце с периодическими граничными условиями  $\psi(K + 2\pi) = \psi(K)$  и обладает дискретным спектром. Чтобы понять происхождение этих граничных условий, нужно переписать гамильтониан в представлении заряда (фаза  $K$  и заряд гранулы являются канонически сопряженными переменными). Величина заряда дискретна, следовательно волновая функция должна быть периодична по  $K$ .

Подробное изучение свойств системы с гамильтонианом (4.22) будет проделано в следующих разделах этой главы. Пока будем считать, что нам уже известен спектр состояний и свободная энергия  $F_K(q, N, T)$  для фазы  $K$ . Величина этой свободной энергии периодически зависит от  $N$  с периодом один, поэтому в дальнейшем мы всегда, кроме раздела 4.1.5, будем полагать  $|N| \leq 1/2$ . Используя  $F_K$ , можно записать действие для одной лишь матрицы  $\tilde{Q}$

$$S[\tilde{Q}] = \sum_a \int d\tau \left[ -\frac{e^2 N^2}{2C_0} - \frac{2\pi T}{\delta} \sum_\varepsilon \varepsilon \cos \theta_\varepsilon + F_K \left( \frac{\pi G_T T}{4E_C} \sum_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon, N, T \right) \right]. \quad (4.23)$$

Для этого действия будем применять метод перевала. Седловое решение находим, приравнявая вариацию по  $\theta$  нулю. В результате получаем  $\text{tg } \theta_\varepsilon = \tilde{E}_g/\varepsilon$ , где величина  $\tilde{E}_g$  подчиняется уравнению самосогласования

$$\frac{\tilde{E}_g}{E_g} = -\frac{1}{2E_C} \frac{\partial F_K}{\partial q} = \langle\langle \cos 2K \rangle\rangle. \quad (4.24)$$

Здесь  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  обозначает квантовомеханическое усреднение по состояниям гамильтониана (4.22) и термодинамическое усреднение по распределению Гиббса. Параметр  $q$ , определенный в (4.21), также выразим через  $\tilde{E}_g$

$$q = \frac{\pi E_g T}{E_C \delta} \sum_\varepsilon \frac{\tilde{E}_g}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2}}. \quad (4.25)$$

Сумма по энергиям логарифмически расходится и должна быть обрезана на  $|\varepsilon| \sim \Delta$ , поскольку действие (4.18) работает только на низких энергиях.

<sup>2</sup>В мнимом времени преобразование от лагранжиана к гамильтониану имеет вид  $H = L - \dot{x} \partial L / \partial \dot{x}$ ,  $p = -i\partial L / \partial \dot{x}$ .

Мы получили замкнутую систему из двух уравнений (4.24) и (4.25), которая определяет величины  $\tilde{E}_g$  и  $q$  и, тем самым, решает задачу о самосогласованном учете эффекта близости и кулоновского взаимодействия.

Решая систему уравнений самосогласования, можно вычислить любые наблюдаемые физические величины. В частности, термодинамическая плотность состояний определяется продолжением выражения  $\delta^{-1} \text{tr}(\tau_z \tilde{Q}_{\varepsilon\varepsilon})$  на вещественные энергии  $i\varepsilon \rightarrow E$ . Используя найденное значение  $\theta_\varepsilon$ , получаем

$$\rho(E) = \frac{2}{\delta} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \tilde{E}_g^2}}. \quad (4.26)$$

Такая энергетическая зависимость плотности состояний совпадает с результатом теории БКШ, если в качестве параметра порядка принять  $\tilde{E}_g$ . Эта плотность состояний может быть получена экспериментально из измерений теплоемкости или спектра поглощения электромагнитного излучения. Таким образом, величина  $\tilde{E}_g$  имеет смысл щели в термодинамической плотности состояний. Физический смысл параметра  $q$  также несложно установить. Если через  $E_J$  обозначить джозефсоновскую энергию воображаемого SIS контакта, который отличается от рассматриваемой нами системы тем, что нормальная гранула заменена на слабый сверхпроводник с параметром порядка  $\tilde{E}_g$ , то, сравнивая (4.25) с формулой Амбегаокара – Баратова [77], получаем  $q \sim E_J/E_C$ . То есть параметр  $q$  характеризует относительную силу конкурирующих между собой эффектов близости и кулоновской блокады. Чем меньше  $q$ , тем сильнее флуктуации фазы  $K$  и меньше щель  $\tilde{E}_g$ .

Прежде чем переходить к решению уравнений самосогласования, вернемся к вопросу о применимости использованного приближения. Как будет показано в следующем разделе, адиабатическое приближение справедливо, если  $E_C \gg \delta$ . Для проверки седлового приближения нужно сделать оценку гауссовых флуктуаций около найденного перевального решения. Это технически достаточно трудная задача, поэтому соответствующие вычисления вынесены в приложение В. Результат такой оценки состоит в том, что седловое приближение применимо, если  $\tilde{E}_g \gg \delta$ .

### 4.1.3 Термодинамическая плотность состояний

В этом разделе мы вычислим величину щели в термодинамической плотности состояний  $\tilde{E}_g$  в двух предельных случаях слабой ( $q \gg 1$ ) и сильной ( $q \ll 1$ )

кулоновской блокады. Также будет показано, что адиабатическое приближение, использованное при выводе уравнений (4.24) и (4.25), справедливо в обоих этих случаях, а значит и при произвольном значении  $q$ . В этом разделе мы считаем температуру нулевой.

### Слабая кулоновская блокада

Если флуктуации фазы, вызванные кулоновским взаимодействием, слабы, то можно решать систему уравнений (4.24) и (4.25) методом последовательных приближений. Для оценки параметра  $q$  подставляем в (4.25) значение  $\tilde{E}_g \approx E_g$  и получаем величину

$$q = \frac{E_g^2}{E_C \delta} \ln \frac{2\Delta}{E_g}, \quad (4.27)$$

которую будем предполагать большой. Условие  $q \gg 1$  позволяет приближенно считать потенциал  $\cos 2K$  в гамильтониане (4.22) параболическим, а энергию основного состояния

$$E_0 = E_C(-2q + 2\sqrt{q}). \quad (4.28)$$

Поскольку мы считаем температуру нулевой, этот уровень определяет свободную энергию фазы  $K$ , и из (4.24) получаем

$$\tilde{E}_g = E_g \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{q}} \right] = E_g - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C \delta}{\ln(2\Delta/E_g)}}. \quad (4.29)$$

При  $q \gg 1$  фаза  $K$  локализована вблизи одного из минимумов потенциала  $\cos 2K$  и испытывает лишь малые по амплитуде флуктуации. Таким образом в режиме слабой кулоновской блокады щель получается лишь немного меньше своего затравочного значения  $E_g$ .

Проверим применимость адиабатического приближения в пределе  $q \gg 1$ . Характерный энергетический масштаб матрицы  $\tilde{Q}$  определяется величиной  $\tilde{E}_g \approx E_g$ . Энергия, связанная с флуктуациями фазы  $K$ , соответствует частоте колебаний около минимума потенциала и равна  $2E_C \sqrt{q} \sim E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_g)}$ . Эта энергия гораздо больше  $E_g$ , если выполнено условие  $E_C \gg \delta$ . Таким образом справедливость адиабатического приближения подтверждается.

## Сильная кулоновская блокада

В противоположном пределе  $q \ll 1$  подавление щели должно быть сильным:  $\tilde{E}_g \ll E_g$ . Из (4.25) имеем

$$q = \frac{E_g \tilde{E}_g}{E_C \delta} \ln \frac{2\Delta}{\tilde{E}_g}. \quad (4.30)$$

Энергию основного состояния (4.22) вычисляем методом теории возмущений по малому  $q$ , результат имеет вид

$$E_0 = E_C \left[ N^2 - \frac{q^2}{2(1 - N^2)} \right]. \quad (4.31)$$

Здесь мы считаем  $|N| \leq 1/2$ , поскольку все характеристики гамильтониана (4.22) периодически зависят от  $N$  с периодом 1. Подставляя найденную энергию основного состояния в (4.24) в качестве свободной энергии, получаем уравнение самосогласования

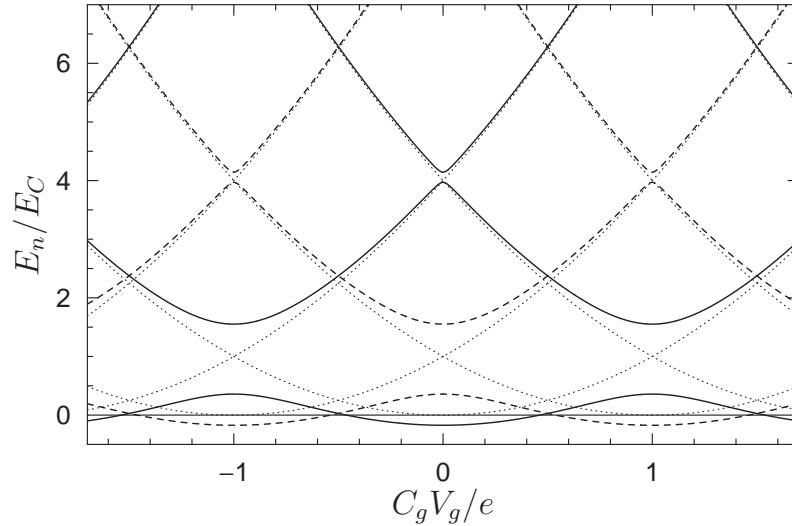
$$\frac{\tilde{E}_g}{E_g} = \frac{q}{2(1 - N^2)} = \frac{E_g \tilde{E}_g \ln(2\Delta/\tilde{E}_g)}{2(1 - N^2)E_C \delta}, \quad (4.32)$$

которое определяет величину щели

$$\tilde{E}_g = 2\Delta \exp \left[ -\frac{2E_C \delta}{E_g^2} (1 - N^2) \right]. \quad (4.33)$$

В режиме сильной кулоновской блокады щель оказалась подавленной экспоненциально сильно. Причем зависимость величины щели от параметров имеет вид, характерный для теории БКШ, если в роли константы связи выступает  $E_g^2/[2E_C \delta(1 - N^2)]$ . Качественно такой результат можно объяснить следующим образом. Электроны совершают диффузное движение внутри нормальной гранулы и испытывают андреевское отражение на границе со сверхпроводником. После двух последовательных андреевских отражений траектория замыкается, однако это не приводит к образованию андреевского состояния, так как при каждом отражении приобретает дополнительную фазу, величина которой сильно флуктуирует во времени. Тем не менее, если два разных электрона испытывают андреевское отражение в близкие моменты времени, они приобретают одинаковую фазу, то есть обмениваются виртуальным “фазоном”, который является короткоживущей частицей. Посредством обмена таким фазоном и возникает эффективное куперовское притяжение.

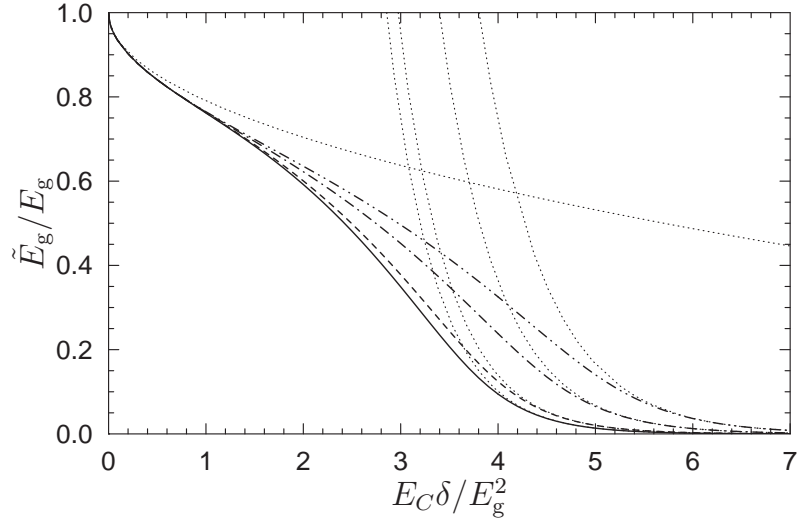
Из формулы (4.33) следует, что величина щели увеличивается с ростом напряжения на затворе. Этот эффект также легко объяснить качественно. Для



**Рис. 4.2.** Спектр гамильтониана (4.22) при  $q = 0.6$ . Сплошными линиями изображена зависимость энергии состояний с четным числом электронов от потенциала затвора. Пунктирные линии отвечают состояниям с нечетным числом электронов. Точечные линии соответствуют пределу  $q = 0$ . В точках пересечения уровней с одинаковой четностью вырождение снимается за счет члена с  $q$ , в то время как пересечения уровней с различной четностью сохраняются.

этого рассмотрим гамильтониан (4.22) в представлении заряда, а не фазы, как это уже делалось в разделе 4.1.2. Если пренебречь слагаемым, пропорциональным  $q$ , то основное состояние обладает нулевым зарядом (см. Рис. 4.2). Эффект близости устанавливается за счет андreeвских процессов, которые изменяют число электронов в грануле на два; эти процессы описываются членом с  $q$ . Состояния с зарядом  $\pm 2e$  обладают энергией  $4E_C$ . По мере увеличения  $N$  энергия основного состояния растет по закону  $E_C N^2$ , а пара возбужденных состояний с зарядом  $\pm 2e$  расщепляется в  $E_C(N \pm 2)^2$ . Таким образом разница энергий между основным состоянием и наинизшим состоянием, в которое система может перейти, уменьшается, и кулоновская блокада ослабляется, что приводит к увеличению  $\tilde{E}_g$ . Когда  $N$  становится больше  $1/2$ , основное состояние изменяется — теперь оно соответствует заряду гранулы  $e$ . При этом минимальная щель, которую нужно преодолеть, чтобы изменить заряд гранулы на  $2e$ , определяется разностью энергий между новым основным состоянием и состоянием с зарядом  $-e$ . Эта щель увеличивается с ростом  $N$  выше  $1/2$ , и  $\tilde{E}_g$  начинает убывать. На Рис. 4.2 изображен спектр состояний гамильтониана в пределе малого  $q$ .

Для проверки применимости адиабатического приближения нужно сравнить характерную энергию флуктуаций  $K$ , которая, в данном случае, равна  $E_C$ , с

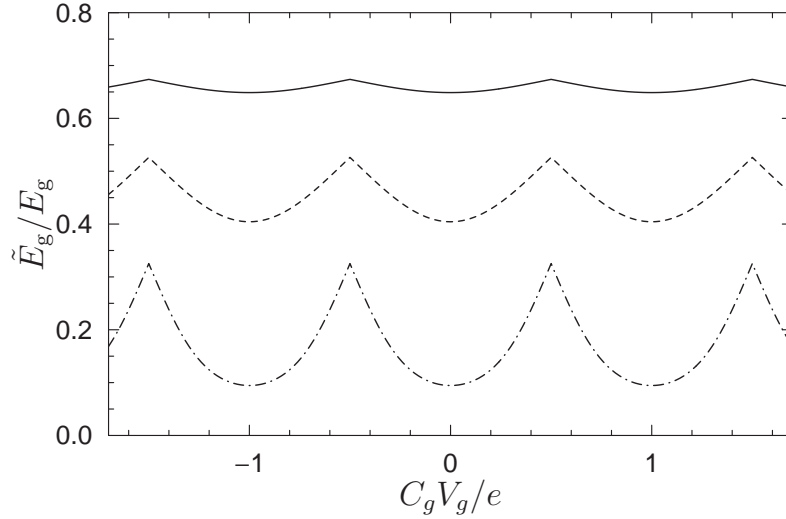


**Рис. 4.3.** Зависимость щели  $\tilde{E}_g$  в плотности состояний от величины зарядовой энергии  $E_C$ . Сплошная линия отвечает нулевому потенциалу на затворе, пунктирная линия соответствует  $N = 0.2$ , штрихпунктирная —  $N = 0.4$ , штрихштрихпунктирная —  $N = 0.5$ . По мере увеличения потенциала затвора кулоновские эффекты ослабляются и эффект близости подавляется меньше. Кривые построены для  $\Delta/E_g = 150$ . Точечные линии соответствуют асимптотическим выражениям (4.29) и (4.33).

величиной щели  $\tilde{E}_g$ . Для этого заметим, что в пределе слабой кулоновской блокады необходимое неравенство выполняется вплоть до значений  $q \sim 1$ , значит оно выполнено и в режиме сильной блокады при приближении  $q$  к 1 снизу. С другой стороны, по мере увеличения  $E_C$  (и, соответственно, уменьшения  $q$ ) энергия флуктуаций  $K$  растет, в то время как величина щели  $\tilde{E}_g$  убывает. Поэтому неравенство  $E_C \gg \tilde{E}_g$  оказывается выполненным во всей области  $q \ll 1$ , а значит и при любых  $q$ . Однако, с уменьшением щели  $\tilde{E}_g$  ниже  $\delta$ , становится неприменимым седловое приближение, использованное при выводе уравнения (4.24), как показано в приложении В.

### Общий случай

При произвольном значении  $q$  спектр гамильтониана определяется характеристическими значениями Матье [78]. Для основного состояния  $E_0 = E_C a_N(q)$ , если считать  $|N| \leq 1/2$ . Используя эту функцию, можно численно решить систему уравнений (4.24), (4.25) и построить зависимость  $\tilde{E}_g(E_C)$ , которая изображена на Рис. 4.3. Также можно получить зависимость щели от напряжения на затворе, которая изображена на Рис. 4.4.



**Рис. 4.4.** Зависимость щели  $\tilde{E}_g$  в плотности состояний от потенциала затвора. Сплошная линия соответствует  $E_C \delta/E_g^2 = 1.7$ , пунктирная —  $E_C \delta/E_g^2 = 2.8$ , штрихпунктирная —  $E_C \delta/E_g^2 = 4.0$ . Кривые построены для  $\Delta/E_g = 150$ .

#### 4.1.4 Туннельная плотность состояний

Измерение термодинамической плотности состояний по теплоемкости или спектру поглощения системы сильно затруднено для мезоскопических образцов из-за их малых размеров. На практике обычно измеряется туннельная, а не термодинамическая, плотность состояний, что относительно легко делается с помощью туннельного микроскопа. При этом реально измеряется зависимость туннельного тока от напряжения, приложенного между иглой микроскопа и изучаемым образцом. Вычисленная по этой зависимости дифференциальная проводимость  $dI/dV$  пропорциональна локальной *туннельной* плотности состояний, которая определяется функцией Грина в совпадающих точках по формуле (1.11). В системах без взаимодействия туннельная и термодинамическая плотности состояний совпадают, поэтому, когда рассматривалась задача о квазилокализованных состояниях в пренебрежении взаимодействием, можно было не заботиться о том, какая именно плотность состояний вычисляется. Если же в системе есть взаимодействие, то туннельная плотность состояний выражается через точную функцию Грина, “одетую” взаимодействием, и не совпадает с термодинамической.

