

Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра физики твердого тела

**Релаксация спиновых волн
в квантовохолловском ферромагнетике**

Дипломная работа
студента 122 группы
Артюхина С.Л.

Научный руководитель
Дикман С.М.

Черноголовка 2007

Содержание

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | Список используемых обозначений | 4 |
| 3 | Квантовохолловский ферромагнетик | 5 |
| 4 | Спин-орбитальное взаимодействие | 7 |
| 5 | Экситонное представление | 8 |
| 5.1 | Кулоновская энергия | 8 |
| 5.2 | Операторы экситонного представления | 11 |
| 6 | Дисперсия спин-экситонов в КХФ | 11 |
| 7 | Кулоновская энергия | 13 |
| 8 | Плавный случайный потенциал | 19 |
| 9 | Спиновая релаксация за счет плавного случайного потенциала | 21 |
| 9.1 | Низкие температуры ($\beta \gg 1$) | 24 |
| 9.2 | Высокие температуры ($\beta \ll 1$) | 25 |
| 10 | Сравнение с вкладом других механизмов | 25 |
| 10.1 | Спиновая релаксация, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием и заряженными примесями | 25 |
| 10.2 | Электрон-фоонное + спин-орбитальное взаимодействие | 26 |
| 10.3 | Кулоновское + спин-орбитальное взаимодействие | 27 |
| 11 | Заключение | 29 |

1 Введение

Релаксация спиновых волн в квантовохолловском ферромагнетике (в двумерном электронном газе (2DEG) с нечетным заполнением) представляет собой не только релаксацию полного спинового момента системы к своему равновесному значению, но и релаксацию энергии, так как каждая спиновая волна (спиновый экситон) отделен от основного состояния энергетической щелью, равной зеемановской энергии. Таким образом, релаксация спиновых волн обусловлена наличием механизма, который не только обеспечивает смешивание различных спиновых состояний, необходимое для переворота спина, но и приводит к диссипации зеемановской энергии, трансформируя ее в тепловую энергию 2DEG или энергию фононов.

За счет чего может происходить смешивание спиновых состояний? Это может быть магнитное взаимодействие (взаимодействие с магнитными примесями, дырками, контактное взаимодействие с ядрами) или спин-орбитальное взаимодействие, которое для двумерных электронов в реальных гетероструктурах весьма существенно. Именно последнее, сводящееся к механизмам Дрессельхауза [2, 3] и Рашбы [11], мы учтем в качестве причины, смешивающей спиновые состояния¹. В то же время, диссипация энергии может происходить как за счет кулоновского взаимодействия, эффективно сводящегося к диполь-дипольному взаимодействию спиновых экситонов [4], так и из-за наличия беспорядка в системе [5]. Такой беспорядок неизбежно возникает из-за внешнего случайного потенциала, создаваемого ионизованными примесями, расположенными за спейсером. Случайный потенциал (Smooth Random Potential, SRP) является плавным, он определяется расстоянием до примесей и характеризуется корреляционной длиной 300-500Å. В настоящей работе мы рассмотрим SRP в качестве механизма, обеспечивающего диссипацию энергии, и сравним рассчитанный темп релаксации спиновых экситонов с результатами работы [4].

В единичном акте релаксации сохраняется энергия. Существенным различием между кулоновским взаимодействием и SRP является то, что

¹ Анализ показывает, что в чистом 2DEG (в отсутствие дырок и магнитных примесей) в сильном магнитном поле, когда магнитное взаимодействие с ядрами не может обеспечить трансформации энергии из-за огромной разницы между зеемановской энергией электрона и ядра, спин-орбитальное взаимодействие действительно является определяющим для интересующего нас эффекта.

в отличие от кулоновского взаимодействия, при наличии SRP не сохраняется полный импульс взаимодействующих экситонов, поэтому, несмотря на малость спин-орбитального взаимодействия по сравнению с кулоновским, фазовый объем вступающих в акт релаксации экситонов значительно больше, что позволяет ожидать сравнимые вклады обоих процессов в темп релаксации.

Закон сохранения энергии накладывает существенные ограничения на возможный акт релаксации. В частности, релаксация одного экситона, как возбуждения с ненулевой энергией, противоречит закону сохранения энергии.

При наличии слабого спин-орбитального взаимодействия гамильтониан диагонализуется в рамках теории возмущений. В полученном таким образом базисе волновых функций с заданной *спиральностью* SRP имеет ненулевые матричные элементы для перехода из двухэкситонного состояния в одноэкситонное. Это приводит к дополнительному вкладу в темп релаксации, который при некоторых (весьма распространенных) условиях является главным.

2 Список используемых обозначений

| | |
|----------------------|--|
| λ | магнитная длина |
| $\Delta = g\mu_B B$ | зеemanовская энергия |
| u, v | константы спин-орбитального взаимодействия |
| Q_q^+, Q_q | операторы рождения и уничтожения экситона |
| n | номер уровня Ландау |
| κ | диэлектрическая проницаемость среды |
| m^* | эффективная масса электрона |
| M | эффективная масса экситона |
| N_Φ | вырождение уровня Ландау |
| ω_c | циклотронная частота |
| ν | заполнение |
| N | число электронов |
| μ | химический потенциал |
| $\beta = \Delta/T$ | |
| $\varphi(r)$ | случайный потенциал |
| $U(r)$ | Кулоновское взаимодействие |
| $\Psi^+(r), \Psi(r)$ | полевые операторы электронов |
| a, b | операторы уничтожения электронов на нижнем и верхнем спиновых подуровнях |

3 Квантовохолловский ферромагнетик

Рассмотрим квазидвумерный электронный газ (2DEG), сформированный полупроводниковой гетероструктурой (например, GaAs/AlGaAs).

Будем считать, что энергия пространственного квантования $\sim \hbar^2/m^*d^2$ велика по сравнению с другими вкладами в энергию электрона, и поэтому заселен только нижний уровень пространственного квантования. В этом смысле мы будем называть электронный газ двумерным (2 dimensional electron gas — 2DEG).

Выберем ось z прямоугольной системы координат перпендикулярно плоскости 2DEG, оси x и y - в плоскости.

Приложим сильное магнитное поле $B \sim 10$ Тл вдоль оси z .

Выберем калибровку Ландау вектор-потенциала $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$, что соответствует $\mathbf{A} = (0, 0, B)$.

В пренебрежении взаимодействием электронов уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} \left(\hat{x} + \frac{cy}{eB} \right)^2 \right) \psi = E\psi \quad (1)$$

Применительно к электронам в полупроводниковой гетероструктуре GaAs/AlGaAs, нужно учитывать, что эффективная масса электрона составляет $m \approx 0.07m_e$.

Нормированные решения уравнения Шредингера имеют вид [6]

$$\Psi(x, y) = L^{-1/2} \sum_{k,n} (a_{n,k} |\uparrow\rangle + b_{n,k} |\downarrow\rangle) e^{iky} \xi_n(x\lambda^{-1} + k\lambda) \quad (2)$$

и образуют ортогональный базис. Через ξ мы обозначили функцию безразмерного аргумента

$$\xi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-t^2/2} H_n(t) \quad (3)$$

$H_n(t)$ — полином Эрмита. Мы используем обозначения $\omega = \frac{eB}{m^*c}$ для циклотронной частоты и $\lambda = \sqrt{\frac{c\hbar}{eB}}$ для магнитной длины.

Отметим, что характерным размером волнового пакета частицы в магнитном поле является магнитная длина. Ее и выберем в качестве единицы длины.

Без ограничения общности будем считать, что электронный газ заключен в квадратной области $L \times L$.

Энергия электронов с учетом спина имеет вид

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - g\mu_B B\sigma, \quad \frac{\mu}{s} = -\frac{|e|\hbar}{mc} \Rightarrow E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \sigma \right) \quad (4)$$

Каждый уровень Ландау вырожден (в калибровке Ландау по k_y), вырождение определяется магнитным полем:

$$N_\Phi = \frac{L^2}{2\pi\lambda^2}$$

С учетом эффективной массы электрона $m^* = 0.07m$

$$\omega_c \frac{eB}{m^*c}$$

В полупроводниковой гетероструктуре GaAs/AlGaAs фактор Ланде равен $g = -0.44$, поэтому нет вырождения, характерного для свободных электронов, и спектр имеет вид, представленный на Рис. 1.