Если между квазичастицами есть отталкивание, то оно препятствует туннелированию и приводит к эффекту нулевой аномалии в туннельной плотности состояний [52]. В двумерной пленке нормального металла кулоновское взаимо-

действие вызывает логарифмическое подавление туннельной плотности состояний около энергии Ферми [52, 53]. Взаимовлияние эффекта близости и нулевой аномалии в случае, когда пленка соединена со сверхпроводником, изучалось Орегом и др. [57] в рамках метода ренормгруппы [58]. Результатом такого подхода оказалось степенное подавление щели за счет кулоновского взаимодействия. При определенном критическом значении константы взаимодействия щель полностью исчезает.

В нульмерном пределе эффект туннельной аномалии проявляется в виде кулоновской блокады [51]. Если нормальная гранула соединена с *нормальным* резервуаром контактом с малым безразмерным кондактансом, то время ухода электрона в резервуар велико. Это приводит к тому, что электрон не может туннелировать в гранулу, имея энергию меньше  $E_C$ , поэтому в туннельной плотности состояний образуется кулоновская щель [51]. По мере увеличения кондактанса между гранулой и резервуаром эта щель размывается и эффект становится экспоненциально слабым при  $G_T \gg 1$  [79]. По другому эту ситуацию можно описать в терминах экранирования кулоновского взаимодействия за счет электронов из резервуара: чем больше  $G_T$ , тем это экранирование сильнее. В рассматриваемой нами системе кондактанс контакта большой, но резервуар находится в *сверхпроводящем* состоянии, поэтому квазичастица с энергией меньше  $\Delta$  не может уйти из гранулы, и кулоновская щель восстанавливается [56]. Попав в гранулу, электрон “ждет”, пока протуннелирует следующий электрон, и они смогут, образовав куперовскую пару, уйти в резервуар. Другими словами, в сверхпроводнике нет квазичастиц малой энергии, и кулоновское взаимодействие не экранируется даже при большом кондактансе контакта.

Эффект кулоновской блокады конкурирует с эффектом близости: взаимодействие, с одной стороны, подавляет эффект близости и наведенную им щель, а с другой стороны, приводит к образованию кулоновской щели. В рамках самосогласованного подхода можно учесть оба явления. Туннельная плотность состояний определяется выражением

$$\rho^{\text{tun}}(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \langle \text{tr}[\tau_z Q_{\varepsilon\varepsilon}^{aa}] \rangle = \frac{1}{\delta} \int d\tau e^{i\varepsilon\tau} \text{tr} \left\langle \tau_z e^{i\tau_z K_\tau^a} \tilde{Q}_{\tau,0}^{aa} e^{-i\tau_z K_0^a} \right\rangle. \quad (4.34)$$

Здесь угловые скобки подразумевают гауссово усреднение с весом, определяемым действием  $\sigma$ -модели. Адиабатическое приближение позволяет усреднять флуктуации  $K$  по основному состоянию (как и в предыдущем разделе, считаем температуру нулевой) гамильтониана (4.22), а седловое приближение — сделать замену  $\tilde{Q} \rightarrow \underline{Q}$ .

При усреднении по фазе  $K$  возникает коррелятор вида

$$C(\tau) = \langle \cos(K_\tau - K_0) \rangle = \sum_n P_n e^{-(E_n - E_0)|\tau|}, \quad (4.35)$$

$$\text{где } P_n = |\langle 0 | \cos K | n \rangle|^2 + |\langle 0 | \sin K | n \rangle|^2. \quad (4.36)$$

Здесь мы используем обозначения  $E_n$  и  $|n\rangle$  для уровней энергии и собственных состояний гамильтониана (4.22). В частотном представлении коррелятор (4.35) имеет вид

$$C(\omega) = \sum_n P_n \frac{2(E_n - E_0)}{(E_n - E_0)^2 + \omega^2}. \quad (4.37)$$

В итоге туннельная плотность состояний в мацубаровском представлении определяется сверткой термодинамической плотности состояний с коррелятором фаз  $C(\omega)$ , которая соответствует “одеванию” функции Грина,

$$\rho^{\text{tun}}(\varepsilon) = \frac{2}{\delta} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(\varepsilon - \omega)C(\omega)}{\sqrt{(\varepsilon - \omega)^2 + \tilde{E}_g^2}}. \quad (4.38)$$

Вычисляя этот интеграл и выполняя аналитическое продолжение на действительные энергии  $i\varepsilon \rightarrow E$ , получаем результат для туннельной плотности состояний

$$\rho^{\text{tun}}(E) = \frac{2}{\delta} \sum_n P_n \frac{x_n \theta(|x_n| - \tilde{E}_g)}{\sqrt{x_n^2 - \tilde{E}_g^2}}, \quad \text{где } x_n = |E| - (E_n - E_0). \quad (4.39)$$

Туннельная плотность состояний симметрична относительно замены  $E \rightarrow -E$ , а каждый член суммы (4.39) имеет такой же вид, как термодинамическая плотность состояний, умноженная на коэффициент  $P_n$  и сдвинутая по энергии на  $E_n - E_0$ .

В представлении заряда операторы  $\cos K$  и  $\sin K$  обладают матричными элементами, изменяющими число электронов в грануле на единицу, а гамильтониан (4.22) коммутирует с оператором четности числа электронов, действие которого сводится к сдвигу  $\hat{P}\psi(K) = \psi(K + \pi)$ . Поэтому коэффициенты  $P_n$  отличны от нуля только для таких  $n$ , которые соответствуют состояниям с нечетным числом электронов (см. Рис. 4.2). Это состояния вида  $|4k + 1\rangle$  и  $|4k + 2\rangle$ . Щель в туннельной плотности состояний определяется первым членом суммы (4.39) с  $n = 1$ .

$$E_g^{\text{tun}} = \tilde{E}_g + E_1 - E_0. \quad (4.40)$$

Таким образом, в величину щели существует два вклада:  $\tilde{E}_g$  соответствует эффекту близости в системе, подавленному за счет кулоновского взаимодействия,

а слагаемое  $E_1 - E_0$  описывает нулевую аномалию, оно отличает туннельную щель от термодинамической. Остальные члены суммы (4.39) связаны с процессами более высокого порядка, они отвечают ситуации, когда энергия настолько велика, что в грануле может одновременно находиться более одного дополнительного электрона. Амплитуды этих вкладов убывают с ростом  $n$ , причем легко убедиться, что сумма матричных элементов, входящих в (4.39), равна 1:

$$\sum_n P_n = \sum_n \left[ \langle 0 | \cos K | n \rangle \langle n | \cos K | 0 \rangle + \langle 0 | \sin K | n \rangle \langle n | \sin K | 0 \rangle \right] = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (4.41)$$

Значит при больших  $E$  туннельная плотность состояний стремится к  $2/\delta$ , совпадая с термодинамической.

Как и для термодинамической плотности состояний, свойства выражений (4.39) и (4.40) можно более подробно изучить аналитически в двух предельных случаях слабой и сильной кулоновской блокады и численно — при произвольном  $q$ .

### Слабая кулоновская блокада

Кулоновские эффекты слабы в пределе  $q \gg 1$ . Будем изучать свойства гамильтониана (4.22), используя приближение сильной связи: фаза  $K$  локализована около одного из двух минимумов потенциала  $\cos 2K$ , между которыми есть экспоненциально малая амплитуда перехода. За счет этой амплитуды дважды вырожденное основное состояние

$$E_0 \approx E_1 \approx (-2q + 2\sqrt{q})E_C \quad (4.42)$$

экспоненциально слабо расщепляется. Мы, однако, будем этим расщеплением пренебрегать, что приводит к равенству  $E_g^{\text{tun}} = \tilde{E}_g$ ; эта щель определяется выражением (4.29). Энергия следующего возбужденного состояния соответствует второму уровню в параболическом потенциале

$$E_2 = (-2q + 6\sqrt{q})E_C. \quad (4.43)$$

Малое, в пределе больших  $q$ , отличие туннельной плотности состояний от термодинамической определяется вторым членом суммы (4.39). Для вычисления коэффициентов  $P_1$  и  $P_2$  можно использовать волновые функции в приближении параболического потенциала. Тогда из (4.36) в главном порядке по  $1/\sqrt{q}$  имеем

$$P_1 \approx 1 - \frac{1}{4\sqrt{q}}, \quad P_2 \approx \frac{1}{4\sqrt{q}}. \quad (4.44)$$

В итоге получаем туннельную плотность состояний в виде двух слагаемых, одно из которых совпадает с термодинамической плотностью состояний, умноженной на коэффициент  $P_1 \approx 1$ , а второе мало по параметру  $P_2 \sim 1/\sqrt{q}$ :

$$\rho^{\text{tun}}(E) = \frac{2}{\delta} \left[ \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{q}}\right) \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \tilde{E}_g^2}} + \frac{1}{4\sqrt{q}} \frac{(|E| - 4\sqrt{q}E_C)\theta(|E| - 4\sqrt{q}E_C - \tilde{E}_g)}{\sqrt{(|E| - 4\sqrt{q}E_C)^2 - \tilde{E}_g^2}} \right]. \quad (4.45)$$

В этом приближении туннельная плотность состояний оказывается не зависящей от напряжения на затворе. Влияние потенциала  $V_g$  проявляется в экспоненциально малых поправках, которыми мы пренебрегли. В противоположном пределе сильного кулоновского взаимодействия, к рассмотрению которого мы переходим, все физические величины будут существенно зависеть от  $V_g$ .

### Сильная кулоновская блокада

В режиме  $q \ll 1$ , как и раньше, будем пользоваться теорией возмущений по  $q$  и считать  $|N| \leq 1/2$ . Энергия основного состояния уже вычислялась в предыдущем разделе; для нее было получено выражение (4.31). Для пары возбужденных состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  вычисление технически гораздо сложнее, потому что при  $N = 0$  уровни пересекаются. Требуется делать правильный выбор волновых функций нулевого приближения, которые также оказываются зависящими от  $q$  и от  $N$ . В итоге для энергии двух низших возбужденных состояний с точностью до второго порядка по  $q$  получаем

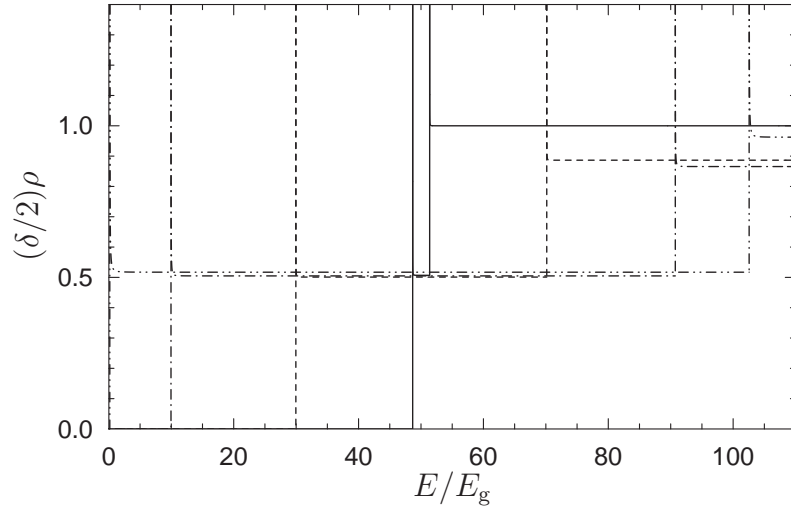
$$E_{1,2} = E_C \left( 1 + N^2 \mp \sqrt{q^2 + 4N^2} - \frac{q^2}{8 \mp 4|N|} \right). \quad (4.46)$$

Таким образом щель в туннельной плотности состояний оказывается сильно зависящей от напряжения на затворе и выражается в виде

$$E_g^{\text{tun}} \approx E_1 - E_0 = E_C \left[ 1 - \sqrt{q^2 + 4N^2} - \frac{(3 - 2|N| + N^2)q^2}{4(2 - |N|)(1 - N^2)} \right]. \quad (4.47)$$

Здесь мы пренебрегли экспоненциально малой величиной  $\tilde{E}_g$ , которая дается формулой (4.33).

Коэффициенты  $P_{1,2}$ , входящие в (4.39), в нулевом порядке определяются невозмущенными волновыми функциями и имеют значения  $P_1 \approx P_2 \approx 1/2$ .



**Рис. 4.5.** Туннельная плотность состояний для случая сильной кулоновской блокады  $q \ll 1$  при различных потенциалах затвора. Кривые построены для  $E_C \delta / E_g^2 = 5.0$ ,  $\Delta / E_g = 150$  и  $G_T = 40$ . Сплошная линия иллюстрирует случай  $N = 0$ , при этом  $q = 0.027$ ; пунктирная линия —  $N = 0.2$  ( $q = 0.039$ ); штрихпунктирная —  $N = 0.4$  ( $q = 0.110$ ); штрихштрихпунктирная линия —  $N = 0.5$  ( $q = 0.215$ ). Корневые сингулярности на границах ступеней оказываются очень узкими, поскольку  $\tilde{E}_g \ll E_C$ . При  $N = 0.5$  щель в туннельной плотности состояний совпадает с термодинамической щелью.

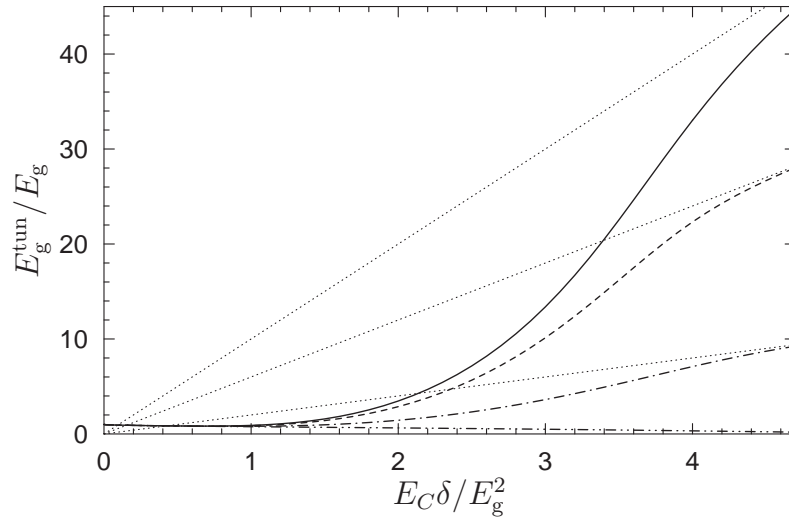
Более точные выражения можно получить, используя для волновых функций второй порядок теории возмущений

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{16 \mp |N| + N^2}{16(2 \mp |N|)^2(1 \pm |N|)(1 - N^2)} \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + 4N^2}}. \quad (4.48)$$

Следующие члены разложения имеют второй порядок по  $q$  при  $N = 0$  и четвертый порядок при ненулевом  $N$ .

Таким образом, в режиме  $q \ll 1$  туннельная плотность состояний представляет собой “двухступенчатую” функцию энергии, причем высота ступеней приблизительно одинакова и составляет  $\delta^{-1}$ , а их положение сильно зависит от величины напряжения на затворе: первая ступень появляется на энергии  $E = E_g^{\text{tun}} \approx E_1 - E_0$ , а вторая — при  $E = E_2 - E_0$ . Зависимость туннельной плотности состояний от энергии при различных потенциалах затвора приведена на Рис. 4.5.

Отметим, что при  $N = 1/2$  щель в туннельной плотности состояний совпадает с термодинамической щелью  $\tilde{E}_g$ . Это верно при любой величине параметра  $q$ , поскольку в этой точке происходит точное вырождение уровней  $E_0 = E_1$ .

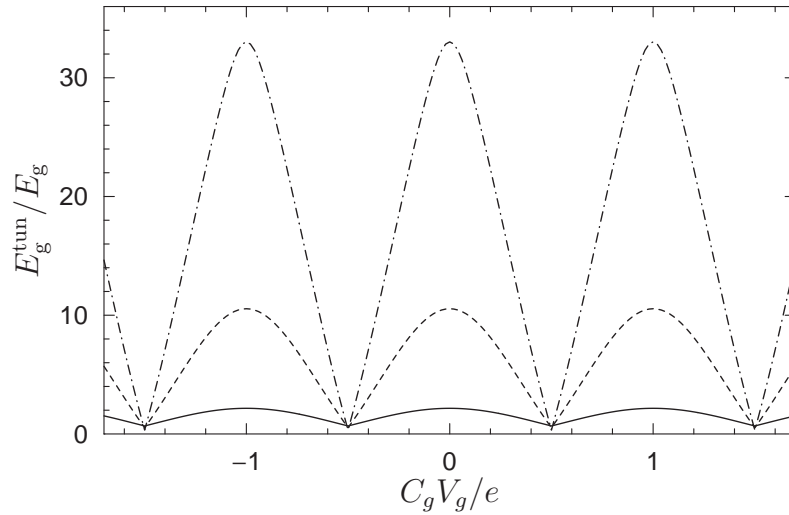


**Рис. 4.6.** Зависимость щели в туннельной плотности состояний  $E_g^{\text{tun}}$  (формула (4.40)) от зарядовой энергии  $E_C$ . В области слабой кулоновской блокады (малые  $E_C$ ) туннельная щель совпадает с термодинамической (4.29). В противоположном пределе зависимость асимптотически приближается к линейной функции (4.47), которая обозначена точечными линиями. Кривые построены для  $\Delta/E_g = 150$  и  $G_T = 40$ . Сплошная линия соответствует нулевому потенциалу затвора, пунктирная линия —  $N = 0.2$ , штрихпунктирная —  $N = 0.4$ , штрихштрихпунктирная линия —  $N = 0.5$ . В последнем случае туннельная щель совпадает с термодинамической, изображенной штрихштрихпунктирной кривой на Рис. 4.3.

Такое вырождение не снимается по теории возмущений, так как два нижних уровня обладают разной четностью числа электронов в грануле, однако сами термодинамическая и туннельная плотности состояний в точке  $N = 1/2$  не совпадают.