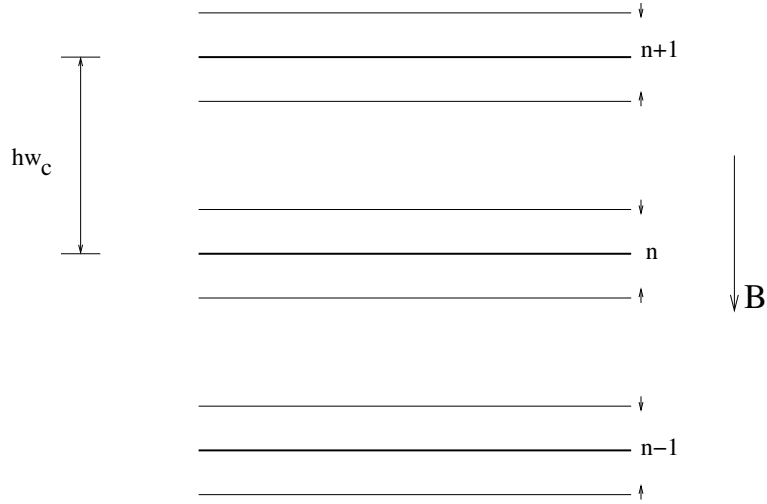


Рис. 1: Зееман-расщепленные уровни Ландау

Изменяя напряжение, приложенное к затвору, можно менять химический потенциал, а вместе с ним и концентрацию электронов в 2DEG.

Число заполненных уровней Ландау - число заполнения - определяется как отношение числа электронов N к числу состояний на одном спиновом подуровне $\nu = N/N_\Phi$.

При целых нечетных ν система имеет ферромагнитное основное состояние и получила в литературе название "квантовохолловский ферромагнетик".

Целью настоящей работы является изучение релаксации низколежащих возбуждений в квантовохолловском ферромагнетике.

4 Спин-орбитальное взаимодействие

Спин-орбитальный гамильтониан имеет вид

$$H_{so} = \alpha[k \times \sigma] + \beta(k_y \sigma_y - k_x \sigma_x)$$

Слагаемое с коэффициентом α впервые введено Э. И. Рашба [11], в кубических полупроводниках оно появляется в результате приложения напряжения к затвору, или при однородной деформации в направлении, не совпадающем с кристаллографическим.

Другое слагаемое получено Дрессельхаузом для полупроводников без центра инверсии [2] (также см. [3]). В обозначениях

$$k_{\pm} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(k_x \pm ik_y), \quad \mathbf{k} = -i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}$$

имеем:

$$H_{so} = -\sqrt{2}(\alpha(k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-) + i\beta(k_+ \sigma_- + k_- \sigma_+)) \quad (5)$$

Используя формулы

$$\partial_x H_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

получаем

$$k_+ |np\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$k_- |np\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

Матричные элементы

$$\langle np \downarrow | H_{so} | mq \uparrow \rangle = -\langle np | (\alpha\sqrt{m+1} |m+1, q\rangle - i\beta\sqrt{m} |m-1, q\rangle) \quad (6)$$

$$\langle np \uparrow | H_{so} | mq \downarrow \rangle = -\langle np | (\alpha\sqrt{m} |m-1, q\rangle + i\beta\sqrt{m+1} |m+1, q\rangle) \quad (7)$$

По теории возмущений для поправки первого порядка к собственным функциям имеем

$$|np \uparrow\rangle^{(1)} = \frac{1}{\hbar\omega_c} \left(\alpha\sqrt{n+1}|n+1, p \downarrow\rangle + i\beta\sqrt{n}|n-1, p \downarrow\rangle \right) \quad (8)$$

$$|np \downarrow\rangle^{(1)} = \frac{1}{\hbar\omega_c} \left(-\alpha\sqrt{n}|n-1, p \uparrow\rangle + i\beta\sqrt{n+1}|n+1, p \uparrow\rangle \right) \quad (9)$$

Индекс σ в волновых функциях $|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + |n\rangle^{(1)}$ называется *спиральностью*. Выпишем волновые функции электронов в состояниях с заданными $n, p, \sigma(+, -)$:

$$\psi_{np+} = \frac{e^{ipy}}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} \psi_{n,p} \\ v\sqrt{n+1}\psi_{n+1,p} + iu\sqrt{n}\psi_{n-1,p} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\psi_{np-} = \frac{e^{ipy}}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} -v\sqrt{n}\psi_{n-1,p} + iu\sqrt{n+1}\psi_{n+1,p} \\ \psi_{n,p} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

5 Экситонное представление

5.1 Кулоновская энергия

Пусть \hat{a}_q и \hat{b}_q - фермиевские понижающие операторы для состояний $|\uparrow, q\rangle$ и $|\downarrow, q\rangle$ соответственно.

Чтобы приблизиться к рассмотрению многочастичной задачи, изучим вклад кулоновской энергии взаимодействия электронов в гамильтониан

$$H_{e-e} = \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}') U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r})$$

Мы пренебрегаем краевыми эффектами, поэтому в интегралах по пластинке можно отбрасывать слагаемые с малостью λ/L .

$U(q)$ - Фурье-компонента эффективного кулоновского потенциала. Для идеально двумерного случая $U(q) = \frac{e^2}{\epsilon\lambda} \frac{2\pi}{q}$, отклонение от двумерности можно учесть введением в подынтегральное выражение форм-фактора, зависящего от геометрии ямы.

Выражая кулоновскую энергию через Фурье-образ,

$$U(r) = \frac{e^2}{\epsilon r} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon} \int d^2s e^{isr} \frac{1}{s}$$

и используя

$$\hat{\Psi}(x, y) = \frac{e^{ipy}}{\sqrt{L}} \left[\hat{a}_{np} \chi_{an}(x+p) + \hat{b}_{np} \chi_{bn}(x+p) \right] \quad (12)$$

с соответствующими спинорами в форме

$$\chi_a(x) = \begin{pmatrix} \psi_n(x) \\ v\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) + iu\sqrt{n}\psi_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\chi_b(x) = \begin{pmatrix} -v\sqrt{n}\psi_{n-1}(x) + iu\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (14)$$

где выражение для координатной части волновой функции электрона на уровне Ландау

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} \exp(-(x+p)^2/2) H_n(x+p) \quad (15)$$

получаем в представлении вторичного квантования

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L^2} \sum_{\sigma\sigma'\eta\eta'} \int dr dr' \frac{1}{(2\pi)^6} dp dp' dq dq' d^2s \\ & e^{-ipy} a_{p\sigma}^+ \chi_{\sigma}^+(x+p) e^{-ip'y'} a_{p'\sigma'}^+ \chi_{\sigma'}^+(x'+p') \\ & \frac{2\pi e^2}{\varepsilon s} e^{is(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\ & e^{iq'y'} a_{p'\eta'} \chi_{\eta'}(x'+q') e^{iqy} a_{p\eta} \chi_{\eta}(x+q) \quad (16) \end{aligned}$$

Сначала проинтегрируем по y, y' , получаемые дельта-функции Дирака обеспечивают сохранение импульса в вершинах:

$$\frac{1}{L^2} \int dy e^{iy(-p+s_y+q)} \int dy' e^{iy'(-p'-s_y+q')} = \frac{1}{L^2} L\delta(s_y+q-p) L\delta(q'-s_y-p')$$

Затем избавимся от дельта-функций, интегрируя по q, q' , и выполним замены $x = \tilde{x} - p + s_y/2, x' = \tilde{x}' - p' - s_y/2$, после чего выражение принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2s}{s} F_{\chi_{\sigma}, \chi_{\eta}}(\mathbf{s}) F_{\chi_{\sigma'}, \chi_{\eta'}}(-\mathbf{s}) \frac{dp dp'}{(2\pi)^2} e^{is_x(p'-p+s_y)} a_{p\sigma}^+ a_{p'\sigma'}^+ a_{p'+s_y, \eta'} a_{p-s_y, \eta}$$

Здесь $F_{\chi_\sigma, \chi_{\sigma'}}(\mathbf{s}) = \int dx \chi_\sigma^+(x + s_y/2) \chi_{\sigma'}(x - s_y/2) e^{is_x x} = F_{\chi_{\sigma'}, \chi_\sigma}^+(-\mathbf{s})$. Вычислим F для электронов на двух нижних уровнях Ландау (Полиномы Эрмита $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$, интегралы гауссовы):

$$F_{\psi_0, \psi_0}(s) = e^{-s^2/4} \quad (17)$$

$$F_{\psi_0, \psi_1}(s) = e^{-s^2/4} (is_x - s_y)/2, \quad (18)$$

$$F_{\psi_1, \psi_0}(s) = e^{-s^2/4} (is_x + s_y)/2, \quad (19)$$

Используя антикоммутиационные соотношения для фермионных операторов, нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} & \iint \frac{dp dp'}{(2\pi)^2} e^{is_x(p' - p + s_y)} a_{p\sigma}^+ a_{p'\sigma'}^+ a_{p'+s_y, \eta'} a_{p-s_y, \eta} = \\ & e^{-is_x s_y} \int e^{-is_x p} a_{p+s_y/2, \sigma}^+ a_{p-s_y/2, \eta} \frac{dp}{2\pi} \int e^{is_x p'} a_{p'-s_y/2, \sigma'}^+ a_{p'+s_y/2, \eta'} \frac{dp'}{2\pi} - \\ & e^{-is_x s_y} \int \frac{dp}{2\pi} a_{p, \sigma}^+ a_{p, \eta'} \delta_{\sigma', \eta} = \\ & e^{-is_x s_y} \left(\sqrt{N} Q_{a_\sigma a_\eta}^+(\mathbf{s}) \sqrt{N} Q_{a_{\sigma'} a_{\eta'}}^+(-\mathbf{s}) - \sqrt{N} Q_{a_\sigma a_{\eta'}}^+(0) \delta_{\sigma', \eta} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} H_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'\eta\eta'} \int d^2 s U(s) F_{\chi_\sigma, \chi_\eta}(\mathbf{s}) F_{\chi_{\sigma'}, \chi_{\eta'}}(-\mathbf{s}) \times \\ \left(N Q_{a_\sigma a_\eta}^+(\mathbf{s}) Q_{a_{\sigma'} a_{\eta'}}^+(-\mathbf{s}) - \sqrt{N} Q_{a_\sigma a_{\eta'}}^+(0) \delta_{\sigma', \eta} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение

$$Q_{cd\mathbf{q}}^+ = N_\Phi^{-1/2} \sum_p \hat{d}_{p+q_y/2}^+ \hat{c}_{p-q_y/2} e^{-iq_x p} \quad (22)$$

Оператор (22) рождает возбуждение с волновым вектором q и спином 1 - спиновый экситон.

Ввиду инвариантности системы относительно поворотов вокруг оси z , полный спин и его проекция на ось z являются хорошими квантовыми числами.

В работе [1] было показано, что рождение экситона с $q = 0$ уменьшает проекцию полного спина, но не меняет S^2 , а рождение экситона с

$q \neq 0$ уменьшает значение S на единицу. Таким образом, спин системы и его проекция однозначно связаны с количествами нулевых и ненулевых экситонов в системе, поэтому релаксация спина есть релаксация экситонов.

5.2 Операторы экситонного представления

Как было показано в предыдущем разделе, выражение для кулоновского гамильтониана заметно упрощается при использовании операторов $Q_{\mathbf{q}}$. Эти операторы были впервые введены в работах Бычкова и Рашба [1]. Дальнейшее развитие эта техника получила в работах [7], [8]. Коммутационные соотношения для операторов (22) получаются непосредственно с помощью правил коммутации фермиевских операторов,

$$[Q_{ab\mathbf{p}}^+, Q_{cd\mathbf{q}}^+] = N_{\Phi}^{-1/2} (\delta_{ad} Q_{cb\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{-i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2} - \delta_{bc} Q_{ad\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2}) \quad (23)$$

$$Q_{\mathbf{p}} = Q_{ab\mathbf{p}}, \quad [Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}] = [Q_{\mathbf{p}}^+, Q_{\mathbf{q}}^+] = 0 \quad (24)$$

$$[Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}^+] = N_{\Phi}^{-1/2} (A_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2} - B_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{-i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2}) \quad (25)$$

Здесь удобства вычислений вслед за авторами [9] введены операторы

$$A_q^+ = N_{\Phi}^{-1/2} Q_{aa\mathbf{q}}^+, \quad B_q^+ = N_{\Phi}^{-1/2} Q_{bb\mathbf{q}}^+ \quad (26)$$

Для них легко получить правила действия на основное состояние

$$A_q^+ |0\rangle = \delta_{q,0} |0\rangle, \quad B_q^+ |0\rangle = 0 \quad (27)$$

а также коммутационные соотношения

$$[Q_{\mathbf{q}}, A_{\mathbf{p}}] = -N_{\Phi}^{-1} Q_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} e^{i[q\times p]_z/2} \quad (28)$$

$$[Q_{\mathbf{q}}, B_{\mathbf{p}}] = N_{\Phi}^{-1} Q_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} e^{-i[q\times p]_z/2} \quad (29)$$

6 Дисперсия спин-экситонов в КХФ

Для иллюстрации экситонного представления в действии вычислим закон дисперсии спиновых экситонов.

$$n = n' = 0, \quad \psi_0 = \pi^{-1/4} e^{-(x+py)^2/2} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{00}(\mathbf{q}) &= \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{qy}{2})^2/2} e^{-(x-\frac{qy}{2})^2/2} e^{iq_x x} dx = \\
&= \pi^{-1/2} e^{-q_y^2/4} \int e^{-x^2} e^{iq_x x} dx = \pi^{-1/2} e^{-q_y^2/4} \int e^{-(x-iq_x/2)^2} e^{-q_x^2/4} dx = e^{-\mathbf{q}^2/4}
\end{aligned} \tag{31}$$

при $\nu = 1$ в обозначениях $A_q^+ = N_\Phi^{-1/2} Q_{aaq}^+$, $B_q^+ = N_\Phi^{-1/2} Q_{bbq}^+$ гамильтониан приобретает вид

$$\begin{aligned}
H_{\text{Coul}} &= \frac{N_\Phi}{2} \int d\mathbf{q} \Phi_{0,0}(\mathbf{q}) \Phi_{0,0}(-\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) (Q_{aaq}^+ Q_{aaq} + 2Q_{aaq}^+ Q_{bbq} + Q_{bbq}^+ Q_{bbq}) = \\
&= \frac{N_\Phi^2}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) (A_q^+ A_q + 2A_q^+ B_q + B_q^+ B_q) \tag{32}
\end{aligned}$$

Используя (23), выполним вычисления:

$$\begin{aligned}
[H_{\text{Coul}}, Q_p^+] |0\rangle &= \frac{N_\Phi^2}{2} \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) [A_q^+ A_q + 2A_q^+ B_q + B_q^+ B_q, Q_p^+] = \\
\frac{N_\Phi}{2} \sum_{\mathbf{q}} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) &(-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q - A_q^+ Q_{p-q}^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ Q_{p-q}^+ e^{i\Theta} + B_q^+ Q_{p-q}^+ e^{i\Theta}) |0\rangle = \\
\sum_{\mathbf{q}} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) &(-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q + [-A_q^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ e^{i\Theta} + B_q^+ e^{i\Theta}, Q_{p-q}^+] + \\
&Q_{p-q}^+ (-A_q^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ e^{i\Theta} + B_q^+ e^{i\Theta})) |0\rangle = \\
\sum_{\mathbf{q}} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) &\left(-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q + \frac{1}{N_\Phi} (-Q_p^+ e^{i\Theta} (-e^{-i\Theta} + 2e^{i\Theta}) + Q_p^+ e^{-i\Theta} e^{i\Theta}) + \right. \\
&Q_{p-q}^+ (-A_q^+ (e^{-i\Theta} + 2e^{i\Theta}) + B_q^+ e^{i\Theta})) |0\rangle = \\
\sum_{\mathbf{q}} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) &(-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} \delta_{0,q} + Q_p^+ (2 - 2e^{2i\Theta}) + Q_p^+ \delta_{0,q}) |0\rangle = \\
&V(0)(-1 + 1) Q_{p-q}^+ |0\rangle + \sum_{\mathbf{q}} (1 - e^{2i\Theta}) Q_p^+ |0\rangle
\end{aligned}$$

Учитываем $2\Theta = [\mathbf{q}, \mathbf{p}] = qp \sin \alpha$

$$\int d\mathbf{q} V(q) e^{i\Theta} = \int_0^\infty q dq V(q) \int_{-\pi}^\pi d\alpha e^{iqp \sin \alpha} = \int_0^\infty q dq V(q) 2\pi J_0(pq) \tag{33}$$

В этом преобразовании использовано интегральное представление функции Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \xi - in\xi} d\xi \quad (34)$$

Энергия возбужденных состояний из гамильтониана (32):

$$E = 2\pi N_{\Phi}^2 \int_0^{\infty} qV(q)(1 - J_0(pq))dq \quad (35)$$

Подставляя $V(q) = \frac{q^2}{\kappa q}$ и воспользовавшись

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} I_{\nu}(bt) dt = \frac{\pi^{1/2}}{2a} e^{b^2/8a^2} I_{\nu/2} \left(\frac{b^2}{8a^2} \right), \quad (\text{Re } \nu > -1, \text{Re } a^2 > 0) \quad (36)$$

получаем

$$E(p) = g\mu_B B + \frac{e^2}{\kappa\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-p^2/4} I_0(p^2/4) \right] \quad (37)$$

Здесь I_0 - модифицированная функция Бесселя.