### Общий случай

В общем случае произвольного значения  $q$  можно вычислять энергетические уровни гамильтониана (4.22) и матричные элементы численно, используя функции Матье. Зависимость щели в туннельной плотности состояний от величины зарядовой энергии приведена на Рис. 4.6. Эта зависимость интерполирует между величиной  $E_g^{\text{tun}} \approx \tilde{E}_g$  в пределе слабого взаимодействия (формула (4.29)), и зависимостью (4.47), которая справедлива в пределе сильного взаимодействия. Как уже отмечалось выше, с ростом  $N$  щель в туннельной плотности состояний уменьшается и при  $N = 1/2$  становится равной  $\tilde{E}_g$  для всех значений  $q$ . Величина туннельной щели как функция потенциала затвора изображена на



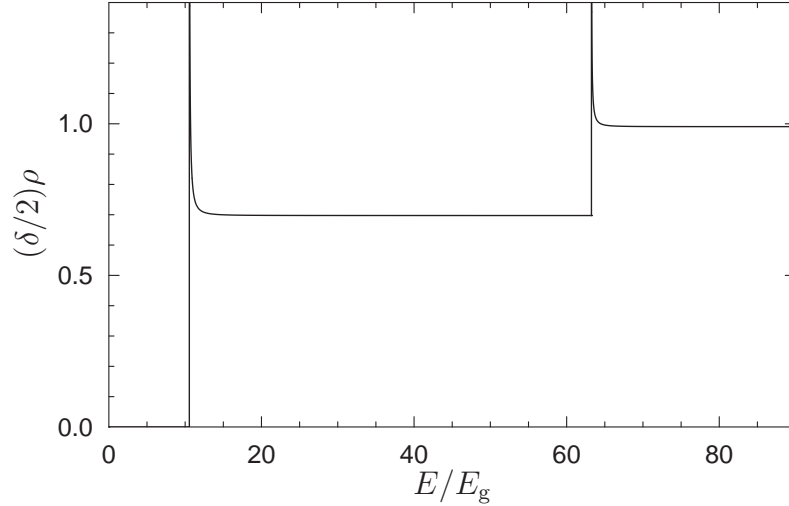
**Рис. 4.7.** Щель в туннельной плотности состояний как функция потенциала затвора. Расчет сделан для  $\Delta/E_g = 150$  и  $G_T = 40$ . Три кривые построены для тех же значений  $E_C$ , что и на Рис. 4.4.

Рис. 4.7

Для определения энергетической зависимости туннельной плотности состояний нужно вычислить коэффициенты  $P_n$ , что также можно сделать численно с помощью функций Матье. Оказывается, что значения  $P_n$  достаточно быстро убывают с ростом  $n$ , поэтому можно ограничиться двумя первыми слагаемыми, как уже делалось при рассмотрении обоих предельных случаев малого и большого  $q$ . Плотность состояний при этом также оказывается “двухступенчатой” функцией энергии, хотя высота и положение этих ступеней неуниверсальны. Пример такой зависимости для  $q = 0.95$  и  $N = 0$  приведен на Рис. 4.8.

#### 4.1.5 Квантование заряда

Еще одно проявление кулоновских эффектов в мезоскопических гранулах состоит в приблизительном квантовании заряда [56]. Взаимодействие препятствует изменению заряда гранулы  $Q$  и приводит к тому, что количество электронов, не смотря на наличие резервуара, оказывается до некоторой степени сохраняющейся величиной: чем больше зарядовая энергия, тем сильнее флуктуации фазы гранулы и слабее флуктуации количества электронов. В реальных экспериментах, вместо измерения заряда гранулы, обычно измеряется заряд на электроде затвора  $Q_g$ , что легко сделать, интегрируя протекающий к затвору ток, а заряд на грануле затем вычисляется из электростатического соотноше-



**Рис. 4.8.** Туннельная плотность состояний для  $E_C\delta/E_g^2 = 2.8$ ,  $\Delta/E_g = 150$ ,  $G_T = 40$ ,  $V_g = 0$ . Такие значения параметров приводят к  $q = 0.95$ . Туннельная плотность состояний имеет “двухступенчатую” форму, причем высота и положение ступеней неуниверсальны.

ния

$$\mathcal{Q} = -\frac{C_0}{C_g} \mathcal{Q}_g. \quad (4.49)$$

Теоретически также удобно вычислять заряд на затворе, а не на грануле. Для этого достаточно продифференцировать свободную энергию  $\mathcal{F}$  системы по потенциалу  $V_g$ . Из вида гамильтониана (4.2) легко получить выражение заряда гранулы через такую производную, которое полностью соответствует приведенному выше соотношению (4.49)

$$\mathcal{Q} = -\frac{C_0}{C_g} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V_g}. \quad (4.50)$$

Используемый нами метод реплик позволяет непосредственно вычислить величину свободной энергии [40]. Для этого нужно совершить предельный переход  $M \rightarrow 0$  и определить средний логарифм статсуммы по формуле

$$\langle \ln \mathcal{Z} \rangle = \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{Z}^M \rangle - 1}{M}. \quad (4.51)$$

Усреднение, как и раньше, предполагает гауссово интегрирование с весом, определяемым действием  $\sigma$ -модели. Выше было показано, что адиабатическое приближение позволяет проинтегрировать по фазе  $K$  и получить действие вида (4.23), которое представляет собой сумму по репликам и интеграл по мнимому времени от выражения, не зависящего ни от  $a$ , ни от  $\tau$ . Таким образом можно

непосредственно из (4.23) получить свободную энергию в виде

$$\mathcal{F}(\tilde{E}_g, N, T) = -\frac{e^2 N^2}{2C_0} + F_e(\tilde{E}_g, T) + F_K \left( \frac{\pi E_g T}{E_C \delta} \sum_{\varepsilon} \frac{\tilde{E}_g}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2}}, N, T \right). \quad (4.52)$$

Здесь введено обозначение для свободной энергии электронной подсистемы

$$F_e(\tilde{E}_g, T) = -\frac{2\pi T}{\delta} \sum_{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2}}. \quad (4.53)$$

Отметим, что первое слагаемое в (4.52) не позволяет, как прежде, ограничиться интервалом  $|N| \leq 1/2$ . До конца этого раздела будем считать величину  $N$  произвольной.

Очевидно, что такой же результат (4.52) дает и применение формулы (4.51). Таким образом, использованное нами седловое приближение соответствует приближению среднего поля по параметру  $\tilde{E}_g$ , а уравнение самосогласования (4.24) легко воспроизводится в виде соотношения на величину среднего поля

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{E}_g} = 0. \quad (4.54)$$

Применяя выражение свободной энергии (4.52) для вычисления среднего заряда и учитывая условие самосогласования (4.54), приходим к результату

$$\mathcal{Q} = -\frac{C_0}{e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} = eN - \frac{C_0}{e} \frac{\partial F_K}{\partial N}, \quad (4.55)$$

который выражает заряд гранулы через свободную энергию  $F_K$  для фазы  $K$ . Дальше в этом разделе мы будем считать температуру нулевой и использовать энергию основного состояния  $E_0$  гамильтониана (4.22) в качестве  $F_K$ . Как это уже неоднократно делалось в предыдущих разделах, проанализируем полученное выражение (4.55) в двух предельных случаях сильной и слабой кулоновской блокады.

### Слабая кулоновская блокада

В режиме слабой кулоновской блокады  $q \gg 1$  энергию основного состояний гамильтониана (4.22) можно вычислять, пользуясь приближением параболического потенциала для члена  $\cos 2K$ . Однако для нахождения зависимости этой энергии от  $N$  нужно учесть экспоненциально малую амплитуду туннелирования между двумя минимумами косинуса. Применяя квазиклассическое приближение для вычисления этой амплитуды, получаем [80]

$$E_0(N) = \text{const} - 16E_C \sqrt{2/\pi} q^{3/4} e^{-4\sqrt{q}} |\cos \pi N|. \quad (4.56)$$

Теперь зависимость среднего заряда гранулы от потенциала затвора легко установить, применяя выражение (4.55),

$$\mathcal{Q}/e = N - (C_0/C)8\sqrt{2\pi}q^{3/4}e^{-4\sqrt{q}}\operatorname{sgn}(\cos \pi N)\sin \pi N. \quad (4.57)$$

Эта зависимость отличается от линейного закона  $\mathcal{Q} = eN$ , который имел бы место в отсутствие кулоновского взаимодействия, экспоненциально малой модуляцией. Квантование заряда оказывается слабым, поскольку зарядовые эффекты практически не препятствуют переходу куперовских пар между сверхпроводящим резервуаром и гранулой. Величина среднего заряда гранулы испытывает скачки при полуцелых значениях  $N$ . Это связано с тем, что перенос заряда в рассматриваемой системе осуществляется парами электронов. Такая особенность зависимости среднего заряда от  $N$  сохраняется при любой величине параметра  $q$ .

### Сильная кулоновская блокада

В противоположном пределе  $q \ll 1$  для гамильтониана (4.22) применима теория возмущений по  $q$ . Энергия основного состояния уже вычислялась в разделе 4.1.3. Подставляя полученное там выражение (4.31) в формулу (4.55) в качестве свободной энергии  $F_K$ , приходим к результату

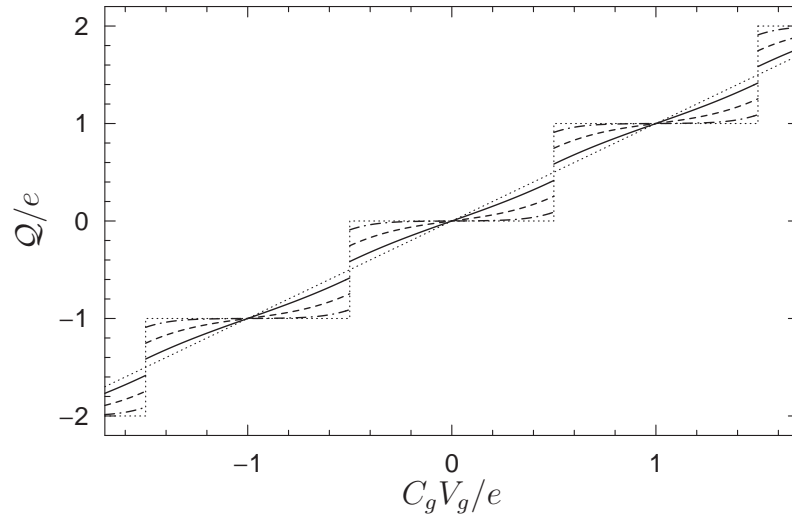
$$\frac{\mathcal{Q}}{e} = \left[1 - \frac{C_0}{C}\right]N + \frac{C_0 N q^2}{2C(1 - N^2)^2}. \quad (4.58)$$

Эта формула справедлива при  $|N| \leq 1/2$ . Для произвольного значения  $N$  заряд можно вычислить, подставляя в нее значение, приведенное к интервалу  $[-1/2, 1/2]$ , а затем прибавляя округленную величину  $N$  (см. Рис. 4.9).

Первый член выражения (4.58) был получен Матвеевым и Глазманом Глазманом [56] в пренебрежении эффектом близости. Этот член обращается в ноль благодаря перенормировке емкости контакта за счет процессов туннелирования виртуальных квазичастиц (4.17). Второе слагаемое описывает вклад эффекта близости, который сильно подавлен в пределе  $q \ll 1$ . Зависимость среднего заряда от потенциала затвора имеет ступенчатый вид: величина  $\mathcal{Q}$  испытывает скачки при полуцелых значениях  $N$ .

### Общий случай

В случае произвольного  $q$  можно использовать характеристическое значение Матве для вычисления энергии основного состояния гамильтониана (4.22). Это



**Рис. 4.9.** Зависимость среднего заряда нормальной гранулы от величины потенциала затвора. Кривые построены для тех же параметров, что и на Рис. 4.4 и 4.7. Кроме того, предполагается, что  $C = C_0$ . Такое предположение оправдано в случае, когда емкость  $C_g$  велика. Точечные линии отвечают пределам  $q = 0$  (точное квантование) и  $q \rightarrow \infty$  (отсутствие квантования). При полуцелых значениях  $N$  величина среднего заряда испытывает скачки.

позволяет численно рассчитать зависимость среднего заряда гранулы от потенциала затвора и продемонстрировать переход между режимами слабой и сильной кулоновской блокады (Рис. 4.9).

#### 4.1.6 Температурные эффекты

В предыдущих разделах этой главы на основе метода динамической нелинейной  $\sigma$ -модели в мацубаровском представлении была построена самосогласованная теория, учитывающая эффект близости и кулоновское взаимодействие в контакте нормальной гранулы со сверхпроводящим резервуаром. В рамках этой теории можно изучить зависимость различных физических характеристик системы от температуры. Очевидно, что с ростом температуры происходит подавление щели, наведенной эффектом близости в нормальном металле, а при температурах выше определенного критического значения  $T_c$  эта щель должна обращаться в ноль. В системе без взаимодействия наведенная в нормальном металле щель обращается в ноль одновременно с подавлением сверхпроводимости в резервуаре при критической температуре сверхпроводника. Как будет показано в этом разделе, присутствие кулоновского взаимодействия при-

водит к тому, что критическая температура для наведенной щели оказывается гораздо меньше. Это позволяет пренебречь влиянием конечной температуры на сверхпроводящий резервуар. Такое приближение будет справедливо, если вклад в кондактанс от надщелевых квазичастиц сверхпроводника окажется мал:  $G_{qp} \propto Ge^{-\Delta/T} \ll 1$ . Это приводит к ограничению на температуру  $T \ll \Delta/\ln G$ . Однако следует иметь в виду, что процессы переноса квазичастиц сверхпроводника играют существенную роль для установления термодинамического равновесия в системе. В частности, они обеспечивают выполнение принципа равномерного распределения для состояний гамильтониана (4.22), отвечающих различной четности числа электронов.

В общем случае произвольной температуры вычисления трудно проделать аналитически, однако при температурах около критической допустимо существенное упрощение, связанное с применением теории Гинзбурга – Ландау. Как уже отмечалось выше, использованное нами сочетание адиабатического и седлового приближения приводит к эффективной теории среднего поля со свободной энергией (4.52). Эта свободная энергия зависит от величины щели  $\tilde{E}_g$ , которая имеет смысл параметра порядка. В таком подходе уравнение самосогласования (4.24) получается из условия минимизации свободной энергии (4.54). Разлагая функционал (4.52) по степеням  $\tilde{E}_g$ , можно определить величину критической температуры, приравнявая нулю коэффициент при  $\tilde{E}_g^2$ . Оказывается, что обращение щели в ноль с ростом температуры имеет вид фазового перехода второго рода. Для проверки этого утверждения достаточно вычислить следующий член разложения свободной энергии по степеням  $\tilde{E}_g$  и убедиться, что он положителен около критической температуры. Соответствующее вычисление проделано в приложении Г.

В пределе  $\tilde{E}_g \ll T$  сумма (4.25), определяющая значение параметра  $q$ , легко вычисляется

$$q = \frac{E_g \tilde{E}_g}{E_C \delta} \ln \frac{2\gamma \Delta}{\pi T}. \quad (4.59)$$

Здесь  $\ln \gamma = 0.577$  — постоянная Эйлера. Таким образом,  $q$  обращается в ноль одновременно с  $\tilde{E}_g$ . Чтобы разложить по степеням  $q$  свободную энергию  $F_K$ , используем термодинамической теорией возмущений для гамильтониана (4.22). Будем считать  $N \neq 0$ ; это позволит нам избежать сложностей, связанных с возможными пересечениями уровней. В нулевом порядке по  $q$  собственные состояния удобно нумеровать целым числом  $m$ , соответствующим количеству электронов в грануле. Волновые функции этих состояний и уровни энергии имеют

вид

$$\psi_m^{(0)} = \frac{e^{imK}}{\sqrt{2\pi}}, \quad E_m^{(0)} = E_C(m+N)^2. \quad (4.60)$$

Поправка второго порядка теории возмущений по малому  $q$  к этим уровням легко вычисляется и принимает вид

$$E_m^{(2)} = \frac{E_C q^2}{2[(m+N)^2 - 1]}. \quad (4.61)$$

Чтобы вычислить поправку к свободной энергии, нужно усреднить  $E^{(2)}$  по распределению Гиббса с весами, определенными невозмущенными уровням энергии. Таким образом получаем выражение

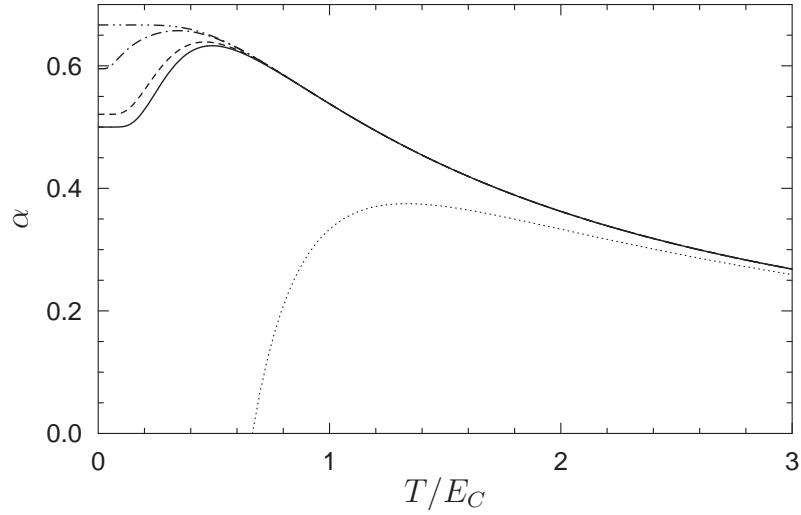
$$F_K^{(2)}(q, N, T) = -E_C \alpha(N, T) q^2, \quad (4.62)$$

$$\text{где} \quad \alpha(N, T) = \frac{\sum_m [1 - (m+N)^2]^{-1} e^{-(m+N)^2 E_C/T}}{2 \sum_m e^{-(m+N)^2 E_C/T}}. \quad (4.63)$$

Введенная здесь функция  $\alpha(N, T)$  описывает “чувствительность” энергии фазы  $K$  к возмущению  $q$ . Зависимость этой функции от температуры изображена на Рис. 4.10. Как будет установлено ниже, немонотонное поведение  $\alpha(N, T)$  с температурой приводит к необычным физическим явлениям: вместо одной критической температуры  $T_c$  возможно появление трех точек перехода, когда с повышением температуры щель исчезает, а затем снова появляется и лишь затем подавляется окончательно. Качественно немонотонную зависимость  $\alpha(N, T)$  можно объяснить следующим образом. При высоких температурах  $T \gg E_C$  система с заметной вероятностью находится в сильно возбужденных состояниях гамильтониана (4.22), которые нечувствительны к возмущению  $q$ , поэтому функция  $\alpha(N, T)$  убывает при высоких температурах до нуля. С другой стороны, если температура мала, система с подавляющей вероятностью находится в основном состоянии. Два низших возбужденных уровня смешиваются за счет возмущения, и поэтому обладают более сильной зависимостью от  $q$ , чем основное состояние. С ростом температуры статистический вес этих низколежащих возбуждений возрастает, что приводит к более сильной зависимости свободной энергии от  $q$  и, соответственно, увеличению  $\alpha(N, T)$ .