Этот результат впервые был получен в работе [10].

Графически закон дисперсии представлен на Рис.2.

7 Кулоновская энергия

При низких температурах, таких, что тепловой импульс $q_T = \sqrt{2MT} \ll \lambda^{-1}$, справедливо приближение эффективной массы для экситонов:

$$E(k) = \Delta + \frac{k^2}{2m}$$

Рассмотрим процесс превращения двух экситонов в один в результате кулоновского и спин-орбитального взаимодействий. При этом сохраняются энергия и импульс:

$$E(k_1) + E(k_2) = E(k), \quad k_1 + k_2 = k$$

Это определяет возможные углы между импульсами налетающих экситонов:

$$2\Delta + \frac{k_1^2 + k_2^2}{2m} = \Delta + \frac{k^2}{2m}$$

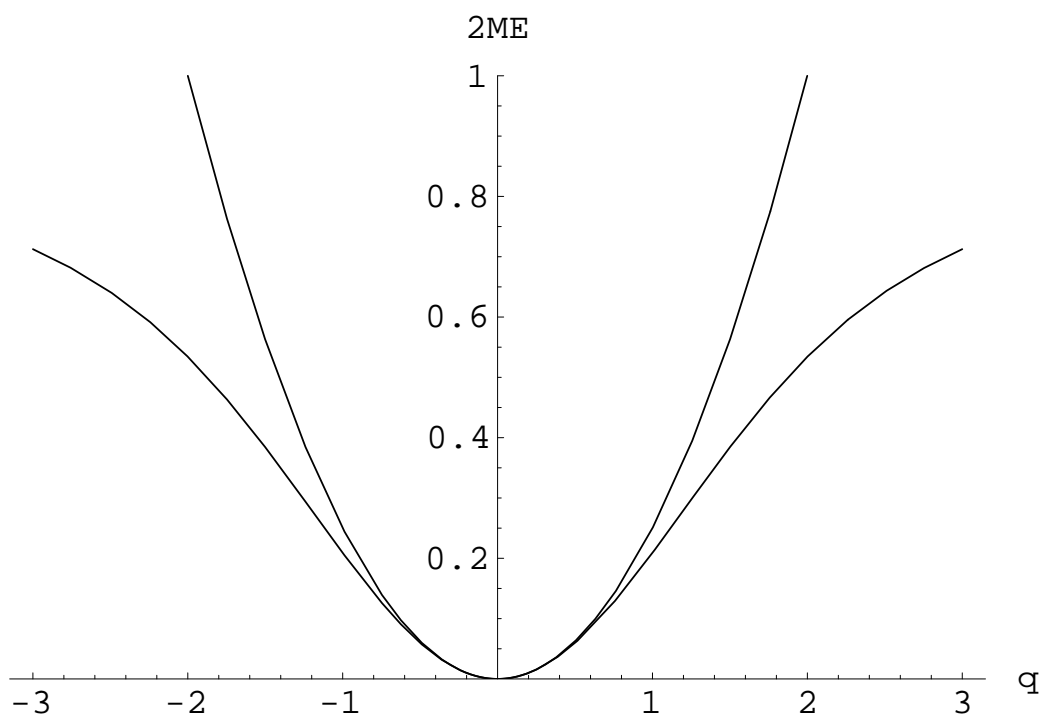


Рис. 2: Дисперсия спиновых экситонов (точная и в приближении эффективной массы)

$$\Delta = \frac{k_1 k_2 \cos \theta}{m}$$

$$\cos \theta = \frac{m\Delta}{k_1 k_2} < 1 \Rightarrow k_1 k_2 > m\Delta$$

Данному значению косинуса соответствуют два угла, для которых

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m\Delta}{k_1 k_2}\right)^2}$$

Для вычисления матричного элемента нам потребуются следующие соотношения:

$$[Q_p, A_q^+ + B_q^+] = N^{-1} Q_{p-q} 2i \sin \frac{p \times q}{2}$$

$$\langle Q_p Q_q^+ \rangle = \delta_{p,q}$$

$$\langle Q_{p_1} Q_{p_2} Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \rangle = \delta_{p_1+p_2, q_1+q_2} \left(\delta_{p_1, q_1} + \delta_{p_1, q_2} - \frac{2}{N} \cos \frac{[(p_1 - p_2) \times (q_1 - q_2)]_z}{4} \right)$$

$$H_{e^-e}^{(1)} = N^{1/2} \sum_q (vq_+ + iuq_-) U(q) e^{-q^2/2} (A_q^+ + B_q^+) Q_q + \text{H.c.}$$

$$\begin{aligned} & \langle Q_{q_1+q_2} (A_q^+ + B_q^+) Q_q Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \rangle = \\ & \left\langle \left\{ (A_q^+ + B_q^+) Q_{q_1+q_2} + N^{-1} 2i \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} \right\} Q_q Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \right\rangle = \\ & \delta_{q,0} \langle Q_{q_1+q_2} Q_q Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \rangle + \\ & N^{-1} 2i \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} \langle Q_{q_1+q_2-q} Q_q Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \rangle = \\ & \left(\delta_{q,0} + N^{-1} 2i \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} \right) \langle Q_{q_1+q_2-q} Q_q Q_{q_1}^+ Q_{q_2}^+ \rangle = \\ & \left(\delta_{q,0} + N^{-1} 2i \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} \right) \left(\delta_{q, q_1} + \delta_{q, q_2} - \frac{2}{N} \cos \frac{[(q_1 + q_2 - 2q) \times (q_1 - q_2)]_z}{4} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & [(q_1 + q_2 - 2q) \times (q_1 - q_2)]_z = \\ & q_2 \times q_1 - 2q \times q_1 - q_1 \times q_2 + 2q_1 \times q_2 = 2q \times (q_2 - q_1) - 2q_1 q_2 \quad (39) \end{aligned}$$

Поскольку для тепловых экситонов $q^2/2m \sim kT$ и в интересующей нас области температур $kT \ll \hbar\omega_c$, то $q \ll l_B^{-1}$ и в безразмерных единицах с $l_B = 1$ имеем $q_1 \ll 1$. Поэтому пренебрежем в (39) последним слагаемым $\sim q_T^2$.

Далее воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

и преобразуем (38):

$$\begin{aligned} M_2 = N^{1/2} \sum_q (vq_+ + iuq_-) e^{-q^2/2} \frac{2i}{N} \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} \left(\frac{-2}{N}\right) \cos \frac{(q_1 - q_2) \times q}{2} = \\ - 4iN^{-3/2} \sum_q (vq_+ + iuq_-) \frac{2\pi e^2}{\kappa q} e^{-q^2/2} \frac{1}{2} (\sin(q_1 \times q) + \sin(q_2 \times q)) \quad (40) \end{aligned}$$

Переходим от суммирования к интегрированию: $\sum_q = \frac{N}{2\pi} \int q dq d\varphi$.

$$q_{\pm} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(q_x \pm iq_y) = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}q(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}qe^{i\varphi}$$

Интеграл по углу в (40)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (vq_+ + iuq_-) \sin(q_1 \times q) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(v \frac{-i}{\sqrt{2}} q e^{i\varphi} + iu \frac{i}{\sqrt{2}} q e^{-i\varphi} \right) \sin(q_1 q \sin(\varphi - \varphi_1)) d\varphi$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm i\varphi} \sin(\alpha \sin(\varphi - \varphi_1)) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm i(\varphi + \varphi_1)} \sin(\alpha \sin \varphi) d\varphi = \\ e^{\pm i\varphi_1} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \sin(\alpha \sin \varphi) d\varphi \quad (41) \end{aligned}$$

Первый интеграл - от нечетной функции по симметричному промежутку, поэтому он равен нулю. Второй - табличный $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi \sin(\alpha \sin \varphi) d\varphi = 2\pi J_1(\alpha)$. Итак,

$$\begin{aligned} \int (vq_+ + iuq_-) \sin(q_1 \times q) d\varphi = \frac{q}{\sqrt{2}} 2\pi J_1(q_1 q) (ve^{i\varphi_1} + iue^{-i\varphi_1}) \\ M_2 = -4iN^{-3/2} \frac{N}{2\pi} \int q dq \frac{2\pi e^2}{\kappa q} e^{-q^2/2} \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{2}} 2\pi J_1(q_1 q) (ve^{i\varphi_1} + iue^{-i\varphi_1}) + \right. \\ \left. \frac{q}{\sqrt{2}} 2\pi J_1(q_2 q) (ve^{i\varphi_2} + iue^{-i\varphi_2}) \right) \quad (42) \end{aligned}$$

Интегрирование по модулю q дает

$$\int_0^{+\infty} q dq J_1(q_1 q) e^{-q^2/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} q_1 + o(q_1^2)$$

Экситоны термализуются с решеткой гораздо быстрее, чем два экситона превращаются в один неравновесный, поэтому их распределение можно считать равновесным с $q_T \sim \sqrt{2MT}l_B \ll 1$, следовательно, $e^{-q_1^2/2} = 1 + o(q_T)$.

$$M_2 = -\frac{i\pi^{3/2} e^2}{N^{1/2} \kappa} ((ve^{i\varphi_1} + iue^{-i\varphi_1})q_1 + (ve^{i\varphi_2} + iue^{-i\varphi_2})q_2) \quad (43)$$

Возвращаемся от (q, φ) к q_{\pm} , учитывая $e^2/\kappa = 2\sqrt{2}/M\sqrt{\pi}$

$$M_2 = -\frac{4\pi i}{MN^{1/2}} (ivq_{1+} + uq_{1-} + ivq_{2+} + uq_{2-}) \quad (44)$$

Теперь займемся вычислением M_1 .

$$\begin{aligned} M_1 &= N^{-1/2} \frac{2\pi e^2}{\kappa} 2i \sum_q \frac{1}{q} e^{-q^2/2} (vq_+ + iuq_-) \sin \frac{(q_1 + q_2) \times q}{2} (\delta_{q,q_1} + \delta_{q,q_2}) = \\ &= N^{-1/2} \frac{2\pi e^2}{\kappa} i [q_1 \times q_2] \left(\frac{vq_+ + iuq_-}{q} \Big|_{q_1}^{q_2} \right) = \\ &= N^{-1/2} \frac{2\pi e^2}{\kappa} i q_1 q_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{\sqrt{2}} (-ive^{i\varphi_2} - ue^{-i\varphi_2} + ive^{i\varphi_1} + ue^{-i\varphi_1}) \quad (45) \end{aligned}$$

Изменение количества экситонов в единицу времени

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^2 \int q_1 dq_1 d\varphi_1 q_2 dq_2 d\varphi_2 |M_1 + M_2|^2 \delta\left(\Delta - \frac{q_1 q_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{M}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^2 \int q_1 dq_1 d\varphi_1 q_2 dq_2 d\varphi_2 (M_1 + M_2)(M_1 + M_2)^* \frac{M}{q_1 q_2 |\sin \theta|} \delta\left(\varphi_2 - \varphi_1 \pm \arccos \frac{\Delta M}{q_1 q_2}\right) \quad (46) \end{aligned}$$

Здесь $\theta = |\arccos \frac{\Delta M}{q_1 q_2}|$.

Вычислим $\int d\varphi_1 d\varphi_2 M_1 M_1^*$

$$\begin{aligned}
M_1 M_1^* &\sim \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)(ve^{i\varphi_2} - iue^{-i\varphi_2} - ve^{i\varphi_1} + iue^{-i\varphi_1}) \times \\
&\quad (ve^{-i\varphi_2} + iue^{i\varphi_2} - ve^{-i\varphi_1} - iue^{i\varphi_1}) = \\
&\quad \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \left(4(u^2 + v^2) \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \right. \\
&\quad \left. 2uv(2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \right) \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d\varphi_1 |\sin \theta|^{-1} \sin^2 \theta (4(u^2 + v^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \\
&2uv(2(\sin(2\varphi_1 + \theta) + \sin(2\varphi_1 - \theta)) - 2 \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \theta) - \sin(\varphi_1 - \theta))) = \\
&\quad |\sin \theta| 8\pi(u^2 + v^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 M_2^* &\sim (q_1(ve^{i\varphi_1} + iue^{-i\varphi_1}) + q_2(ve^{i\varphi_2} + iue^{-i\varphi_2})) = \\
&\quad q_1^2(v^2 + u^2 + iuv(e^{-2i\varphi_1} - e^{2i\varphi_1})) + \\
&\quad q_2^2(v^2 + u^2 + iuv(e^{-2i\varphi_2} - e^{2i\varphi_2})) + \\
&\quad q_1 q_2(v^2(e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}) + \\
&\quad u^2(e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}) + \\
&\quad iuv(2e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} - 2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)})) = \\
&\quad q_1^2(u^2 + v^2 + 2uv \sin 2\varphi_1) + q_2^2(u^2 + v^2 + 2uv \sin 2\varphi_2) + \\
&\quad 2q_1 q_2((u^2 + v^2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2uv \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (49)
\end{aligned}$$

Интегрирование по углам дает

$$4\pi(u^2 + v^2)(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2 \cos \theta) = 4\pi(u^2 + v^2)(q_1^2 + q_2^2 + 2\Delta M)$$

В итоге, вместе с коэффициентом

$$\begin{aligned}
\int d\varphi_1 d\varphi_2 |M_2|^2 &= \frac{4\pi}{NMq_1 q_2 |\sin \theta|} (u^2 + v^2)(q_1^2 + q_2^2 + 2\Delta M) \\
q_1 q_2 |\sin \theta| &= q_1 q_2 \sqrt{1 - \left(\frac{M\Delta}{q_1 q_2}\right)^2} = \sqrt{(q_1 q_2)^2 - (M\Delta)^2}
\end{aligned}$$

Поскольку $q_1, q_2 \sim q_T \ll 1$, $M_2 M_2^* \sim q_T^2$, $M_1 M_1^* \sim (q_1 q_2)^2 \sim q_T^4$, $M_1 M_2^* + M_1^* M_2 \sim q_1 q_2 (q_1 + q_2) \sim q_T^3$, то в главном (втором) порядке по малому q_T достаточно сохранить $M_2 M_2^*$.

Обозначим $\xi = q_1^2/2MT$, $\eta = q_2^2/2MT$, $\beta = \Delta/T$

Тогда $q_1 dq_1 = MT d\xi$

$$\int d\varphi_1 d\varphi_2 |M_2|^2 = \frac{4\pi}{NMq_1q_2MT\sqrt{4\xi\eta - \beta^2}} (u^2 + v^2) 2MT(\xi + \eta + \beta)$$

Имея ввиду

$$\mu = \frac{\Delta N}{N_{\Phi} M} (e^{\epsilon/T} - 1) \quad (50)$$

$$\Xi = \frac{\mu}{T} \frac{e^{\xi+\eta}}{(e^{\xi} - 1)(e^{\eta} - 1)(e^{\xi+\eta} - 1)} \quad (51)$$

получим

$$\tau^{-1} = \frac{4(u^2 + v^2)(e^{\beta} - 1)T}{\pi\hbar} \int d\xi d\eta \frac{(\xi + \eta + \beta)}{\sqrt{4\xi\eta - \beta^2}(e^{\xi+\beta} - 1)(e^{\eta+\beta} - 1)(1 - e^{-\xi-\eta-2\beta})}$$

Эта формула была впервые получена в работе [4].