В двух предельных случаях большой и малой температуры сравнительно легко найти асимптотическое поведение  $\alpha(N, T)$ :

$$\alpha(N, T) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-N^2)}, & T \ll E_C; \\ \frac{E_C}{T} - \frac{2}{3} \left( \frac{E_C}{T} \right)^2, & T \gg E_C. \end{cases} \quad (4.64)$$



**Рис. 4.10.** Функция температуры  $\alpha(N, T)$  при различных значениях  $N$  (сплошная линия —  $N = 0$ , пунктирная —  $N = 0.2$ , штрихпунктирная —  $N = 0.4$ , штрихштрихпунктирная —  $N = 0.5$ ). Только в последнем случае полуцелого  $N$  зависимость оказывается монотонной. При высоких температурах справедливо асимптотическое выражение (4.64), для которого построена точечная линия.

Здесь, и до конца главы, мы вновь предполагаем  $|N| \leq 1/2$ . Выражения (4.64) будут использоваться в дальнейшем при рассмотрении пределов сильного и слабого кулоновского взаимодействия.

Для определения критической температуры подставим выражения (4.59) и (4.62) в уравнение самосогласования (4.24). Величина щели при этом сокращается и получается замкнутое уравнение, определяющее  $T_c$ :

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \Delta \exp \left[ -\frac{E_C \delta}{E_g^2 \alpha(N, T_c)} \right]. \quad (4.65)$$

Это уравнение легко решается в двух предельных случаях, когда можно пользоваться асимптотическими выражениями (4.64). Начнем с более простого случая сильной кулоновской блокады.

### Сильная кулоновская блокада

Подставляя низкотемпературную асимптотику функции  $\alpha(N, T)$  в уравнение (4.65), получаем для критической температуры

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \Delta \exp \left[ -\frac{2E_C \delta}{E_g^2} (1 - N^2) \right] = \frac{\gamma}{\pi} \tilde{E}_g(0), \quad (4.66)$$

где  $\tilde{E}_g(0)$  определяется формулой (4.33). Таким образом критическая температура оказалась пропорциональна величине щели, взятой при нулевой температура

туре. Как было установлено в разделе 4.1.3 при проверке применимости адиабатического приближения, эта величина гораздо меньше  $E_C$ , поэтому использование низкотемпературного предела для  $\alpha(N, T)$  оказывается оправданным. Связь найденной критической температуры со щелью полностью совпадает с аналогичной связью в теории БКШ. Этот факт находится в соответствии с качественным объяснением происхождения зависимости (4.33) на основе эффективного притяжения между электронами в грануле в куперовском канале.

Зависимость щели от температуры также легко вычислить. При всех температурах ниже критической можно считать значение параметра  $q$  малым и пользоваться разложением свободной энергии фазы  $K$  по степеням  $q$ . При этом главный вклад в величину  $F_K$  дает основное состояние гамильтониана (4.22). Для вычисления экспоненциально малой температурной поправки к величине щели (4.33) в пределе  $T \ll T_c$  нужно учесть малое отклонение  $q$  от значения (4.30), вызванное конечностью температуры,

$$q = \frac{E_g \tilde{E}_g}{E_C \delta} \left[ \ln \frac{2\Delta}{\tilde{E}_g} - \sqrt{\frac{2\pi T}{\tilde{E}_g}} e^{-\tilde{E}_g/T} \right]. \quad (4.67)$$

В функцию  $\alpha(N, T)$  также есть экспоненциально малые вклады от возбужденных состояний гамильтониана (4.22), но они содержат параметр  $e^{-E_C/T}$ , поэтому ими можно пренебречь по сравнению с поправкой в  $q$ , так как  $\tilde{E}_g \ll E_C$ . Используя асимптотику (4.64) и выражение (4.67), из уравнения (4.24) находим

$$\tilde{E}_g(T) = \tilde{E}_g(0) - \sqrt{2\pi T \tilde{E}_g(0)} e^{-\tilde{E}_g(0)/T}, \quad (4.68)$$

Вид полученного выражения, как и для (4.66), совпадает с результатом теории БКШ.

В противоположном пределе  $T \rightarrow T_c$  для определения величины щели можно пользоваться теорией Гинзбурга – Ландау. В приложении Г выведено разложение для функционала свободной энергии (Г9). В режиме сильной кулоновской блокады можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в (Г9). В результате для щели получается выражение, как и прежде, совпадающее с предсказанием теории БКШ

$$\tilde{E}_g(T) = \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c(T_c - T)}. \quad (4.69)$$

Около критической температуры существует небольшая флуктуационная область, в которой теория Гинзбурга – Ландау не работает. Для оценки величины

этой области нужно сравнить выигрыш в свободной энергии за счет образования щели с температурой. Это приводит к ограничению, которое оказывается сильнее, чем условие применимости седлового приближения  $\tilde{E}_g \gg \delta$ , полученное в приложении В,

$$\sqrt{\delta T_c} \ll T_c - T \ll T_c, \quad (4.70)$$

$$\delta^{1/4} T_c^{3/4} \ll \tilde{E}_g \ll \tilde{E}_g(0). \quad (4.71)$$

Итак, в случае сильной кулоновской блокады получено два асимптотических выражения для зависимости щели от температуры

$$\tilde{E}_g(T) = \begin{cases} \tilde{E}_g(0) - \sqrt{2\pi T \tilde{E}_g(0)} e^{-\tilde{E}_g(0)/T}, & T \ll T_c; \\ \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}} T_c(T_c - T), & \sqrt{\delta T_c} \ll T_c - T \ll T_c. \end{cases} \quad (4.72)$$

### Слабая кулоновская блокада

В пределе слабой кулоновской блокады можно применять высокотемпературную асимптотику функции  $\alpha(N, T)$ . В этом случае из уравнения (4.65) для критической температуры получаем

$$T_c = \frac{E_g^2}{\delta} \ln \frac{2\gamma\Delta\delta}{\pi E_g^2} - \frac{2}{3} E_C. \quad (4.73)$$

При выводе этого выражения мы воспользовались условием  $\Delta\delta \ll E_g^2$ , которое необходимо для того, чтобы пренебречь влиянием конечной температуры на сверхпроводящую часть контакта. При этом величина критической температуры оказалась гораздо меньше  $\Delta$ . С другой стороны, неравенство  $T_c \gg E_C$ , выполнение которого необходимо для использования высокотемпературной асимптотики  $\alpha(N, T)$ , совпадает с условием слабой кулоновской блокады при нулевой температуре, когда параметр  $q$ , определяемый формулой (4.27), должен быть велик.

Отметим, что формальный переход к пределу  $E_C \rightarrow 0$  в выражении (4.73) приводит к неверному результату. В системе без взаимодействия щель в спектре нормальной гранулы подавляется одновременно со щелью в сверхпроводнике, когда температура достигает критического значения для резервуара, которое гораздо больше, чем  $T_c$ , определенная по формуле (4.73). Это несоответствие связано с нарушением условия  $E_C \gg \delta$ , использованного при применении адиабатического приближения.

Вычислим величину щели при  $T \ll T_c$ . При этих температурах нельзя считать параметр  $q$  малым и пользоваться разложением свободной энергии  $F_K$ . Однако, напротив, условие  $q \gg 1$  позволяет использовать приближение параболического потенциала для гамильтониана (4.22) и легко получить соответствующую свободную энергию.

Спектр собственных состояний можно считать эквидистантным

$$E_m = E_C[-2q + 2\sqrt{q}(2m + 1)], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.74)$$

если  $E_m \ll E_C q$ . Для более высоких уровней приближение параболического потенциала не работает, но из формул (4.27) и (4.73) следует, что условие  $T \ll T_c$  эквивалентно неравенству  $T \ll E_C q$ . Поэтому основной вклад в статсумму для фазы  $K$  дает эквидистантная часть спектра (4.74), и суммирование можно формально распространить до бесконечности. Результат для свободной энергии имеет вид

$$F_K(q, T) = -T \ln \sum_{m=0}^{\infty} e^{-E_m/T} = -2qE_C + 2\sqrt{q}E_C + T \ln[1 - e^{-4\sqrt{q}E_C/T}]. \quad (4.75)$$

После подстановки этого выражения в уравнение самосогласования (4.24) для щели получаем

$$\tilde{E}_g(T) = E_g \left[ 1 - \frac{\text{cth}(2\sqrt{q}E_C/T)}{2\sqrt{q}} \right]. \quad (4.76)$$

Эта формула корректно описывает зависимость щели от температуры во всей области  $T \ll T_c$ . При нулевой температуре из нее сразу получается результат (4.29). Однако пользоваться выражением (4.76) непосредственно неудобно, потому что величина параметра  $q$  должна определяться самосогласованно. Выделим три области изменения температуры, в которых вычисления можно довести до конца.

При  $T \ll E_g$  температурные поправки к щели в плотности состояний (4.29) будут экспоненциально малы, поэтому их учет был бы превышением точности: при выводе формулы (4.76) использовалось приближение параболического потенциала для гамильтониана (4.22), к которому есть ангармонические поправки неэкспоненциального характера. Таким образом при  $T \ll E_g$  щель фактически не зависит от температуры и дается выражением (4.29).

При температурах больше  $E_g$  для  $q$  можно применять формулу (4.59). Для большего упрощения формулы (4.76) будет удобнее рассмотреть отдельно область температур  $E_g \ll T \ll E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_g)}$ , в которой гиперболический

котангенс, по-прежнему, можно заменить на единицу.

$$\tilde{E}_g(T) = E_g - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C \delta}{\ln(2\gamma \Delta / \pi T)}}. \quad (4.77)$$

Для еще больших температур  $E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_g)} \ll T \ll T_c$  применяем для котангенса формулу  $\text{cth } x \approx 1/x$  и получаем

$$\tilde{E}_g(T) = E_g - \frac{T\delta}{4E_g \ln(2\gamma \Delta / \pi T)}. \quad (4.78)$$

Второе слагаемое имеет смысл маленькой поправки при условии  $T \ll T_c$ . С другой стороны, если формально подставить в эту формулу  $T = T_c$ , то окажется, что щель подавлена всего на четверть. Это означает, что выражение (4.78) работает вплоть до температур порядка критической, а в непосредственной близости от  $T_c$  величина щели резко падает до нуля.

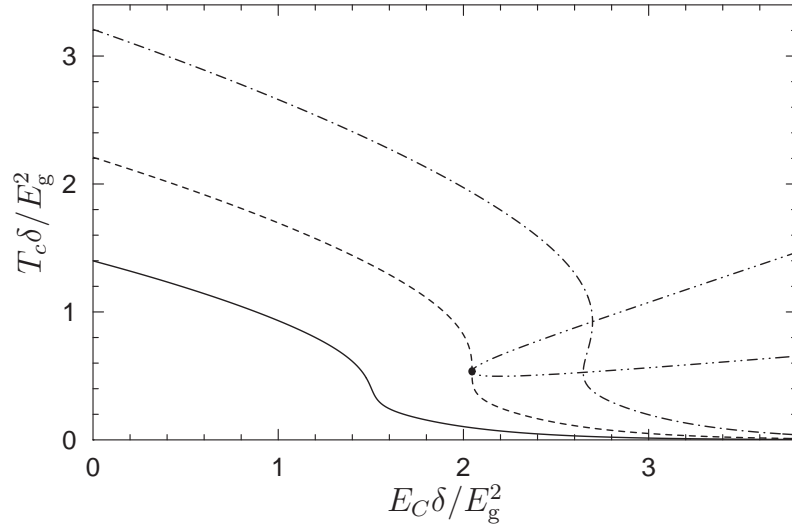
Используя высокотемпературные асимптотики функций  $\alpha(N, T)$  и  $\beta(N, T)$ , можно попытаться вычислить величину щели вблизи  $T_c$  из функционала (Г9). Однако оказывается, что получить результат таким способом невозможно: теория Гинзбурга – Ландау в режиме слабой кулоновской блокады не работает. Это выражается в том, что размер флуктуационной области (с точки зрения функционала Гинзбурга – Ландау) получается порядка самой критической температуры. Таким образом еще раз подтверждается тот факт, что выражение (4.78) применимо вплоть до  $T_c$ : область, в которой асимптотика (4.78) не работает, оказывается очень узкой, и в ней происходит резкое уменьшение щели до нуля.

Подводя итог, еще раз перечислим различные асимптотические выражения для щели в режиме слабой кулоновской блокады

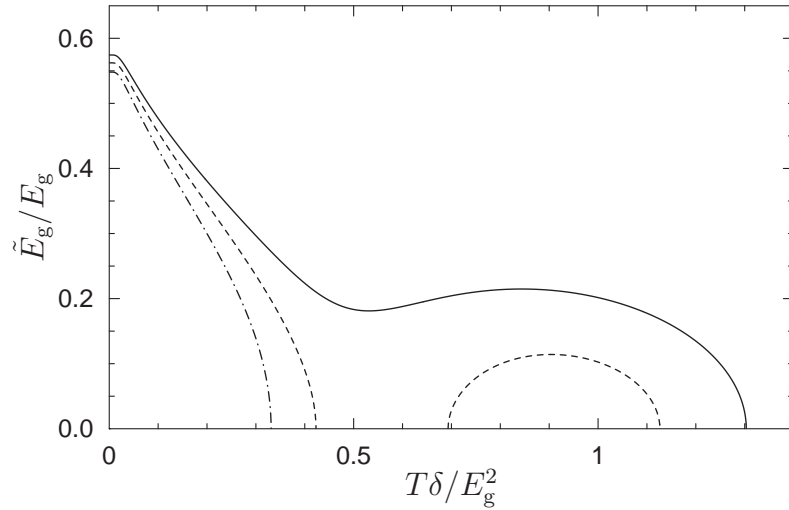
$$\tilde{E}_g(T) = \begin{cases} E_g - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C \delta}{\ln(2\Delta/E_g)}}, & T \ll E_g; \\ E_g - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C \delta}{\ln(2\gamma \Delta / \pi T)}}, & E_g \ll T \ll E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_g)}; \\ E_g - \frac{T\delta}{4E_g \ln(2\gamma \Delta / \pi T)}, & E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_g)} \ll T \ll T_c. \end{cases} \quad (4.79)$$

### Общий случай

Уравнение для критической температуры (4.65) можно решать численно. На Рис. 4.11 приведена зависимость  $T_c(E_C)$  для нескольких значений отношения



**Рис. 4.11.** Зависимость критической температуры  $T_c$  от величины зарядовой энергии  $E_C$  при нулевом потенциале затвора и нескольких значениях  $\Delta$ . Сплошная линия соответствует  $\Delta\delta/E_g^2 = 5.00$ , пунктирная линия —  $\Delta\delta/E_g^2 = 17.7$ , штрихпунктирная линия —  $\Delta\delta/E_g^2 = 70.0$ . При  $\Delta\delta/E_g^2$  больше критического значения 17.7 (пунктирная линия) критическая температура становится неоднозначной функцией  $E_C$ , что приводит к возвратной зависимости  $\tilde{E}_g(T)$ , которая проиллюстрирована на Рис. 4.12. Кружком отмечена критическая точка ( $E_C\delta/E_g^2 = 2.05$ ,  $T_c\delta/E_g^2 = 0.536$ ). Точки возврата функции  $T_c(E_C)$  обозначены штрихштрихпунктирной линией.



**Рис. 4.12.** Зависимость термодинамической щели  $\tilde{E}_g$  от температуры для  $\Delta\delta/E_g^2 = 70.0$  (штрихпунктирная линия на Рис. 4.11). Сплошная линия отвечает  $E_C\delta/E_g^2 = 2.60$ , пунктирная линия —  $E_C\delta/E_g^2 = 2.67$ , штрихпунктирная —  $E_C\delta/E_g^2 = 2.75$ .

$\Delta\delta/E_g^2$ . Если это отношение превышает 17.7, критическая температура оказывается неоднозначной функцией  $E_C$ . При этом в области параметров, соответствующей  $q \sim 1$ , щель демонстрирует возвратное поведение с изменением температуры. На Рис. 4.12 изображены кривые зависимости щели от температуры, иллюстрирующие появление такого возвратного поведения.

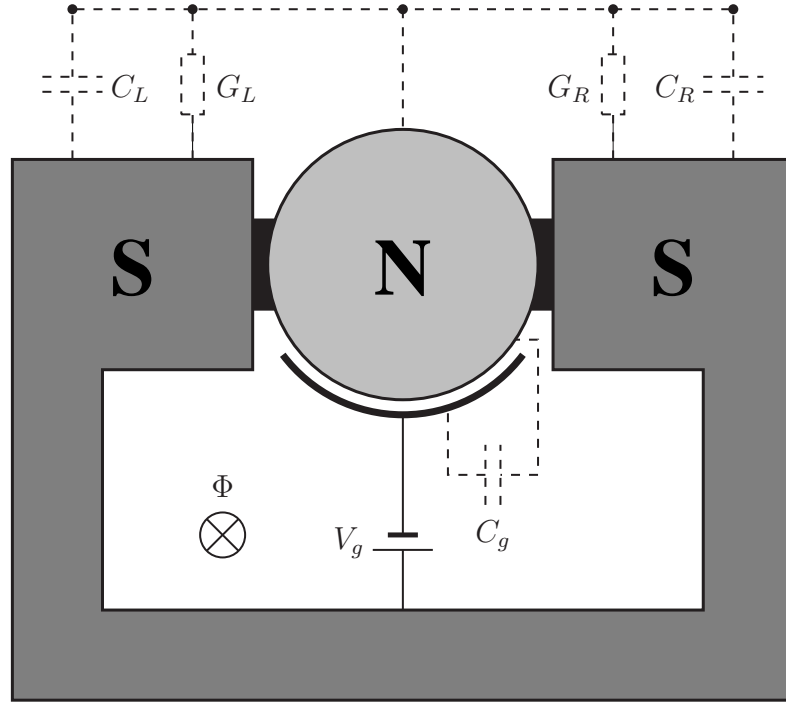
## 4.2 Сверхпроводящий ток в SINIS контакте

Развитый в этой главе метод описания кулоновских эффектов в контакте нормальной гранулы и сверхпроводника легко обобщается на случай, когда к грануле присоединено два сверхпроводящих резервуара. При этом эффект близости проявляется не только в образовании щели в плотности состояний нормального металла, но и в виде эффекта Джозефсона. Ниже будет вычислена зависимость протекающего через систему сверхпроводящего тока от приложенной к контакту разности фаз и найдена величина максимально возможного (критического) сверхтока.