8 Плавный случайный потенциал

Как было отмечено во введении, заряженный беспорядок создает в гетероструктуре плавный случайный потенциал, который мы обозначим $\varphi(r)$. Рассмотрим вклад в энергию двумерных электронов при появлении такого потенциала:

$$H_{\varphi} = \int dr \Psi^+(r) \varphi(r) \Psi(r)$$

Подставляя Ψ из (12) и проводя вычисления аналогично тому, как это сделано для H_{Coul} в первой части, получаем

$$\begin{aligned}
H_\varphi &= \int dx dy e^{-ipy} \psi_n(x+p) (a_p^+ \chi_\downarrow + b_p^+ \chi_\uparrow) \times \\
&\quad \left[\int dq \varphi(q) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] e^{ip'y} \psi_n(x+p') (a_{p'}^+ \chi_\downarrow + b_{p'}^+ \chi_\uparrow) = \\
&= L \int d\mathbf{q} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) (a_p^+ a_{p-q_y} + b_p^+ b_{p-q_y}) \\
e^{-iq_x(p-q_y/2)} &\int dy e^{iq_x(x+p-q_y/2)} \psi((x+p-q_y/2) + q_y/2) \psi((x+p-q_y/2) - q_y/2) \\
&= N_\Phi^{1/2} \sum_{n,n'} \int d\mathbf{q} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \Phi_{n,n'}(\mathbf{q}) (\hat{A}_\mathbf{q} + \hat{B}_\mathbf{q}) \quad (52)
\end{aligned}$$

В обозначениях $v = \frac{\alpha l_b}{\hbar \omega_c}$, $u = \frac{\beta l_b}{\hbar \omega_c}$, собственные функции принимают вид

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi} &= \frac{e^{ipy}}{\sqrt{L}} \left[\hat{a}_{np} \begin{pmatrix} \psi_n \\ v\sqrt{n+1}\psi_{n+1} + iu\sqrt{n-1}\psi_{n-1} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}_{np} \begin{pmatrix} -v\sqrt{n-1}\psi_{n-1} + iu\sqrt{n+1}\psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} \right] \quad (53)
\end{aligned}$$

В результате прямых вычислений получаем выражение для гамильтониана SRP в экситонном представлении с заданной спиральностью:

$$\begin{aligned}
H_\varphi^{(1)} &= \int dr \Psi^\dagger(r) \varphi(r) \Psi(r) = \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) a_{p+q_y/2}^+ b_{p-q_y/2} e^{-iq_x p} \times \\
&\times (-v\sqrt{n}\Phi_{n,n'-1}(\mathbf{q}) + iu\sqrt{n+1}\Phi_{n,n'+1} + v\sqrt{n+1}\Phi_{n+1,n'}(\mathbf{q}) - iu\sqrt{n}\Phi_{n-1,n'}(\mathbf{q})) = \\
&= \sqrt{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) Q_{ba\mathbf{q}} \times \\
&\times (-v\sqrt{n'}\Phi_{n,n'-1}(\mathbf{q}) + iu\sqrt{n'+1}\Phi_{n,n'+1} + v\sqrt{n'+1}\Phi_{n+1,n'}(\mathbf{q}) - iu\sqrt{n'}\Phi_{n-1,n'}(\mathbf{q})) \quad (54)
\end{aligned}$$

Для $n = n' = 0$

$$\Phi_{10}(\mathbf{q}) = e^{-q^2/4} q_-, \quad \Phi_{01}(\mathbf{q}) = -e^{-q^2/4} q_+ \quad (55)$$

и мы получаем несохраняющую число экситонов часть гамильтониана в виде:

$$H_\varphi^{(1)} = \sqrt{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) e^{-q^2/4} (iuq_+ - vq_-) Q_{\mathbf{q}} + \text{H.c.} \quad (56)$$

Таким образом, нам удалось выразить $H_\varphi^{(1)}$ через фурье-компоненту плавного случайного потенциала. В реальной системе плавный случайный потенциал создают ионы, отдавшие электроны в двумерный электронный газ, и корреляционный радиус потенциала определяется расстоянием от электронного газа до этих ионов. Как мы увидим в дальнейшем, искомый эффект определяется квадратом Фурье-компоненты случайного потенциала. Сейчас мы покажем, как можно вычислить квадрат Фурье компоненты, зная корреляционную функцию потенциала. По определению,

$$\begin{aligned} K(r) &= \langle \varphi(R) \varphi(R+r) \rangle_R = \\ &= L^{-2} \frac{N_\Phi}{2\pi} \sum_{\mathbf{R}} \left(\frac{2\pi}{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \right) \left(\frac{2\pi}{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}'} \varphi(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}'(\mathbf{R}+\mathbf{r})} \right) = \\ &= N_\Phi^{-2} \sum_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{q}) \varphi(\mathbf{q}') = N_\Phi^{-2} \sum_{\mathbf{q}'} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}} |\varphi(\mathbf{q}')|^2 \end{aligned} \quad (57)$$

С другой стороны,

$$K(r) = \frac{2\pi}{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} K(q) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad (58)$$

Сравнивая последние два выражения, получаем

$$|\varphi(\mathbf{q})|^2 = \frac{K(\mathbf{q})}{2\pi N_\Phi} \quad (59)$$

Корреляционная функция плавного случайного потенциала имеет вид $K(r) = \Delta e^{-r^2/\Lambda^2}$. Тогда ее Фурье-компонента $K(q) = \pi \Delta \Lambda^2 e^{-\Lambda^2 q^2/4}$. В реальных образцах $\Lambda \sim 300\text{-}500 \text{ \AA}$, $\Delta \sim 5\text{-}10 \text{ К}$.

9 Спиновая релаксация за счет плавного случайного потенциала

В настоящее время в связи с обширными исследованиями в направлении создания квантовых компьютеров огромный практический интерес

представляет изучение релаксации неравновесного состояния двумерной системы электронов.

Значительное число работ посвящено исследованию *времени спиновой релаксации* в квантовохолловском ферромагнетике. Вклад в него дают различные механизмы, в частности, в работах [5] и [12] найдено время релаксации от комбинации спин-орбитального и кулоновского взаимодействия, а также спин-орбитального и электрон-фононного взаимодействий.

Мы рассчитаем вклад, обусловленный влиянием спин-орбитального взаимодействия и плавного случайного потенциала (smooth random potential-SRP).

Гамильтониан взаимодействия с SRP дается формулами (52), (56). С помощью соотношений (23) вычисляем:

$$M(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}' | H_\varphi^{(1)} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \lambda N_\Phi^{1/2} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(q) (iuq_+ - vq_-) \times \left\{ \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_1} \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}_2} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_2} \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}_1} - \frac{2}{N_\Phi} \cos \left[\frac{\mathbf{q}' \times (\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + \mathbf{q} \times \mathbf{q}_1}{2} \right] \delta_{\mathbf{q}' + \mathbf{q}, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} \right\} \quad (60)$$

Закон сохранения энергии для единичного акта релаксации имеет вид:

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{2M} + 2\Delta = \frac{q'^2}{2M} + \Delta \quad (61)$$

При достаточно низких температурах $q_1 \lambda \ll 1$, что позволяет косинус в (60) положить в 1. Далее, мы можем согласно золотому правилу Ферми вычислить *темп релаксации*, или изменение спина в единицу времени:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}'} \frac{2\pi}{\hbar} |M(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}')|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon') \Xi(n_1, n_2, n'), \quad (62)$$

где введены обозначение $\varepsilon_q = \frac{q^2}{2M} + \Delta$, $\Delta = g\mu_B B$ - зеемановская щель,

$$\Xi = [n_1 n_2 (1 + n') - (n_1 + 1)(n_2 + 1)n'] \quad (63)$$

Из (61) очевидно, что $q' > q_1, q_2$, и поэтому первые два члена в фигурных скобках в формуле (60) выпадают при интегрировании в (62).

В отсутствие взаимодействия с решеткой энергия электронного газа за каждый акт релаксации увеличивалась бы примерно на Δ . Но за

счет электрон-фононного взаимодействия экситоны быстро термализуются, поэтому процесс релаксации можно считать изотермическим. Учитывая огромное максимальное число заполнения для экситонов $\sim N_\Phi$, мы можем при небольших их количествах, в заключительной (и наиболее продолжительной) стадии релаксации считать их статистику Бозе-Эйнштейновской, и записать

$$n(q) = \frac{1}{\exp(q^2/2m + \Delta - \mu) - 1}, \quad (64)$$

где через μ обозначен химический потенциал. Эта формула представляет собой по сути первый член разложения по малому параметру—плотности экситонной системы. Найдем $\mu(N)$ при помощи самосогласованной процедуры

$$N = \sum_q n(q) = \frac{N_\Phi}{2\pi} \iint \frac{qd\theta dq}{\exp(q^2/2m + \Delta - \mu) - 1} = -N_\Phi MT \ln(1 - e^{-(\Delta - \mu)/T}) \quad (65)$$

Отклонение числа частиц от равновесного ($N = -N_\Phi MT \ln(1 - e^{-\Delta/T})$) дается выражением

$$\Delta N = -N_\Phi MT \ln\left(1 - \frac{\mu}{T} \frac{1}{e^{\Delta/T} - 1}\right) \quad (66)$$

Видим, что при малом отклонении от равновесного числа возбуждений μ мал; в равновесии $\Xi = 0$, поэтому Ξ можно разложить по μ , причем член при μ^0 должен быть равен нулю. Действительно, подсчет показывает, что

$$\mu = \frac{\Delta N}{N_\Phi M} (e^{\Delta/T} - 1) \quad (67)$$

$$\Xi = \frac{\mu}{T} \frac{e^{\xi + \eta}}{(e^\xi - 1)(e^\eta - 1)(e^{\xi + \eta} - 1)} \quad (68)$$

Напомним, что количество актов релаксации равно изменению спина электронной системы. Раскладывая (63) при малых μ , подставляя в (62) и пользуясь (60), производим переход к интегрированию

$$\sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}'} \sim \left(\frac{N_\Phi}{2\pi}\right)^3 \iiint q_1 dq_1 d\alpha_1 q_2 dq_2 d\alpha_2 q' dq' d\alpha' \quad (69)$$

Заметим, что при вблизи равновесия мы имеем экситоны с

$$q \approx q_T = \sqrt{2MT} \ll 1,$$

поэтому можем взять в (56) $q\lambda = 0$. Усредняем по углам квадрат матричного элемента:

$$|M|^2 = (u^2 + v^2) \left(\frac{q_1^2 + q_2^2}{2M} + \frac{\Delta}{2} \right) |\varphi(0)|^2 \quad (70)$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{\Delta}{T}, \quad \xi = \frac{q_1^2}{2MT}, \quad \eta = \frac{q_2^2}{2MT} \quad (71)$$

Как обычно при малых q , мы используем приближение эффективной массы с

$$\frac{1}{M} = \int_0^\infty \frac{q^3}{4\pi} V(q) e^{-q^2 l_b^2/2} dq, \quad (72)$$

Проводя вычисления, получаем для темпа релаксации выражение:

$$R = \frac{2\pi}{\hbar} e^{-\beta} M^3 T^2 (u^2 + v^2) N_\Phi |\varphi(0)|^2 F(\beta) \quad (73)$$

где введено обозначение

$$F(\beta) = (1 - e^{-\beta}) \int_0^{+\infty} \frac{(\xi + \eta + \frac{\beta}{2}) e^{-\xi - \eta} d\xi d\eta}{(1 - e^{-\xi - \beta})(1 - e^{-\eta - \beta})(1 - e^{-\xi - \eta - 2\beta})} \quad (74)$$

По определению темпа релаксации имеем

$$\frac{d(N - N_0)}{dt} = -R = -\frac{N - N_0}{\tau}, \quad \Delta N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (75)$$

Выражая $N_\Phi |\varphi(0)|^2$ через Фурье-компоненту корреляционной функции при помощи формулы (59), для обратного времени релаксации получим

$$\tau^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} e^{-\beta} M^3 T^2 (u^2 + v^2) \frac{K(q)}{2\pi} F(\beta) \quad (76)$$

9.1 Низкие температуры ($\beta \gg 1$)

Рассмотрим случай $T \ll \Delta$, что соответствует $\beta \gg 1$. Асимптотика (80) в этом случае легко вычисляется, и имеет вид

$$F(\beta) \approx \beta/2 + 2 \quad (77)$$

9.2 Высокие температуры ($\beta \ll 1$)

В этом случае асимптотика также вычисляется:

$$F(\beta) \approx \beta \ln^2 \beta \quad (78)$$

Эта асимптотика для функции $F(\beta)$ верна в интервале $\Delta \ll T \ll M^{-1}$.
В гетероструктуре GaAs/AlGaAs $M^{-1} \sim 30K$.

10 Сравнение с вкладом других механизмов

Несмотря на значительный практический интерес, число опубликованных экспериментальных работ в данной области невелико, что вероятно вызвано сложной экспериментальной ситуацией. Мы вычислим темп релаксации на SRP в условиях эксперимента [13] и сравним его с вкладом в темп, даваемым другими механизмами.

10.1 Спиновая релаксация, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием и заряженными примесями

$$\tau_{e-\varphi}^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} e^{-\beta} M^3 T^2 (u^2 + v^2) \frac{1}{2} A^2 (\Lambda/\lambda)^2 F(\beta) \quad (79)$$

$$F(\beta) = (1 - e^{-\beta}) \int_0^{+\infty} \frac{(\xi + \eta + \frac{\beta}{2}) e^{-\xi - \eta} d\xi d\eta}{(1 - e^{-\xi - \beta})(1 - e^{-\eta - \beta})(1 - e^{-\xi - \eta - 2\beta})} \quad (80)$$

В дальнейшем мы подразумеваем, что магнитное поле B выражено в Тесла.

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s} = 7.838 \cdot 10^{-12} \text{K} \cdot \text{s} \quad (k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{erg/K})$$

$$u^2 + v^2 = 10^{-3}/B$$

Амплитуда случайного потенциала $A = 10K$
корреляционная длина случайного потенциала $\Lambda = 500\text{\AA}$
магнитная длина $\lambda = 256\text{\AA}/\sqrt{B}$

$$GaAs/AlGaAs \quad g = -0.44$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9.27 \cdot 10^{-17} \text{erg/T} = 0.67 \text{K/T}$$

$$g\mu_B B = 0.30 B [\text{K}]$$

Экспериментальный результат Gallais et al: $B_T = 3.7 \text{T}$
 $\lambda = 133.1 \text{\AA}$ $\Delta\omega = 0.027 \text{meV}$, ($1 \text{meV} = 11.6 \text{K}$)

$$M = \frac{(q\lambda)^2}{2\Delta\omega} = \frac{(0.195)^2}{2 \cdot 0.027 \cdot 11.6} = (16.5 \text{K})^{-1}$$

$$M^{-1} = 16.5 \sqrt{B/3.7} = 8.6 \sqrt{B} [\text{K}]$$

$$\tau_{e-\varphi}^{-1} = 2.5 \cdot 10^8 e^{-\beta} B^{-3/2} T^2 F(\beta)$$

10.2 Электрон-фононное + спин-орбитальное взаимодействие

$$\tau_{e-ph}^{-1} = \frac{MT\Delta(u^2 + v^2)}{\hbar c_s p_0 (p_0 \lambda)^2} \left(\frac{\gamma_1(\Delta/T)}{\tau_D} + 10 \frac{MT}{\tau_P} \left[\left(\frac{\hbar c_s}{\Delta} \right)^2 \frac{p_0}{\lambda} \right]^2 \gamma_2(\Delta/T) \right)$$

$$\tau_D = 0.8 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1}$$

$$\tau_P = 35 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1}$$

$$\gamma_k(\beta) = (e^{2\beta} - e^\beta) \int_0^{+\infty} \frac{e^x x^k dx}{(e^{\beta+x} - 1)^2}$$

скорость звука $c_s = 5.14 \cdot 10^5 \text{cm/s}$

дебаевский волновой вектор $p_0 = 2.52 \cdot 10^6 \text{cm}^{-1}$

$u^2 + v^2 = 10^{-3}/B$

магнитная длина $\lambda = \sqrt{\hbar c/eB} = 256 \text{\AA}/\sqrt{B}$ (B в Тесла)

Зеемановская щель $\Delta = |g\mu_B B|$

10.3 Кулоновское + спин-орбитальное взаимодействие

$$\tau_{e-e}^{-1} = \frac{4}{\hbar} T (u^2 + v^2) (e^{\Delta/T} - 1) F_{e-e}(\Delta/T)$$

$$F_{e-e}(\beta) = \iint_{\xi\eta > \beta^2/4} \frac{(\xi + \eta + \beta) d\xi d\eta}{\sqrt{4\xi\eta - \beta^2} (e^{\xi+\beta} - 1) (e^{\eta+\beta} - 1) (1 - e^{-\xi-\eta-2\beta})}$$

$$\tau_{SRP}^{-1} = 4.3 \cdot 10^5 T e^{-1.5/T} F(1.5/T) c^{-1} \quad (81)$$

В статье [4] построен график функции $\tau_{Coal}(T)$ для обратного времени релаксации, определяемого кулоновским и электрон-фононным механизмами релаксации. Для сравнения приведем график 3 в тех же осях с вкладками всех трех механизмов релаксации.