С экспериментальной точки зрения, плотность состояний также удобно изучать в системе с двумя сверхпроводящими берегами. Найденные выше в этой главе зависимости различных характеристик от зарядовой энергии трудно измерять непосредственно, потому что емкость образца нельзя менять в ходе эксперимента. Вместо этого можно находить зависимость щели в плотности состояний от приложенной разности фаз. Как будет показано ниже, изменение разности фаз позволяет, до некоторой степени, подстраивать эффективную величину зарядовой энергии.

### 4.2.1 Зависимость тока от разности фаз

Рассмотрим SINIS контакт, состоящий из нормальной металлической гранулы, соединенной туннельными контактами с двумя сверхпроводниками. Примерная схема эксперимента изображена на Рис. 4.13. Будем условно называть сверхпроводящие берега “левым” и “правым”; относящиеся к ним параметры снабжаем индексами “L” и “R” соответственно. Так безразмерные кондактансы контактов обозначаем  $G_L$  и  $G_R$ , а взаимные емкости гранулы и каждого из берегов —  $C_L$  и  $C_R$ . В дальнейшем нас будет интересовать зависимость протекающего через гранулу сверхтока от разности фаз между сверхпроводниками  $\varphi$ . Для фиксации разности фаз предполагается, что оба сверхпроводника замкнуты в кольцо,



**Рис. 4.13.** SINIS контакт, к которому приложена определенная разность фаз. Пунктирными линиями изображены элементы эквивалентной схемы. Нормальная гранула связана со сверхпроводниками туннельными контактами с безразмерными кондуктансами  $G_L$  и  $G_R$  и емкостями  $C_L$  и  $C_R$ . Затвор связан с гранулой емкостью  $C_g$ ; на него подается отрицательный потенциал  $-V_g$ . Магнитный поток  $\Phi$ , пропускаемый через сверхпроводящее кольцо, создает на контакте разность фаз  $\varphi = 2e\Phi/\hbar c$ .

через которое пропущен определенный магнитный поток, как это изображено на Рис. 4.13. Кроме того, существует нормальный электрод затвора, который связан с гранулой емкостью  $C_g$  и на который подается отрицательный потенциал  $-V_g$  относительно обоих сверхпроводников.

Вывод эффективной теории для SINIS контакта полностью повторяет рассуждения разделов 4.1.1 и 4.1.2. Действие динамической  $\sigma$ -модели имеет вид, аналогичный (4.14), но с двумя граничными членами

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = & \sum_a \int d\tau \frac{C_0}{2e^2} \left[ \dot{K}_\tau^a + ie \frac{C_g V_g}{C_0} \right]^2 - \\ & - \frac{\pi}{4} \text{Tr} \left[ e^{-i\tau_z K} \left( G_L Q_S^{(L)} + G_R Q_S^{(R)} \right) e^{i\tau_z K} \tilde{Q} \right] - \frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ \varepsilon \tau_z \tilde{Q} \right], \quad (4.80) \end{aligned}$$

в котором под  $C_0$  понимается полная емкость гранулы  $C_0 = C_L + C_R + C_g$ . Для матриц  $Q_S^{(L,R)}$  сверхпроводящих берегов при энергиях гораздо меньше  $\Delta$  можно выбрать симметричную калибровку (2.53). В итоге низкоэнергетическое

действие (4.18) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = & -\frac{\pi}{\delta} \text{Tr} [\varepsilon \tau_z \tilde{Q}] + \sum_a \int d\tau \left\{ \frac{(\dot{K}_\tau^a)^2}{4E_C} + iN\dot{K}_\tau^a - \frac{e^2 N^2}{2C_0} - \right. \\ & - \frac{\pi}{4} \left[ G_L \cos(2K_\tau^a + \varphi/2) + G_R \cos(2K_\tau^a - \varphi/2) \right] \text{tr}(\tau_x \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa}) - \\ & \left. - \frac{\pi}{4} \left[ G_L \sin(2K_\tau^a + \varphi/2) + G_R \sin(2K_\tau^a - \varphi/2) \right] \text{tr}(\tau_y \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Перенормировка емкости, учитывающая вклад высокоэнергетичных мод, определяется влиянием обоих сверхпроводников

$$C = C_0 + \frac{e^2}{2\Delta} (G_L + G_R). \quad (4.82)$$

Чтобы применить адиабатическое приближение, используем для матрицы  $\tilde{Q}$  стационарную параметризацию (4.19). Переменные  $K$  и  $\tilde{Q}$  разделяются, а действие приобретает вид (4.20, 4.21), причем величина кондактанса  $G_T$ , входящая в определение параметра  $q$ , теперь зависит от разности фаз

$$G_T(\varphi) = \sqrt{G_L^2 + G_R^2 + 2G_L G_R \cos \varphi}. \quad (4.83)$$

Соответственно, оказывается зависящей от  $\varphi$  и величина затравочной щели  $E_g$ , которая связана с кондактансом соотношением (4.1). Отметим, что функция  $E_g(\varphi)$  в случае симметричного контакта с близкой к  $\pi$  разностью фаз воспроизводит результат, полученный в разделе 2.2.1. С учетом указанной зависимости  $E_g(\varphi)$  полностью сохраняют свою силу все результаты, полученные выше в этой главе.

Величина зарядовой энергии  $E_C$ , которая теперь определяется посредством полной емкости (4.82), не поддается непосредственному изменению в условиях реального эксперимента. Однако во все результаты этой главы, этот параметр входит в виде безразмерной комбинации  $E_C \delta / E_g^2$ . Таким образом, изменяя разность фаз на контакте, можно менять и эффективную величину зарядовой энергии.

Теперь переходим к вычислению сверхпроводящего тока. Для этого будем использовать полученную ранее свободную энергию (4.52) и соотношение

$$I = \frac{2e}{\hbar} \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}. \quad (4.84)$$

Свободная энергия зависит от разности фаз как через параметр порядка  $\tilde{E}_g$ , так и через входящую непосредственно затравочную величину щели  $E_g(\varphi)$ . Принимая во внимание уравнение на щель (4.54) а также тождество (4.24), можно свести выражение для тока к

$$I(\varphi) = \frac{e\delta^2 E_C \tilde{E}_g q}{4\hbar E_g^3(\varphi)} G_L G_R \sin \varphi. \quad (4.85)$$

Выразив ток в таком виде, можно воспользоваться полученными ранее результатами для значений  $\tilde{E}_g$  и  $q$  в различных предельных случаях. Для простоты ограничимся случаем нулевой температуры.

### Слабая кулоновская блокада

Предел слабой кулоновской блокады соответствует большим значениям параметра  $q$ . По мере увеличения разности фаз затравочная величина щели  $E_g$  уменьшается. Соответственно этому кулоновские эффекты, по сравнению с эффектом близости, становятся относительно сильнее. В случае симметричного ( $G_L = G_R$ ) контакта  $E_g$  обращается в ноль при  $\varphi = \pi$ . Таким образом, режим слабой кулоновской блокады заведомо может реализоваться при не слишком большой разности фаз.

Будем решать систему уравнений (4.24, 4.25) методом последовательных приближений. Поскольку величина щели  $\tilde{E}_g$  слабо отличается от своего затравочного значения в режиме слабой кулоновской блокады, можно начать вычисления с подстановки значения  $\tilde{E}_g = E_g$  в уравнение (4.25). Это позволяет определить приближенное значение параметра  $q$ , которое мы обозначим  $q_0$ . Оно совпадает с результатом (4.27)

$$q_0 = \frac{E_g^2(\varphi)}{E_C \delta} \ln \frac{2\Delta}{E_g(\varphi)}. \quad (4.86)$$

Подставляя эту величину в (4.24), можно получить более точное значение щели  $\tilde{E}_g$ , а затем с помощью (4.25) уточним и величину  $q$

$$\tilde{E}_g = E_g(\varphi) \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{q_0}} \right], \quad q = q_0 \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{q_0}} \right]. \quad (4.87)$$

Теперь можно подставить полученные значения в выражение для тока (4.85), что приводит к

$$I(\varphi) = I_0(\varphi) \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{q_0}} \right], \quad I_0(\varphi) = \frac{e\delta}{4\hbar} G_L G_R \ln \frac{2\Delta}{E_g(\varphi)} \sin \varphi. \quad (4.88)$$

Введенная здесь функция  $I_0(\varphi)$  описывает зависимость тока от разности фаз без учета кулоновских эффектов. Реальная величина тока оказывается немного меньше  $I_0$  в меру малого параметра  $1/\sqrt{q_0}$ .

### Сильная кулоновская блокада

В противоположном пределе  $q \ll 1$  для величины щели можно пользоваться выражением (4.33), а значение  $q$  устанавливается из соотношения (4.32)

$$q = \frac{2\tilde{E}_g}{E_g}(1 - N^2). \quad (4.89)$$

После подстановки в (4.85) получаем

$$I(\varphi) = \frac{2e\delta^2 E_C \Delta^2}{\hbar E_g^4(\varphi)} G_L G_R (1 - N^2) \exp \left[ -\frac{4E_C \delta}{E_g^2(\varphi)} (1 - N^2) \right] \sin \varphi. \quad (4.90)$$

Величина тока оказалась экспоненциально малой, причем она также экспоненциально убывает с ростом  $\varphi$ . Как отмечалось выше, в симметричном контакте такая зависимость всегда будет реализовываться при стремлении разности фаз к  $\pi$ , даже если при нулевой разности фаз контакт находится в режиме слабой кулоновской блокады. Таким образом функция, описывающая зависимость тока от разности фаз, оказывается резко несимметричной, в отличие от результата, полученного в пренебрежении кулоновским взаимодействием.

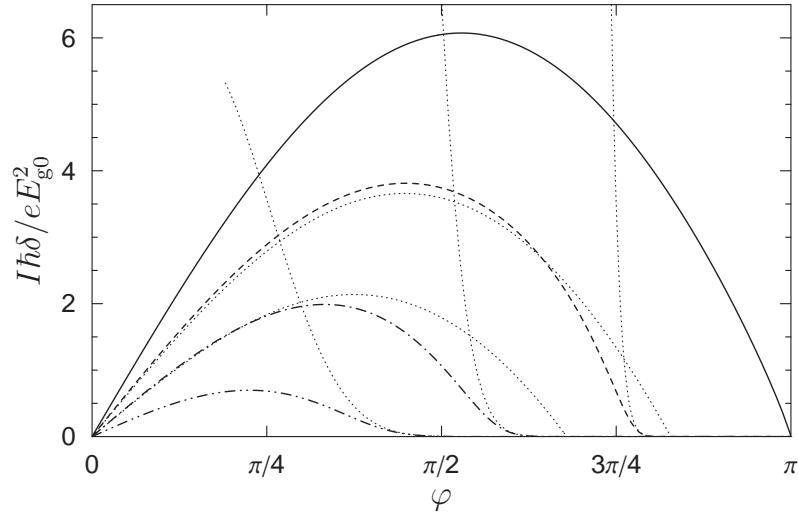
В режиме сильного кулоновского взаимодействия ток оказывается сильно зависящим от напряжения на затворе. Увеличение потенциала затвора приводит к частичному экранированию кулоновского взаимодействия, как это объяснялось в разделе 4.1.3, и, как следствие, к росту сверхпроводящего тока.

### Общий случай

Численное решение системы уравнений (4.24, 4.25) позволяет построить характеристики ток–фаза при произвольном соотношении параметров системы. Результаты такого расчета для симметричного контакта приведены на Рис. 4.14. Также, для сравнения, показаны кривые, соответствующие аналитическим результатам (4.88) и (4.90).

## 4.2.2 Критический ток

Поддерживать определенную разность фаз на контакте не всегда удобно с экспериментальной точки зрения. Обычно гораздо легче фиксировать протекаю-



**Рис. 4.14.** Характеристики ток–фаза для симметричного SINIS контакта с  $G_L = G_R = 20$ ,  $\Delta/E_g = 150$ ,  $V_g = 0$  при различных значениях зарядовой энергии  $E_C$ . Сплошная линия —  $E_C = 0$  ( $I_0(\varphi)$  из формулы (4.88)), пунктирная линия —  $E_C\delta/E_g^2 = 0.5$ , штрихпунктирная —  $E_C\delta/E_g^2 = 1.5$ , штрихштрихпунктирная —  $E_C\delta/E_g^2 = 2.5$ . Точечные линии иллюстрируют асимптотические зависимости (4.88) и (4.90).

ций через систему ток. При этом можно измерить величину максимального тока, который может протекать через контакт без напряжения. Это значение критического тока соответствует максимуму функции  $I(\varphi)$ , вычислению которой был посвящен предыдущий раздел. В этом разделе будет найдена зависимость критического тока от температуры при различных значениях  $E_C$ . Именно такие характеристики обычно измеряются в эксперименте.

### Слабая кулоновская блокада

В режиме слабой кулоновской блокады ток как функция от фазы определяется выражением (4.88). Зависимость  $E_g$  от  $\varphi$  в аргументе логарифма можно не учитывать, поэтому максимум тока достигается около  $\varphi = \pi/2$

$$I_c = \frac{e\delta}{4\hbar} G_L G_R \ln \frac{2\Delta}{E_{g1}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_C\delta}{E_{g1}^2 \ln(2\Delta/E_{g1})}} \right]. \quad (4.91)$$

Здесь  $E_{g1}$  обозначает значение  $E_g$ , взятое при  $\varphi = \pi/2$

$$E_{g1} = \frac{\delta}{4} \sqrt{G_L^2 + G_R^2}. \quad (4.92)$$

При малых температурах  $T \ll E_{g1}$  найденная величина критического тока сохраняется аналогично тому, как величина щели (4.79) не зависела от темпе-

ратуры в этом пределе. При бóльших температурах для  $\tilde{E}_g$  справедливо выражение (4.76), в которое можно подставить значение параметра  $q$  из (4.59). Выделим область температур  $E_{g1} \ll T \ll E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_{g1})}$ , в которой гиперболический котангенс можно заменить на 1. Максимальное значение тока, по-прежнему, достигается при  $\varphi = \pi/2$  и составляет

$$I_c(T) = \frac{e\delta}{4\hbar} G_L G_R \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_C\delta}{E_{g1}^2 \ln(2\gamma\Delta/\pi T)}} \right]. \quad (4.93)$$

При еще больших температурах  $E_g \sqrt{(E_C/\delta) \ln(\Delta/E_{g1})} \ll T \ll T_c$  аргумент гиперболического котангенса в (4.76) становится малым, по нему можно сделать разложение. При этом критический ток, который соответствует  $\varphi = \pi/2$ , равен

$$I_c(T) = \frac{e\delta}{4\hbar} G_L G_R \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \left[ 1 - \frac{T\delta}{2E_{g1}^2 \ln(2\gamma\Delta/\pi T)} \right]. \quad (4.94)$$

Эта формула справедлива вплоть до критической температуры (4.73), как и аналогичная зависимость для щели (4.78).

Обобщая, можно сказать, что в режиме слабой кулоновской блокады максимальная величина тока при всех температурах (за исключением непосредственной окрестности  $T_c$ ) достигается около разности фаз  $\varphi = \pi/2$ . Небольшая отрицательная поправка к критическому току, связанная с кулоновскими эффектами, вдвое больше соответствующей поправки в величину щели (4.79).

### Сильная кулоновская блокада

При малых значениях параметра  $q$  сверхпроводящий ток в SINIS контакте (4.90) оказывается экспоненциально сильно подавленным. При этом его максимальное значение достигается при малых значениях разности фаз  $\varphi$ . Дифференцируя выражение (4.90) по  $\varphi$ , можно пренебречь производной  $E_g(\varphi)$  в предэкспоненте и получить значение разности фаз, отвечающее максимальному току,

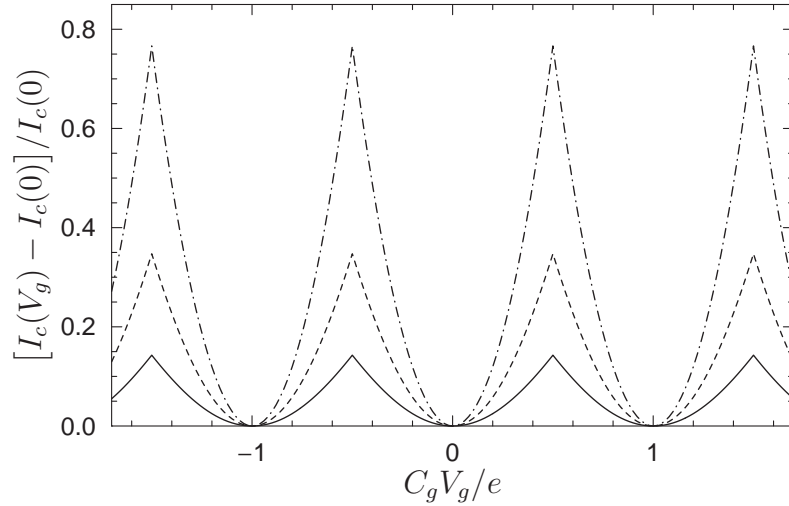
$$\varphi_c = \sqrt{2} E_{g0}^2 [E_C \delta^3 G_L G_R (1 - N^2)]^{-1/2}. \quad (4.95)$$

Здесь введено обозначение для затравочной щели при нулевой разности фаз

$$E_{g0} = \frac{\delta}{4} (G_L + G_R). \quad (4.96)$$

Подставляя найденную величину  $\varphi_c$  в (4.90) приходим к выражению для критического тока при нулевой температуре

$$I_c = \frac{2e\Delta^2}{\hbar E_{g0}^4} \sqrt{2E_C\delta G_L G_R (1 - N^2)} \exp \left[ -\frac{4E_C\delta}{E_{g0}^2} (1 - N^2) \right]. \quad (4.97)$$



**Рис. 4.15.** Относительное усиление критического тока в симметричном SINIS контакте с параметрами  $G_L = G_R = 20$ ,  $\Delta/E_g = 150$  в зависимости от потенциала затвора при различных значениях зарядовой энергии  $E_C$ . Сплошная линия —  $E_C\delta/E_g^2 = 1.5$ , пунктирная линия —  $E_C\delta/E_g^2 = 2.0$ , штрихпунктирная —  $E_C\delta/E_g^2 = 2.5$ .

Этот критический ток увеличивается с ростом напряжения на затворе. Причина ослабления кулоновских эффектов, лежащая в основе этого эффекта, объяснялась в разделе 4.1.3 на примере величины щели  $\tilde{E}_g$ . Для SINIS контакта в пределе сильной кулоновской блокады можно говорить о специфическом сверхпроводящем транзисторе, через который куперовские пары проходят поодиночке. Эта ситуация аналогична модели одноэлектронного транзистора транзистора [51], основанного на эффекте кулоновской блокады нормальной системе. Похожая модель транзистора со сверхпроводящей гранулой изучалась в работе [81], без учета эффекта близости. Зависимость критического тока от потенциала затвора изображена на Рис. 4.15

Теперь установим температурную зависимость критического тока. При малых температурах  $T \ll T_c$  к щели есть экспоненциально малые поправки (4.79). Однако аналогичное вычисление для критического тока приводит к чересчур громоздкому результату. Значение оптимальной разности фаз (4.95) было найдено из условия максимальности тока, пренебрегая зависимостью  $E_g$  от  $\varphi$ . Следовательно, к величине (4.97) существуют малые по параметру  $q$  поправки неэкспоненциального характера, поэтому учет температурного вклада был бы превышением точности.

Для температур близких к  $T_c$  можно установить закон убывания критического тока. Для этого будем использовать выражение (4.69) для щели  $\tilde{E}_g$  и

формулу (4.89) для  $q$ . После подстановки в (4.85) имеем

$$I(\varphi, T) = \frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{e\delta^2 E_C}{\hbar E_g^4(\varphi)} G_L G_R (1 - N^2) T_c(\varphi) (T_c(\varphi) - T) \sin \varphi. \quad (4.98)$$

Здесь  $T_c(\varphi)$  имеет смысл минимальной температуры, при которой сверхпроводящий ток обращается в ноль для разности фаз  $\varphi$ . Эта температура определяется формулой (4.66), в которую нужно подставить зависимость  $E_g(\varphi)$ . Значение оптимальной разности фаз, при которой достигается максимум тока, находим, дифференцируя функцию  $I(\varphi)$  и учитывая при этом близость  $T$  к  $T_c$

$$\varphi_c = 2E_{g0}^2 \sqrt{\frac{1 - T/T_c}{E_C \delta^3 G_L G_R (1 - N^2)}}. \quad (4.99)$$

Здесь под  $T_c$  можно подразумевать истинную критическую температуру  $T_c = \lim_{\varphi \rightarrow 0} T_c(\varphi)$ , поскольку  $\varphi_c \ll 1$ . Величина критического тока теперь находится подстановкой найденного значения  $\varphi_c$  в (4.98)

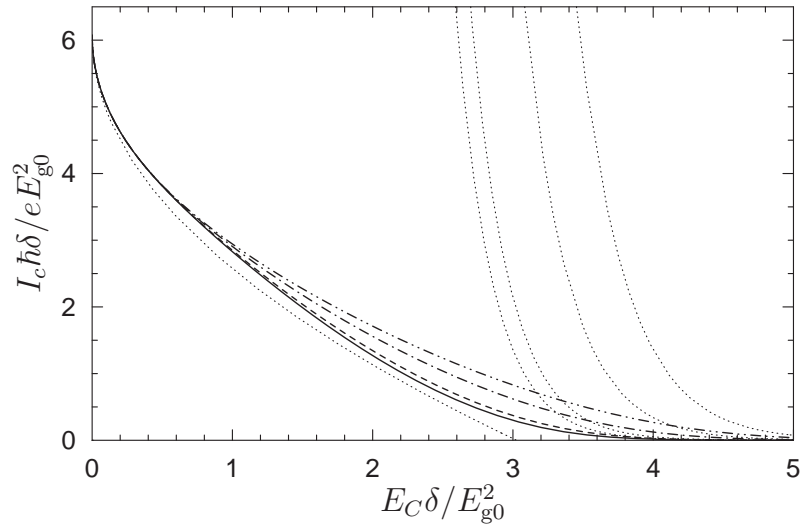
$$I_c(T) = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{eT_c^2}{\hbar E_{g0}^2} \sqrt{E_C \delta G_L G_R (1 - N^2)} (1 - T/T_c)^{3/2}. \quad (4.100)$$

Как и выражение для щели (4.69), этот результат справедлив при температурах из интервала (4.70).

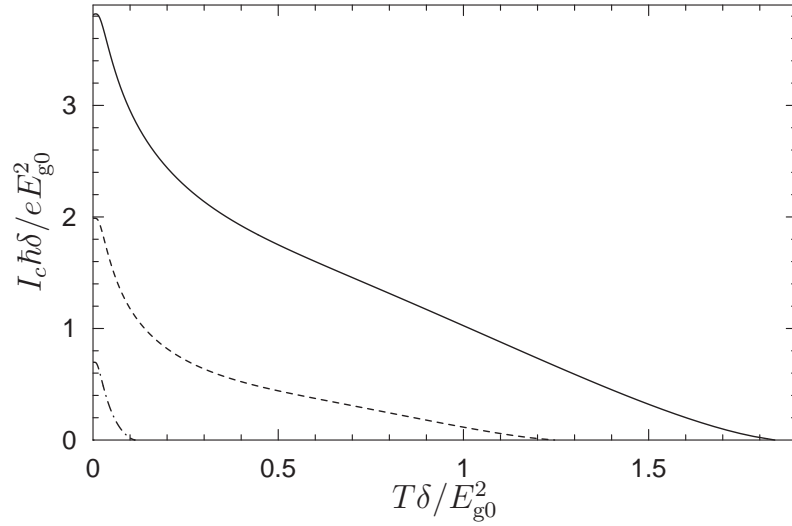
### Общий случай

Результаты численного расчета величины максимального сверхпроводящего тока как функции  $E_C$  приведены на Рис. 4.16, а температурная зависимость изображена на Рис. 4.17.

Как объяснялось в разделе 4.1.6, в промежуточном случае  $q \sim 1$  возможно возвратное поведение щели  $\tilde{E}_g$  с температурой. Такой же возвратный характер должен быть и у функции  $I_c(T)$ . Однако вблизи критической температуры ток убывает гораздо быстрее, чем  $\tilde{E}_g$ , что нетрудно установить сравнивая (4.100) с (4.69). Поэтому величина возвратного значения критического тока оказывается чрезвычайно малой и вряд ли может быть экспериментально измерена.



**Рис. 4.16.** Зависимость критического тока симметричного SINIS контакта с параметрами  $G_L = G_R = 20$ ,  $\Delta/E_g = 150$  от величины зарядовой энергии  $E_C$  при различных значениях потенциала затвора. Сплошная линия —  $N = 0$ , пунктирная линия —  $N = 0.2$ , штрихпунктирная —  $N = 0.4$ , штрихштрихпунктирная —  $N = 0.5$ . Точечными линиями показаны асимптотические зависимости (4.91) и (4.97).



**Рис. 4.17.** Зависимость критического тока симметричного SINIS контакта с параметрами  $G_L = G_R = 20$ ,  $\Delta/E_g = 150$ ,  $V_g = 0$  от температуры при различных значениях зарядовой энергии  $E_C$ : Сплошная линия —  $E_C \delta / E_g^2 = 0.5$ , пунктирная линия —  $E_C \delta / E_g^2 = 1.5$ , штрихпунктирная —  $E_C \delta / E_g^2 = 2.5$ .

# Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты

1. Построена явная параметризация многообразия суперматричной  $\sigma$ -модели для гибридных структур и классификация всех седловых точек. Вычислен главный инстантонный вклад в подщелевую плотность состояний. С учетом всех возможных седловых точек найдена точная зависимость плотности состояний от энергии около края спектра, включая всю флуктуационную область.
2. Изучено влияние туннельных контактов и разности фаз на спектр квазилокализованных состояний в гибридной структуре. Показано, что количество квазилокализованных состояний возрастает по мере уменьшения щели ниже определенного критического уровня как за счет туннельных контактов, так и за счет протекающего через систему джозефсоновского тока. Продемонстрированы сходства и различия результатов микроскопической теории с предсказаниями теории случайных матриц для плотности состояний около края спектра в случае ортогонального и унитарного ансамблей Вигнера – Дайсона.
3. В рамках ненульмерной  $\sigma$ -модели изучены различные случаи неуниверсальной зависимости плотности состояний в гибридной структуре от энергии. Получены результаты для структур с контактами большой площади. Вычислена плотность состояний вдали от квазиклассического края спектра.
4. Построена самосогласованная теория для учета кулоновских эффектов в нормальной металлической грануле, соединенной со сверхпроводником туннельным контактом. Найдена зависимость щели в электронном спектре от емкости гранулы. Показано, что кулоновское взаимодействие приводит к двухступенчатой зависимости туннельной плотности состояний от

энергии. Изучена зависимость величины щели в спектре от напряжения на затворе и квантование заряда гранулы в режиме кулоновской блокады. Вычислена температурная зависимость щели и найдено значение критической температуры. При определенных значениях параметров получена возвратная температурная зависимость щели. Для гранулы, присоединенной к двум сверхпроводникам, получена зависимость тока от разности фаз и вычислено значение критического тока.

Я глубоко благодарен своему научному руководителю М. В. Фейгельману за интересные научные задачи, постоянное внимание и поддержку, М. А. Скворцову за многочисленные полезные идеи и советы и готовность вникать в самые мелкие подробности вычислений, а также всем сотрудникам ИТФ им. Л. Д. Ландау за ценные обсуждения и замечания и за уникальную творческую атмосферу.

# Приложения

## А Параметризация $W$

Матрица  $W$  содержит по 8 коммутирующих и грассмановых параметров и удовлетворяет уравнениям (1.42). Параметризация  $W$  будет разной для случая контакта без разности фаз, рассмотренного в главе 1 и разделе 2.1 следующей главы, и контакта с близкой к  $\pi$  разностью фаз (раздел 2.2).

### Параметризация для контакта без разности фаз

Действительные переменные мы обозначим буквами  $a, b, c, d, m, n, p, q$ . Первые четыре параметризуют FF-, а последние — ВВ-сектор  $W$ :

$$W^{\text{FF}} = \frac{1}{2} \left( -a\sigma_z\tau_x + b\sigma_z\tau_y - c\sigma_x + d\sigma_y \right), \quad (\text{A1})$$

$$W^{\text{ВВ}} = \frac{i}{2} \left( m\sigma_z\tau_x + n\sigma_x\tau_z + p\frac{\sigma_y\tau_z - \sigma_z\tau_y}{\sqrt{2}} - q\frac{\sigma_y\tau_z + \sigma_z\tau_y}{\sqrt{2}} \right). \quad (\text{A2})$$

Грассмановы переменные  $(\lambda, \mu, \zeta, \varkappa, \eta, \gamma, \xi, \omega)$  параметризуют FB-сектор:

$$W^{\text{FB}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \mu + \zeta - \varkappa & \lambda + \mu + \zeta + \varkappa & 0 \\ \lambda - \mu - \zeta + \varkappa & 0 & 0 & \lambda + \mu - \zeta - \varkappa \\ -\gamma - \eta + \xi + \omega & 0 & 0 & \gamma - \eta + \xi - \omega \\ 0 & -\gamma - \eta - \xi - \omega & \gamma - \eta - \xi + \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3})$$

Условие антисамосопряженности  $W + \bar{W} = 0$  позволяет выразить BF-сектор  $W$  через FB-сектор:  $W^{\text{BF}} = i\tau_x\sigma_x(W^{\text{FB}})^T\sigma_y\tau_x$ .

Можно установить соответствие между коммутирующими переменными в  $W$  и флуктуациями углов в матрице  $Q$ . Связь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a &= 2 \sin \theta_{\text{F}} \delta \varphi_{\text{F}}, & b &= 2 \delta \theta_{\text{F}}, & c &= 2 \cos \theta_{\text{F}} \delta k_{\text{F}} \Big|_{\chi_{\text{F}} = \frac{\pi}{2}}, & d &= 2 \cos \theta_{\text{F}} \delta k_{\text{F}} \Big|_{\chi_{\text{F}} = 0}, \\ m &= 2i \sin \theta_{\text{B}} \delta \varphi_{\text{B}}, & n &= 2i \sin k_{\text{B}} \chi_{\text{B}}, & p &= i\sqrt{2} \delta \beta, & q &= i\sqrt{2} \delta \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Отметим, что на первом инстантоне переменная  $n$  соответствует нулевой моде — вращению угла  $\chi_B$ .

### Параметризация для контакта с близкой к $\pi$ разностью фаз

В этом случае мы используем более простую параметризацию

$$W^{\text{FF}} = \frac{1}{2} \left( -a\sigma_z\tau_x + b\sigma_z\tau_y - c\sigma_x + d\sigma_y \right), \quad (\text{A5})$$

$$W^{\text{BB}} = \frac{i}{2} \left( m\sigma_z\tau_x - n\sigma_z\tau_y + p\sigma_x\tau_z - q\sigma_y\tau_z \right), \quad (\text{A6})$$

$$W^{\text{FB}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda + \zeta & \mu + \varkappa & 0 \\ \lambda - \zeta & 0 & 0 & \mu - \varkappa \\ -\gamma + \omega & 0 & 0 & -\eta + \xi \\ 0 & -\gamma - \omega & -\eta - \xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A7})$$

Как и выше, связь FB- и BF-сектора имеет вид  $W^{\text{BF}} = i\tau_x\sigma_x(W^{\text{FB}})^T\sigma_y\tau_x$ . Соответствие параметризаций  $W$  и  $Q$  дается соотношениями

$$\begin{aligned} a &= 2 \sin \theta_F \delta\varphi_F, & b &= 2\delta\theta_F, & c &= 2 \cos \theta_F \delta k_F \Big|_{\chi_F=\frac{\pi}{2}}, & d &= 2 \cos \theta_F \delta k_F \Big|_{\chi_F=0}, \\ m &= 2i \sin \theta_B \delta\varphi_B, & n &= 2i\delta\theta_B, & p &= 2i\delta k_B \Big|_{\chi_B=\frac{\pi}{2}}, & q &= 2i\delta k_B \Big|_{\chi_B=0}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Чтобы совершить переход от интегрирования по  $Q$  к интегрированию по  $W$ , нужно вычислить якобиан соответствующего преобразования. Он, однако, оказывается равным единице для обеих используемых параметризаций, что легко устанавливается из следующего равенства:

$$\begin{aligned} \text{str}(dQ)^2 &= \text{str}(dW)^2 = \\ &= da^2 + db^2 + dc^2 + dd^2 + dm^2 + dn^2 + dp^2 + dq^2 + d\lambda d\eta + d\mu d\gamma + d\zeta d\xi + d\varkappa d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

## Б Интегралы типа Эйри

В этом приложении мы посчитаем интегралы (1.61) и (2.77). Начнем с более сложного интеграла (1.61). По  $w$  можно проинтегрировать сразу (контур  $C_1$  на

Рис. 3). В результате плотность состояний сведется к сумме двух вкладов:

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{4\pi\Delta_g} \text{Im}[\text{Ai}(\epsilon)\rho_1(\epsilon) + \text{Ai}'(\epsilon)\rho_2(\epsilon)], \quad (\text{Б1})$$

$$\rho_1(\epsilon) = \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (l^3 + 3\epsilon l - lm + 1) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right), \quad (\text{Б2})$$

$$\rho_2(\epsilon) = \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (3l^2 - m + \epsilon) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \quad (\text{Б3})$$

Для вычисления  $\rho_{1,2}(\epsilon)$  будем пользоваться следующей тактикой. Сначала исключим  $m$  из предэкспоненты, выразив его через  $\partial/\partial l$ , затем избавимся от производных интегрированием по частям, выразим  $l$  через  $\partial/\partial m$  и, наконец, проинтегрируем по  $m$  там, где это возможно. В результате интеграл по  $l$  окажется тривиальным. Итак, начнем с  $\rho_1(\epsilon)$ .

$$\begin{aligned} \rho_1(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(-l \frac{\partial}{\partial l} + 2l^3 + 2\epsilon l + 1\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (2l^3 + 2\epsilon l + 2) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(2 \frac{\partial^3}{\partial m^3} + 2\epsilon \frac{\partial}{\partial m} + 2\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \left[ \left(-2\epsilon - 2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}\right) \Big|_{m=0} + 2 \int_0^\infty dm \right] \int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \end{aligned} \quad (\text{Б4})$$

Аналогично для  $\rho_2(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \rho_2(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(4l^2 - \frac{\partial}{\partial l}\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(-4 \frac{\partial}{\partial m}\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= -4 \frac{\partial}{\partial m} \Big|_{m=0} \int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \end{aligned} \quad (\text{Б5})$$

Интеграл по  $l$ , входящий в выражения для  $\rho_{1,2}$ , равен

$$\int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \pi [\text{Bi}(\epsilon - m) - i \text{Ai}(\epsilon - m)]. \quad (\text{Б6})$$

Подставляя  $\rho_{1,2}$  в (Б1) и используя функциональные соотношения для функций Эйри, приходим к выражению (1.63).

Интеграл (2.77) гораздо проще, поскольку не содержит переменной, аналогичной  $m$ , от которой нужно избавляться. Интегрируем сначала по  $u$  по кон-

туру  $C_1$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2\pi\Delta_g} \text{Im} \int_{C_2} dv [(\epsilon + v^2) \text{Ai}(\epsilon) + 2v \text{Ai}'(\epsilon)] \exp\left(-\epsilon v + \frac{v^3}{3}\right). \quad (\text{B7})$$

Интегрирование по переменной  $v$  вдоль контура  $C_2$  осуществляется при помощи тождества, аналогичного (B6)

$$\int_{C_2} dv \exp\left(-\epsilon v + \frac{v^3}{3}\right) = \pi [\text{Bi}(\epsilon) + i \text{Ai}(\epsilon)]. \quad (\text{B8})$$

Используя уравнение для функции Эйри, сразу получаем результат (2.78).

## В Роль мезоскопических флуктуаций

В этом приложении будут рассмотрены гауссовы флуктуации матрицы  $\tilde{Q}$  около найденного в разделе 4.1.2 стационарного решения  $\tilde{Q}$  и сделана оценка поправки в термодинамическую плотность состояний от этих флуктуаций. В целях упрощения все расчеты проводятся для нулевой температуры.

Для последующих вычислений оказывается удобным представить матрицу  $\tilde{Q}$  в качестве “повернутой” матрицы  $Q_S = \tau_x$ :

$$\tilde{Q}_{\epsilon\epsilon'} = V^{-1}(\epsilon) 2\pi \delta(\epsilon - \epsilon') \tau_x V(\epsilon'), \quad V(\epsilon) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_\epsilon}{2}\right) - i\tau_y \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_\epsilon}{2}\right). \quad (\text{B1})$$

На основе этого представления вводим параметризацию для произвольной матрицы  $\tilde{Q}$

$$\tilde{Q} = V^{-1} e^{-iW/2} \tau_x e^{iW/2} V, \quad \{\tau_x, W\} = 0, \quad (\text{B2})$$

$$W_{\epsilon\epsilon'}^{ab} = \tau_y c_{\epsilon\epsilon'}^{ab} + \tau_z d_{\epsilon\epsilon'}^{ab}. \quad (\text{B3})$$

Здесь проявляется одно из преимуществ представления (B1): условие антикоммутирования  $\{\tau_x, W\} = 0$  легко разрешается, и матрица  $W$  параметризуется двумя произвольными функциями  $c$  и  $d$ .