Из графика 3 видно, что при температурах $\sim 1K$ имеются кроссоверы сначала с электрон-фононного на sgr, а потом с sgr на кулоновский механизм, и в этой области температур время релаксации определяется в основном рассмотренным механизмом. Из графика также видно, что при увеличении поля температура кроссовера увеличивается.

Качественное представление об областях доминирования того или иного механизма релаксации дают также графики 4,5, построенные с использованием асимптотик $\tau(B, T)$ при $\beta \gg 1$.

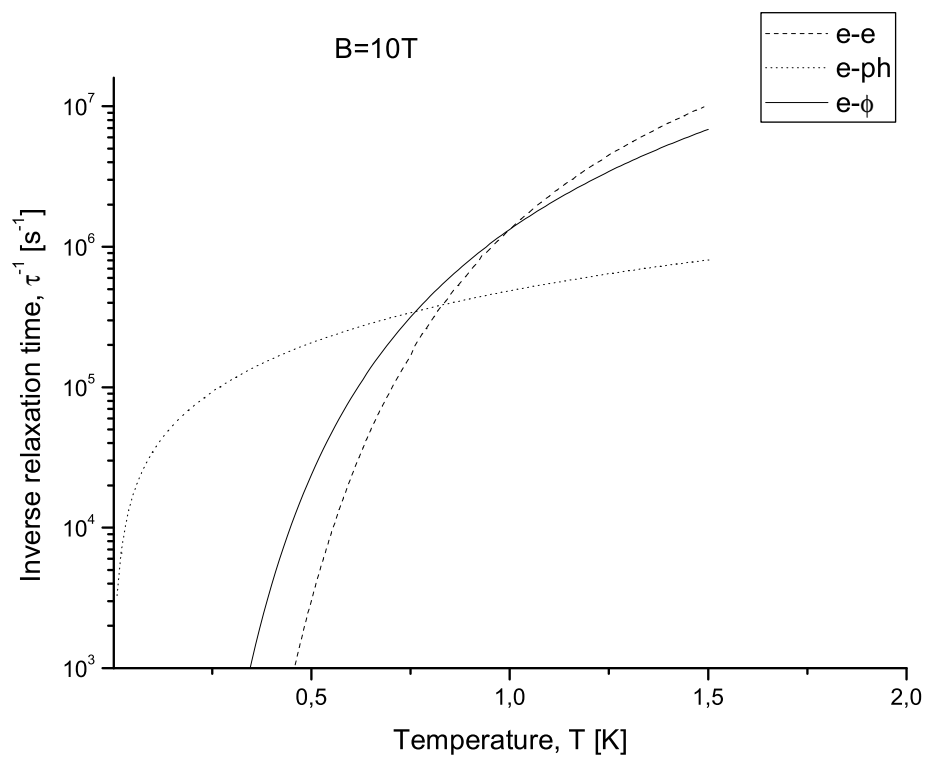


Рис. 3: теоретическая оценка темпа релаксации

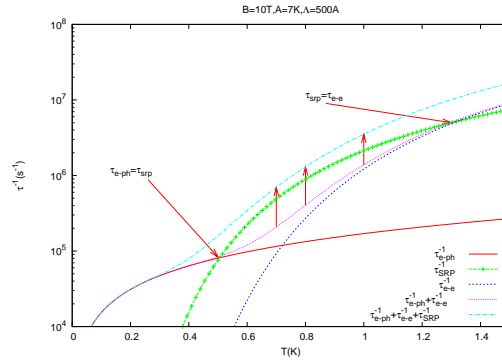


Рис. 4: Темп релаксации: суммарный и отдельно вклады различных механизмов

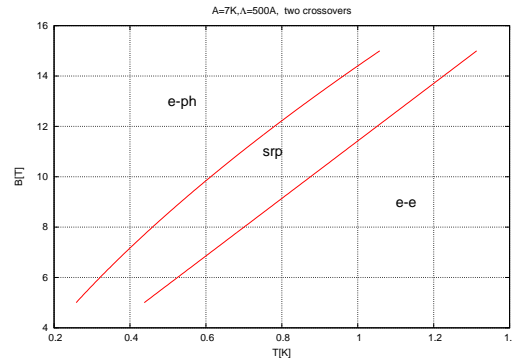


Рис. 5: Диаграмма доминирования механизмов релаксации

11 Заключение

В работе рассмотрены механизмы спиновой релаксации в двумерном электронном газе в режиме квантового эффекта Холла с нечетным заполнением. Получено выражение для гамильтониана 2DEG в электрическом поле в экситонном представлении в рамках приближения проекции на нижний уровень Ландау. Вычислена амплитуда акта релаксации - перехода из двухэкситонного состояния в одноэкситонное в результате рассеяния на потенциале заряженного беспорядка. В первом порядке теории возмущений по константам спин-орбитального взаимодействия и по амплитуде потенциала вычислено время релаксации неравновесного состояния системы. Сравнение с темпами релаксации, обусловленными

ранее изученными механизмами показало, что рассмотренный механизм дает главный вклад в темп релаксации в достаточно широкой для экспериментального наблюдения области температур и магнитных полей. Полученный результат позволяет сделать вывод, что для уменьшения времени релаксации, связанной со случайным потенциалом, можно, например, уменьшать экситонную массу (в частности, делая потенциальную яму в направлении оси z более узкой). Темп релаксации при этом будет падать пропорционально M^3 . Однако не следует забывать, что при сужении ямы небольшие изменения ее ширины будут создавать все больший эффективный потенциал размерного квантования, который может значительно изменить физическую картину. Пока величина отклонений ширины ямы много меньше самой ширины, эффективный потенциал будет мал и его вклад в темп релаксации можно оценить, используя полученные формулы.

В заключение остается добавить, что экспериментальные методы постоянно совершенствуются и можно надеяться, что полученные аналитические результаты в скором времени будут экспериментально проверены.

Список литературы

- [1] Ю.А. Бычков, Э.И. Рашба *ЖЭТФ*, 85:1826, 1983.
- [2] G. Dresselhaus. *Phys. Rev.*, 100:580, 1955.
- [3] М.И. Дьяконов, В.Ю. Качоровский. *ФТП*, 20:110, 1986.
- [4] С.М. Дикман, С.В. Иорданский. *Письма в ЖЭТФ*, 70(8):531, 1999.
- [5] S. Dickmann. Goldstone-mode relaxation in a quantized hall ferromagnet. *Physical Review Letters*, 93(20):206804, 2004.
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика. Нерелятивистская теория, §112. М., ФизМатЛит, 1989.
- [7] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. *ЖЭТФ*, 78:1167, 1980.
- [8] С.М. Дикман, С.В. Иорданский. *JETP Letters*, 70(8):543, 1996.
- [9] С.М. Дикман, С.В. Иорданский. *ЖЭТФ*, 110(1(7)):238, 1996.
- [10] Ю.А. Бычков, С.В. Иорданский, Г.М. Элиашберг. *Письма в ЖЭТФ*, 33(3):152, 1981.
- [11] Э.И. Рашба, В.И. Шека. *ФТТ 1*, 1(Сб. 2):162, 1959.
- [12] С.М. Дикман, С.В. Иорданский. *Письма в ЖЭТФ*, 70(8):543, 1999.
- [13] В.Е. Житомирский, В.Е. Кирпичев, А.И. Филин и др. *Письма в ЖЭТФ*, 58(6):429, 1993.
- [14] Справочник по специальным функциям под ред. М. Abramowitz and I.A. Stegun, М., Наука, 1979