Мы интересуемся малыми отклонениями матрицы  $\tilde{Q}$  от седлового значения  $\tilde{Q}$ , поэтому сделаем в (B2) разложение до второго порядка по  $W$  (здесь и далее мы используем обозначение  $(d\epsilon) = d\epsilon/2\pi$ ):

$$\tilde{Q}_{\epsilon\epsilon'}^{ab} = \tilde{Q}_{\epsilon\epsilon'}^{ab} + V^{-1}(\epsilon) \tau_x \left[ iW_{\epsilon\epsilon'}^{ab} - \frac{1}{2} \sum_c \int (d\epsilon'') W_{\epsilon\epsilon''}^{ac} W_{\epsilon''\epsilon'}^{cb} \right] V(\epsilon'). \quad (\text{B4})$$

Подставляя это разложение в действие (4.18), разбиваем его на члены нулевого, первого и второго порядка по  $W$

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = S_0[\tilde{Q}, K] + S_1[\tilde{Q}, W, K] + S_2[\tilde{Q}, W, K]. \quad (\text{B5})$$

Первое слагаемое в этой сумме дается выражением (4.20), а остальные два имеют вид

$$\begin{aligned} S_1[\tilde{Q}, W, K] = & \frac{2\pi}{\delta} \sum_a \int (d\varepsilon) \varepsilon \sin \theta_\varepsilon c_{\varepsilon\varepsilon}^{aa} - \\ & - \frac{\pi G_{\text{T}}}{2} \sum_a \int (d\varepsilon d\varepsilon') d\tau e^{-i(\varepsilon-\varepsilon')\tau} \left[ \cos \frac{\theta_\varepsilon + \theta_{\varepsilon'}}{2} c_{\varepsilon\varepsilon'}^{aa} \cos 2K_\tau^a + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\theta_\varepsilon - \theta_{\varepsilon'}}{2} d_{\varepsilon\varepsilon'}^{aa} \sin 2K_\tau^a \right], \quad (\text{B6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2[\tilde{Q}, W, K] = & \frac{\pi}{\delta} \sum_{a,b} \int (d\varepsilon d\varepsilon') \varepsilon \cos \theta_\varepsilon (c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} + d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba}) + \\ & + \frac{\pi G_{\text{T}}}{4} \sum_{a,b} \int (d\varepsilon d\varepsilon' d\varepsilon'') d\tau e^{-i(\varepsilon-\varepsilon'')\tau} \left[ \sin \frac{\theta_\varepsilon + \theta_{\varepsilon''}}{2} (c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon''}^{ba} + d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon''}^{ba}) \cos 2K_\tau^a + \right. \\ & \left. + \sin \frac{\theta_\varepsilon - \theta_{\varepsilon''}}{2} (c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon''}^{ba} - d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon''}^{ba}) \sin 2K_\tau^a \right]. \quad (\text{B7}) \end{aligned}$$

Теперь можно разложить экспоненту  $e^{-S[\tilde{Q}, K]}$  по степеням  $S_1[\tilde{Q}, W, K]$  до второго порядка и  $S_2[\tilde{Q}, W, K]$  — до первого, вычислить функциональный интеграл по  $K$  с действием  $S_0[\tilde{Q}, K]$  и записать полученный результат в виде экспоненты  $e^{-S[\tilde{Q}]}$ . Это приводит к действию вида

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}] = S^{(0)}[\tilde{Q}] + S^{(1)}[\tilde{Q}, W] + S_0^{(2)}[\tilde{Q}, W] + S_{\text{int}}^{(2)}[\tilde{Q}, W], \quad (\text{B8})$$

где первое слагаемое  $S^{(0)}[\tilde{Q}]$  совпадает с выражением (4.23), а остальные члены имеют вид

$$S^{(1)} = \langle S_1 \rangle_K, \quad S_0^{(2)} = \langle S_2 \rangle_K, \quad S_{\text{int}}^{(2)} = -\frac{\langle S_1^2 \rangle_K - \langle S_1 \rangle_K^2}{2}. \quad (\text{B9})$$

При нулевой температуре интегрирование по флуктуациям  $K$  с действием  $S_0[\tilde{Q}, K]$  означает усреднение по основному состоянию гамильтониана (4.22). Используя тождества

$$\langle \cos 2K_\tau^a \rangle = \langle 0 | \cos 2K | 0 \rangle = \frac{\tilde{E}_g}{E_g}, \quad \langle \sin 2K_\tau^a \rangle = \langle 0 | \sin 2K | 0 \rangle = 0, \quad \text{tg } \theta_\varepsilon = \frac{\tilde{E}_g}{\varepsilon}, \quad (\text{B10})$$

получаем для первых двух средних в (B9)

$$S^{(1)} = \langle S_1 \rangle_K = \frac{2\pi}{\delta} \sum_a \int (d\varepsilon) (\varepsilon \sin \theta_\varepsilon - \tilde{E}_g \cos \theta_\varepsilon) c_{\varepsilon\varepsilon}^{aa} = 0, \quad (\text{B11})$$

$$\begin{aligned} S_0^{(2)} = \langle S_2 \rangle_K &= \frac{2\pi}{\delta} \sum_{a,b} \int (d\varepsilon d\varepsilon') (\varepsilon \cos \theta_\varepsilon + \tilde{E}_g \sin \theta_\varepsilon) (c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} + d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba}) = \\ &= \frac{\pi}{\delta} \sum_{a,b} \int (d\varepsilon d\varepsilon') \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2} + \sqrt{\varepsilon'^2 + \tilde{E}_g^2} \right) (c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} + d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba}). \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

Для вычисления  $\langle S_1^2 \rangle_K$  введем следующие обозначения

$$\langle \cos 2K_\tau^a \cos 2K_{\tau'}^b \rangle - \delta^{ab} \langle \cos 2K_\tau^a \rangle \langle \cos 2K_{\tau'}^b \rangle = \delta^{ab} X(\tau - \tau'), \quad (\text{B13})$$

$$\langle \sin 2K_\tau^a \sin 2K_{\tau'}^b \rangle = \delta^{ab} Y(\tau - \tau'), \quad (\text{B14})$$

$$x(\varepsilon, \varepsilon') = \cos \frac{\theta_\varepsilon + \theta_{\varepsilon'}}{2}, \quad y(\varepsilon, \varepsilon') = \cos \frac{\theta_\varepsilon - \theta_{\varepsilon'}}{2}, \quad \lambda = \left( \frac{2\pi E_g}{\delta} \right)^2. \quad (\text{B15})$$

Перекрестное среднее  $\langle \cos 2K_\tau^a \sin 2K_{\tau'}^b \rangle$ , очевидно, обращается в ноль. В частотном представлении функции (B13) и (B14) следующим образом выражаются через матричные элементы по собственным состояниям  $|n\rangle$  гамильтониана (4.22) и соответствующие собственные значения  $E_n$

$$X(\Omega) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | \cos 2K | n \rangle|^2 \frac{2(E_n - E_0)}{\Omega^2 + (E_n - E_0)^2}, \quad (\text{B16})$$

$$Y(\Omega) = \sum_n |\langle 0 | \sin 2K | n \rangle|^2 \frac{2(E_n - E_0)}{\Omega^2 + (E_n - E_0)^2}. \quad (\text{B17})$$

Используя обозначения (B15), (B16), (B17) и равенство (B11), можно выразить  $S_{\text{int}}^{(2)}$  в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}^{(2)} &= -\frac{\langle S_1^2 \rangle}{2} = -\frac{\lambda}{2} \sum_a \int (d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 d\varepsilon_4) 2\pi \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \\ &\times \left[ X(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) x(\varepsilon_1, \varepsilon_2) x(\varepsilon_3, \varepsilon_4) c_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{aa} c_{\varepsilon_3 \varepsilon_4}^{aa} + Y(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) y(\varepsilon_1, \varepsilon_2) y(\varepsilon_3, \varepsilon_4) d_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{aa} d_{\varepsilon_3 \varepsilon_4}^{aa} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B18})$$

Здесь становится очевидным еще одно преимущество представления (B1): после интегрирования по  $K$  переменные  $c$  и  $d$  разделились.

Действие  $S_0^{(2)}$  представляет собой квадратичную форму, которая диагональна в пространствах энергий и реплик. Это позволяет ввести затравочные пропагаторы для полей  $c$  и  $d$ :

$$C_0(\varepsilon, \varepsilon') \equiv \langle c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} \rangle_0 = D_0(\varepsilon, \varepsilon') \equiv \langle d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} \rangle_0 = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2} + \sqrt{\varepsilon'^2 + \tilde{E}_g^2}}. \quad (\text{B19})$$

Здесь символ  $\langle \dots \rangle_0$  обозначает усреднение с действием  $S_0^{(2)}$ .

Полное действие (B8) представляет собой сложную квадратичную форму по переменным  $s$  и  $d$ . Диагонализовать ее в общем виде не представляется возможным. Однако для оценки флуктуаций  $W$  достаточно обратиться к этой квадратичной форме, иными словами, вычислить точные пропагаторы

$$C^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = \langle c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'+\omega, \varepsilon+\omega}^{ba} \rangle, \quad D^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = \langle d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'+\omega, \varepsilon+\omega}^{ba} \rangle. \quad (\text{B20})$$

Оказывается, эта задача может быть решена точно.

Пропагаторы должны подчиняться соответствующим уравнениям Дайсона

$$C^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = C_0(\varepsilon, \varepsilon') \left[ 2\pi\delta(\omega) + \lambda\delta^{ab} X(\varepsilon - \varepsilon') x(\varepsilon, \varepsilon') \int (d\omega') x(\varepsilon + \omega', \varepsilon' + \omega') C^{aa}(\varepsilon + \omega', \varepsilon' + \omega'; \omega - \omega') \right], \quad (\text{B21})$$

$$D^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = D_0(\varepsilon, \varepsilon') \left[ 2\pi\delta(\omega) + \lambda\delta^{ab} Y(\varepsilon - \varepsilon') y(\varepsilon, \varepsilon') \int (d\omega') y(\varepsilon + \omega', \varepsilon' + \omega') D^{aa}(\varepsilon + \omega', \varepsilon' + \omega'; \omega - \omega') \right]. \quad (\text{B22})$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру, поэтому достаточно рассмотреть решение одного из них — первого.

Введем две новые функции

$$\bar{C}^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = x(\varepsilon, \varepsilon') C^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega), \quad \bar{\bar{C}}(\varepsilon, \varepsilon') = X(\varepsilon - \varepsilon') x^2(\varepsilon, \varepsilon') C_0(\varepsilon, \varepsilon') \quad (\text{B23})$$

и перепишем уравнение (B21) в виде

$$\bar{C}^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = 2\pi\delta(\omega) \bar{C}_0(\varepsilon, \varepsilon') + \lambda\delta^{ab} \bar{\bar{C}}(\varepsilon, \varepsilon') \int (d\omega') \bar{C}^{aa}(\varepsilon + \omega', \varepsilon' + \omega'; \omega - \omega'). \quad (\text{B24})$$

Чтобы избавиться от интеграла, сделаем преобразование Фурье по  $\omega$  и  $(\varepsilon + \varepsilon')/2$  следующего вида

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ab}(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2; \omega) &= \int d\tau dt e^{i\varepsilon\tau + i\omega t} \bar{C}^{ab}(\Omega, \tau; t), \\ \bar{\bar{C}}(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2) &= \int d\tau e^{i\varepsilon\tau} \bar{\bar{C}}(\Omega, \tau). \end{aligned} \quad (\text{B25})$$

В этом представлении из (B24) получаем функциональное уравнение

$$\bar{C}^{ab}(\Omega, \tau; t) = \bar{C}_0(\Omega, \tau) + \lambda \delta^{ab} \bar{C}(\Omega, t - \tau) \bar{C}^{aa}(\Omega, t; t), \quad (\text{B26})$$

которое выражает значение функции  $\bar{C}$  в точке  $(\Omega, \tau; t)$  через ее значение в точке  $(\Omega, t; t)$ . Последнее можно вычислить, подставив в уравнение  $\tau = t$  и  $a = b$ . В итоге решение имеет вид

$$\bar{C}^{ab}(\Omega, \tau; t) = \bar{C}_0(\Omega, \tau) + \frac{\lambda \delta^{ab} \bar{C}(\Omega, t - \tau)}{1 - \lambda \bar{C}(\Omega, 0)} \bar{C}_0(\Omega, t). \quad (\text{B27})$$

Выполняя преобразования Фурье, обратные к (B25), получаем решение уравнения (B21) и, аналогично, (B22)

$$C^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = C_0(\varepsilon, \varepsilon') \left[ 2\pi \delta(\omega) + \lambda \delta^{ab} X(\varepsilon - \varepsilon') \frac{x(\varepsilon, \varepsilon') x(\varepsilon + \omega, \varepsilon' + \omega)}{1 - \lambda C(\varepsilon - \varepsilon')} C_0(\varepsilon + \omega, \varepsilon' + \omega) \right], \quad (\text{B28})$$

$$D^{ab}(\varepsilon, \varepsilon'; \omega) = D_0(\varepsilon, \varepsilon') \left[ 2\pi \delta(\omega) + \lambda \delta^{ab} Y(\varepsilon - \varepsilon') \frac{y(\varepsilon, \varepsilon') y(\varepsilon + \omega, \varepsilon' + \omega)}{1 - \lambda \mathcal{D}(\varepsilon - \varepsilon')} D_0(\varepsilon + \omega, \varepsilon' + \omega) \right]. \quad (\text{B29})$$

Здесь мы ввели две функции экранирования

$$\mathcal{C}(\Omega) = \bar{C}(\Omega, 0) = X(\Omega) \int (d\varepsilon) [x(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2)]^2 C_0(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2), \quad (\text{B30})$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bar{D}(\Omega, 0) = Y(\Omega) \int (d\varepsilon) [y(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2)]^2 D_0(\varepsilon + \Omega/2, \varepsilon - \Omega/2). \quad (\text{B31})$$

Входящие сюда интегралы по  $\varepsilon$  логарифмически расходятся и должны быть обрезаны на  $|\varepsilon| \sim \Delta$ . Эта расходимость имеет то же происхождение, что и расходимость в выражении (4.25) для параметра  $q$ . Поэтому логарифмически большой вклад в (B30) и (B31) можно выразить через  $q$ , а сходящиеся части интегралов вычислить:

$$\mathcal{C}(\Omega) = \frac{\delta}{2\pi^2} X(\Omega) \left[ \frac{E_C \delta}{E_g \tilde{E}_g} q - \frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\tilde{E}_g^2}}{\Omega} \operatorname{arsh} \left( \frac{\Omega}{2\tilde{E}_g} \right) \right], \quad (\text{B32})$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \frac{\delta}{2\pi^2} Y(\Omega) \left[ \frac{E_C \delta}{E_g \tilde{E}_g} q - \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 4\tilde{E}_g^2}} \operatorname{arsh} \left( \frac{\Omega}{2\tilde{E}_g} \right) \right]. \quad (\text{B33})$$

Теперь, когда установлены точные средние  $\langle WW \rangle$  можно вычислить флуктуационную поправку к термодинамической плотности состояний

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \text{tr}[\tau_z \tilde{Q}_{\varepsilon\varepsilon}^{aa}] = \frac{2}{\delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_b \int (d\varepsilon') \left( \langle c_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} c_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} \rangle + \langle d_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} d_{\varepsilon'\varepsilon}^{ba} \rangle \right) \right]. \quad (\text{B34})$$

Если подставить в это выражение затравочные пропагаторы (B19) и устремить число реплик к нулю, поправка к плотности состояний обратится в ноль. Точные пропагаторы (B32) и (B33) отличаются от затравочных только при совпадающих репличных индексах, то есть в одном слагаемом суммы (B34) при  $b = a$ . Таким образом получаем

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\lambda}{2} \int (d\varepsilon') \left[ X(\varepsilon - \varepsilon') \frac{[x(\varepsilon, \varepsilon') C_0(\varepsilon, \varepsilon')]^2}{1 - \lambda \mathcal{C}(\varepsilon - \varepsilon')} + Y(\varepsilon - \varepsilon') \frac{[y(\varepsilon, \varepsilon') D_0(\varepsilon, \varepsilon')]^2}{1 - \lambda \mathcal{D}(\varepsilon - \varepsilon')} \right]. \quad (\text{B35})$$

Этот интеграл нужно оценить при  $\varepsilon \sim \tilde{E}_g$ . Характерный масштаб частот для функций  $X(\Omega)$  и  $Y(\Omega)$  определяется частотой флуктуации фазы  $K$ , которая, в силу используемого нами адиабатического приближения, велика по сравнению с  $\tilde{E}_g$ . Это позволяет подставить в интеграл (B35) значения  $X(0)$  и  $Y(0)$ .

Теперь нужно сделать оценки для функций экранирования. Для этого установим одно полезное тождество. Рассмотрим гамильтониан вида

$$E_C \left[ (-i\partial/\partial K + N)^2 - 2q \cos(2K + \chi) \right]. \quad (\text{B36})$$

Очевидно, его собственные значения не зависят от  $\chi$ . Если разложить косинус до второго порядка по малому  $\chi$  и вычислить поправку к энергии основного состояния по теории возмущений, она должна оказаться равной нулю:

$$0 = qE_C \left[ \langle 0 | \cos 2K | 0 \rangle - 4qE_C \sum_n \frac{|\langle 0 | \sin 2K | n \rangle|^2}{E_n - E_0} \right] \chi^2. \quad (\text{B37})$$

Сравнивая с определением (B17) функции  $Y(\Omega)$  и используя тождество (B10), приходим к равенству

$$\tilde{E}_g = 2E_g E_C q Y(0). \quad (\text{B38})$$

С помощью этого тождества и выражения (B33) можно переписать второй член (B35) в виде

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \Big|_{\text{II}} = \frac{\delta}{2} \int (d\varepsilon') \frac{x^2(\varepsilon, \varepsilon') \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')^2 + 4\tilde{E}_g^2}}{\left[ \sqrt{\varepsilon^2 + \tilde{E}_g^2} + \sqrt{\varepsilon'^2 + \tilde{E}_g^2} \right]^2 (\varepsilon - \varepsilon') \text{arsh} \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2\tilde{E}_g}}. \quad (\text{B39})$$

В этом выражении знаменатель обращается в ноль, и интеграл расходится, при  $\varepsilon' = \varepsilon$ . Расходимость вызвана наличием калибровочной свободы, связанной с выбором произвольной константы в фазе  $K$ , соответственно флуктуации  $W$  содержат нулевую моду. Однако это затруднение можно легко обойти. Для вычисления поправки к плотности состояний нужно сделать аналитическое продолжение на действительные энергии  $i\varepsilon \rightarrow E$ . Нас интересует величина плотности состояний при энергиях  $E \sim \tilde{E}_g$ . После формальной подстановки  $i\varepsilon \rightarrow \tilde{E}_g$  под знаком интеграла (B39), этот интеграл становится сходящимся и содержит единственный параметр размерности энергии  $\tilde{E}_g$ . Таким образом получаем оценку

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\Big|_{\text{II}} \sim \frac{\delta}{\tilde{E}_g}. \quad (\text{B40})$$

Теперь получим оценку для первого слагаемого (B35). Используя (B32), имеем

$$\frac{\lambda}{2} \frac{X(0)}{1 - \lambda\mathcal{C}(\Omega)} \approx \frac{\pi^2}{\delta} \left[ \frac{\sqrt{\Omega^2 + 4\tilde{E}_g^2}}{\Omega} \operatorname{arsh}\left(\frac{\Omega}{2\tilde{E}_g}\right) + \left( \frac{\delta}{2E_g^2 X(0)} - \frac{qE_c\delta}{E_g\tilde{E}_g} \right) \right]^{-1}. \quad (\text{B41})$$

В этом случае тождества, аналогичного (B38), не существует, и константа в круглых скобках в ноль не обращается. Однако оказывается, что она всегда положительна, поэтому отбрасывание этой константы приводит лишь к увеличению поправки к плотности состояний. При этом, как и в предыдущем случае, возникает интеграл, содержащий единственный параметр размерности энергии  $\tilde{E}_g$ , в котором нет никакой расходимости. В результате получаем оценку

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\Big|_{\text{I}} \lesssim \frac{\delta}{\tilde{E}_g}. \quad (\text{B42})$$

Суммируя (B40) и (B42), приходим к выводу, что поправка в плотность состояний на энергии  $E \sim \tilde{E}_g$  мала, если  $\tilde{E}_g \gg \delta$ . Отметим, что в случае слабого кулоновского взаимодействия, когда  $\tilde{E}_g \approx E_g$ , этот результат совпадает с требованием  $G_T \gg 1$ , которое обеспечивало применимость седлового приближения в главе 2.

## Г Разложение функционала Гинзбурга – Ландау

В этом приложении будет построено разложение функционала Гинзбурга – Ландау (4.52) для сверхпроводящей гранулы в контакте со сверхпроводником

по степеням параметра порядка  $\tilde{E}_g$ . Когда щель  $\tilde{E}_g$  стремится к нулю, параметр  $q$ , определяемый выражением (4.25), также бесконечно мал. Имея в виду, что разложение функционала необходимо для описания свойств системы около критической температуры, можно считать  $\tilde{E}_g \ll T$ . Выражение для  $q$  в этом пределе (4.59) было получено в разделе 4.1.6. Однако, поскольку теперь мы хотим получить разложение по степеням  $\tilde{E}_g$  до четвертого порядка, нам требуется более точная зависимость  $q$  от  $\tilde{E}_g$

$$q = \frac{E_g \tilde{E}_g}{E_C \delta} \left[ \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} - \frac{7\zeta(3)\tilde{E}_g^2}{8\pi^2 T^2} \right]. \quad (\Gamma 1)$$

Свободная энергия  $F_K$  фазы  $K$  является одним из слагаемых полной свободной энергии системы. Разложение  $F_K$  до второго порядка по  $q$  было проделано в разделе 4.1.6. Чтобы получить следующий член разложения, применяем термодинамическую теорию возмущений для гамильтониана (4.22). Поправка четвертого порядка к уровням энергии (4.60) имеет вид

$$E_m^{(4)} = \frac{[7 + 5(m + N)^2] E_C q^4}{32[4 - (m + N)^2][1 - (m + N)^2]^3}. \quad (\Gamma 2)$$

Соответствующая поправка к свободной энергии выражается в виде

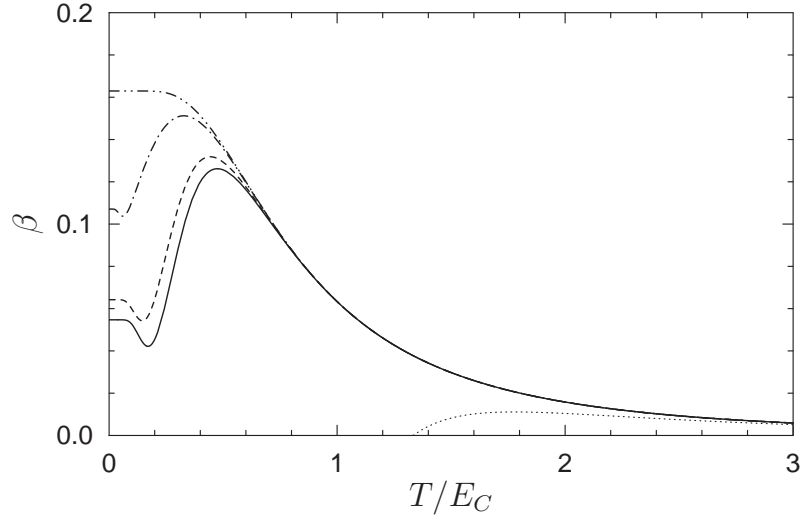
$$F_K^{(4)} = \langle E^{(4)} \rangle_0 - \frac{\langle (E^{(2)})^2 \rangle_0 - \langle E^{(2)} \rangle_0^2}{2T}, \quad (\Gamma 3)$$

где  $\langle \dots \rangle_0$  обозначает усреднение по распределению Гиббса с весами, определенными невозмущенными значениями энергетических уровней (4.60). В итоге можно представить свободную энергию, связанную с флуктуациями фазы  $K$ , в виде разложения

$$F_K(q, N, T) = F_K(0, N, T) - E_C \alpha(N, T) q^2 + E_C \beta(N, T) q^4. \quad (\Gamma 4)$$

Входящий сюда коэффициент  $\alpha(N, T)$  вычислялся в разделе 4.1.6, где для него было получено выражение (4.63). На основе формул (Г2) и (Г3) находим аналогичное выражение для  $\beta(N, T)$

$$\beta(N, T) = \frac{\sum_m \frac{e^{-(m+N)^2 E_C/T}}{8[1 - (m + N)^2]^2} \left[ \frac{7 + 5(m + N)^2}{4[4 - (m + N)^2][1 - (m + N)^2]} - \frac{E_C}{T} \right]}{\sum_m e^{-(m+N)^2 E_C/T}} + \frac{E_C}{2T} \alpha^2(N, T). \quad (\Gamma 5)$$



**Рис. Г1.** Функция температуры  $\beta(N, T)$  при различных значениях  $N$  (сплошная линия —  $N = 0$ , пунктирная —  $N = 0.2$ , штрихпунктирная —  $N = 0.4$ , штрихштрихпунктирная —  $N = 0.5$ ). При высоких температурах справедливо асимптотическое выражение (Г6), для которого построена точечная линия.

График этой функции изображен на Рис. Г1. Для дальнейших вычислений важно, что  $\beta(N, T)$  положительна при любой температуре. Также полезно установить асимптотические выражения

$$\beta(N, T) = \begin{cases} \frac{7 + 5N^2}{32(1 - N^2)^3(4 - N^2)}, & T \ll E_C; \\ \frac{1}{4} \left( \frac{E_C}{T} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{E_C}{T} \right)^4, & T \gg E_C. \end{cases} \quad (\text{Г6})$$

Теперь нужно сделать разложение свободной энергии электронной подсистемы (4.53) по степеням  $\tilde{E}_g$  в пределе  $\tilde{E}_g \ll T$ . При этом выделим большую константу, которая соответствует расходящемуся металлическому вкладу и не зависит от  $\tilde{E}_g$

$$F_e(\tilde{E}_g, T) = \text{const} + \frac{\tilde{E}_g^2}{\delta} \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} - \frac{21\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{\tilde{E}_g^4}{\delta T^2}. \quad (\text{Г7})$$

С помощью найденных разложений (Г1), (Г4) и (Г7) получаем разложение полной свободной энергии (4.52)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{E}_g, N, T) = & \text{const} + \frac{\tilde{E}_g^2}{\delta} \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \left[ 1 - \alpha(N, T) \frac{E_g^2}{E_C \delta} \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \right] + \\ & + \frac{\tilde{E}_g^4}{\delta T^2} \left[ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \left( -\frac{3}{2} + 2\alpha(N, T) \frac{E_g^2}{E_C \delta} \ln \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \right) + \beta(N, T) \frac{E_g^4 T^2}{E_C^3 \delta^3} \ln^2 \frac{2\gamma\Delta}{\pi T} \right]. \quad (\text{Г8}) \end{aligned}$$

Очевидно, что условие обращения в ноль коэффициента при  $\tilde{E}_g^2$  совпадает с уравнением на критическую температуру (4.65). Поскольку разложение функционала Гинзбурга – Ландау имеет смысл только вблизи критической температуры, можно сильно упростить выражение (Г8)

$$\mathcal{F}(\tilde{E}_g, N, T) = \text{const} + \frac{\tilde{E}_g^2}{\delta} \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right) + \frac{\tilde{E}_g^4}{\delta T_c^2} \left[ \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} + \frac{\beta(N, T_c)}{\alpha^2(N, T_c)} \frac{T_c^2}{E_C \delta} \right]. \quad (\text{Г9})$$

В силу положительности функции  $\beta(N, T)$  коэффициент при  $\tilde{E}_g^4$  также существенно положителен. Следовательно, по мере увеличения температуры щель  $\tilde{E}_g$  обращается в ноль непрерывно.

## Публикации по теме диссертации

- [1] P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, and M. V. Feigel'man, "Density of states below Thouless gap in SNS junction", *Phys. Rev. Lett.* **87**(2), 027002 (2001).
- [2] P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, M. V. Feigel'man, "Density of States in a Mesoscopic SNS Junction", *Письма в ЖЭТФ* **75**(7), 407 (2002).
- [3] П. М. Островский, М. А. Скворцов, М. В. Фейгельман, "Плотность квазилокализованных состояний в мезоскопических NS-системах", *ЖЭТФ* **123**(2), 399 (2003).
- [4] P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, and M. V. Feigelman, "Coulomb Blockade of Proximity Effect at Large Conductance", *Phys. Rev. Lett.* **92**(17), 176805 (2004).
- [5] P. M. Ostrovsky and M. V. Feigelman, "Coulomb Effects in Nanoscale SINIS Junction", *Письма в ЖЭТФ* **79**(10), 602 (2004).

## Литература

- [1] Й. Имри, *Введение в мезоскопическую физику*, Москва, Физматлит, 2004.
- [2] Yu. Makhlin, A. Shnirman, G. Schön, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001) и ссылки в этой работе.
- [3] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).
- [4] А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ*, **46**, 1823 (1964); **49**, 655 (1965); **51**, 1510 (1966).
- [5] И. О. Кулик, *ЖЭТФ* **57** 1745 (1969).
- [6] J. A. Melsen, P. W. Brouwer, K. M. Frahm, C. W. J. Beenakker, *Europhys. Lett.* **35**, 7 (1996); *Physica Scripta* **T69**, 223 (1997).
- [7] A. Lodder, Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. B* **58**, 5783 (1998).
- [8] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1990.
- [9] N. Argaman, U. Smilansky, Y. Imry, *Phys. Rev. B* **47**, 4440 (1993).
- [10] А. Ю. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **12**, 2262 (1968).
- [11] G. Eilenberger, *Z. Phys.* **214**, 195 (1968).
- [12] K. Usadel, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 507 (1970).
- [13] А. А. Голубов, М. Ю. Куприянов, *ЖЭТФ* **96**, 1420 (1989).
- [14] F. Zhou, P. Charlat, B. Spivak, B. Pannetier, *J. Low Temp. Phys.* **110**, 841 (1998).
- [15] S. Pilgram, W. Belzig, C. Bruder, *Phys. Rev. B* **62**, 12462 (2000).
- [16] И. М. Лифшиц, *УФН*, **83**, 617 (1964).

- [17] B. I. Halperin, M. Lax, Phys. Rev. **148**, 722 (1966).
- [18] J. Zittarz, J. S. Langer, Phys. Rev. **148**, 741 (1966).
- [19] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Москва, Наука, 1982.
- [20] E. Brezin, D. J. Gross, C. Itzykson, Nucl. Phys. B **235** [FS], 24 (1984).
- [21] Л. Б. Иоффе, М. В. Фейгельман, ЖЭТФ **89**, 654 (1985).
- [22] K. B. Efetov, V. G. Marikhin, Phys. Rev. B, **40**, 12126 (1989).
- [23] A. V. Balatsky, S. A. Trugman, Phys. Rev. Lett. **79**, 3767 (1997).
- [24] A. V. Shytov, I. Vekhter, I. A. Gruzberg, A. V. Balatsky, Phys. Rev. Lett. **90**, 147002 (2003).
- [25] E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951).
- [26] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140, 157, 166 (1962).
- [27] M. L. Mehta, *Random matrices*, New York, Academic, 1991.
- [28] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
- [29] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **48**, 1407 (1965).
- [30] К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **83**, 883 (1982).
- [31] Б. Л. Альтшулер, Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **91**, 220 (1986).
- [32] C. A. Tracy, H. Widom, Comm. Math. Phys. **159**, 151 (1994); **177**, 727 (1996).
- [33] M. G. Vavilov, P. W. Brouwer, V. Ambegaokar, C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **86**, 874 (2001).
- [34] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
- [35] I. S. Beloborodov, B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, Phys. Rev. Lett. **85**, 816 (2000).
- [36] K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, New York, 1997.

- [37] A. Altland, B. D. Simons, D. Taras-Semchuk, Письма в ЖЭТФ **67**, 21 (1997); Adv. Phys. **49**, 321 (2000).
- [38] A. Lamacraft, B. D. Simons, Phys. Rev. Lett. **85**, 4783 (2000); Phys. Rev. B **64**, 014514 (2001).
- [39] I. Vekhter, A. V. Shytov, I. A. Gruzberg, A. V. Balatsky, *Proceedings of the 23rd International Conference on Low Temperature Physics*, Physica B **329–333**, 1446 (2003).
- [40] S. F. Edwards, P. W. Anderson, J. Phys. F **5**, 965 (1975);  
A. Nitzan, K. H. Freed, M. H. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
- [41] Vik. S. Dotsenko, M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, Soviet Scientific Reviews **15**, edited by I. M. Khalatnikov, London, Harwood Academic Publishers GmbH, 1990.
- [42] B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, p. 449 in *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. L. Altshuler, P. A. Lee, R. A. Webb, Amsterdam, North-Holland, 1991.
- [43] B. A. Muzykantskii, D. E. Khmel'nitskii, Phys. Rev. B **51**, 5480 (1995).
- [44] V. I. Fal'ko, K. B. Efetov, Europhys. Lett. **32**, 627 (1995).
- [45] A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **53**, 1168 (1996).
- [46] S. Guéron, H. Pothier, N. O. Birge, D. Esteve, M. H. Devoret, Phys. Rev. Lett. **77**, 3025 (1996).
- [47] M. Vinet, C Chapelier, F. Lefloch, Phys. Rev. B **63**, 165420 (2001).
- [48] N. Moussy, H. Courtois, B. Pannetier, Europhys. Lett. **55**, 861 (2001).
- [49] A. K. Gupta, L. Cretinon, N. Moussy, B. Pannetier, H. Courtois, Phys. Rev. B **69**, 104514 (2004).
- [50] W. Escoffier, C. Chapelier, N. Hadacek, J-C. Villegier, cond-mat/0403764 (2004).
- [51] *Single Charge Tunneling*, edited by H. Grabert and M. H. Devoret, New York, Plenum, 1992.

- [52] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, Solid State Commun. **30**, 115 (1979).
- [53] L. S. Levitov, A. V. Shytov, Письма в ЖЭТФ **66**, 200 (1997).
- [54] Yu. V. Nazarov, T. H. Stoof, Phys. Rev. Lett. **76**, 823 (1996).
- [55] A. Huck, F. W. J. Hekking, B. Kramer, Europhys. Lett. **41**, 201 (1998).
- [56] K. A. Matveev, L. I. Glazman, Phys. Rev. Lett. **81**, 3739 (1998).
- [57] Yu. Oreg, P. W. Brouwer, B. D. Simons, A. Altland, Phys. Rev. Lett. **82**, 1269 (1999).
- [58] A. M. Finkel'stein, Soviet Scientific Reviews **14**, edited by I. M. Khalatnikov, London, Harwood Academic Publishers GmbH, 1990.
- [59] Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58, 73 (1958).
- [60] П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Москва, Мир, 1967.
- [61] Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735 (1958);  
Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- [62] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [63] М. А. Skvortsov, V. E. Kravtsov, M. V. Feigel'man, Письма в ЖЭТФ **68**, 78 (1998).
- [64] М. Ю. Куприянов, В. Ф. Лукичев, ФНТ **8**, 1045 (1982).
- [65] А. В. Зайцев, ЖЭТФ, **86**, 1742 (1984).
- [66] W. Belzig, Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **87**, 197006 (2001).
- [67] T. Guhr, A. Müller-Groeling, H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [68] A. Altland, M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
- [69] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния*, Москва, Наука, 1980.
- [70] В. А. Muzykantskii, D. E. Khmel'nitskii, cond-mat/9601045 (1996).
- [71] A. D. Mirlin, Письма в ЖЭТФ **62**, 583 (1995).

- [72] A. D. Mirlin, Phys. Rep. **326**, 259 (2000).
- [73] J. W. Negele, H. Orland, Frontiers in Physics **68**, *Quantum Many-Particle Systems*, New York, Addison Wesley, 1987.
- [74] A. Kamenev, A. Andreev, Phys. Rev. B **60**, 2218 (1999).
- [75] A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **28**, 6281 (1983).
- [76] Р. Фейнман, *Статистическая механика. Курс лекций*, Москва, Мир, 1975.
- [77] V. Ambegaokar, A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 487 (1963).
- [78] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва, Физматлит, 1963.
- [79] X. Wang, H. Grabert, Phys. Rev. B **53**, 12621 (1996).
- [80] G. Schön, A. D. Zaikin, Phys. Rep. **198**, 237 (1990).
- [81] L. I. Glazman, F. W. J. Hekking, K. A. Matveev, R. I. Shekhter, Physica B **203**, 316 (1994).