

Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра "Проблемы Теоретической Физики"

**Релаксация спиновых волн
в режиме квантового эффекта Холла**

Дипломная работа
студента 128 группы
Артюхина С.Л.

Научный руководитель
Дикман С.М.

Москва 2005

Содержание

1	Введение	3
2	Экситонное представление	4
2.1	Кулоновская энергия	4
2.2	Операторы экситонного представления	5
2.3	Гладкий случайный потенциал	6
3	Заполнение $\nu = 1$: энергия спин-экситонов	7
4	Учет спин-орбитального взаимодействия	8
4.1	Кулоновская энергия	10
4.2	Гладкий случайный потенциал	10
5	Спиновая релаксация за счет гладкого случайного потенциала	11
5.1	Низкие температуры	14
5.2	Высокие температуры	14
6	Сравнение с экспериментальными результатами	14

Аннотация

Исследование релаксации спина является способом определения фундаментальных свойств двумерного электронного газа. Поскольку переворот спина электрона требует магнитного взаимодействия, можно выделить четыре основных механизма спиновой релаксации - рассеяние на парамагнитной примеси, контактное взаимодействие с ядрами решетки, обменное взаимодействие со спином фотовозбужденных дырок и спин-орбитальное взаимодействие и связанные с ним поправки к гамильтониану. (нужно ли это писать?) Интерес представляет исследование того, какой из этих процессов дает главный вклад в темп релаксации. Рождение ненулевого спинового экситона уменьшает на 1 полный спин системы, а рождение нулевого-только проекцию спина. Поскольку спин системы связан с количеством экситонов в ней, то очевидно, что уничтожение экситонов приводит к релаксации спина. В настоящей работе мы рассмотрим вклад в темп релаксации, даваемый гладким потенциалом положительных ионов доноров, отдавших свои электроны в двумерный электронный газ (2DEG). В единичном акте релаксации сохраняется энергия, но гамильтониан SRP не сохраняет импульс, поэтому, несмотря на малость спин-орбитального взаимодействия по сравнению с кулоновским, фазовый объем вступающих в акт релаксации экситонов значительно больше, что позволяет ожидать сравнимые вклады обоих процессов в темп релаксации. Приведенный в работе расчет полностью оправдывает наши ожидания. Закон сохранения энергии накладывает существенные ограничения на возможный акт релаксации. В частности, один экситон, как возбуждение с ненулевой энергией, уничтожиться не может, так как в этом случае энергия не сохранялась бы. Мы диагонализуем гамильтониан 2DEG со спин-орбитальным взаимодействием, в получаемом базисе SRP имеет матричные элементы для перехода из двухэкситонного состояния в одноэкситонное. Это приводит к дополнительному вкладу в темп релаксации, который при некоторых (весьма распространенных) условиях является лидирующим слагаемым в темпе. В работе произведено вычисление этого вклада.

1 Введение

Рассмотрим электронный газ в глубокой одномерной потенциальной яме ширины d .

Мы будем считать яму узкой, так что энергия пространственного квантования $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2}$ велика по сравнению с другими вкладами в энергию электрона, и поэтому заселен только нижний уровень пространственного квантования. Такую яму удастся создать в гетероструктурах GaAs/AlGaAs, о которых и пойдет речь в настоящей работе. Приложим сильное магнитное поле $B \sim 10$ Т перпендикулярно плоскости электронного газа. Уравнение Шредингера для частицы в магнитном поле имеет вид

$$\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = E \psi \quad (1)$$

В калибровке Ландау $\mathbf{A} = xB\hat{y}$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{e}{c} B \hat{x} \right)^2 \right) \psi = E \psi \quad (2)$$

Применяя это уравнение к электронам в полупроводниковой гетероструктуре, мы должны учитывать, что эффективная масса электрона там составляет $m \approx 0.07m_e$. Разложим $\psi(x, y) = \sum_p e^{ip_y y} \varphi_{p_y}(x)$.

Тогда (2) эквивалентно уравнению Шредингера

$$\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left(\hat{x} + \frac{cp_y}{eB} \right)^2 \right) \varphi_{p_y} = E \varphi_{p_y}, \quad \omega = \frac{eB}{mc} \quad (3)$$

для осциллятора со смещенным положением равновесия.

Его решения

$$\varphi_{p_y n}(\tilde{x}) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-\tilde{x}^2/2l_B^2} H_n(\tilde{x}/l_B), \quad l_B = \sqrt{\frac{c\hbar}{eB}}, \quad \tilde{x} = x + l_B^2 p_y \quad (4)$$

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - g\mu_B \sigma H \quad (5)$$

Выше введены обозначения ω для циклотронной частоты и l_B для магнитной длины.

Окончательно,

$$\Psi(x, y) = L^{-1/2} \sum_{p_y, n} c_{p_y n} e^{ip_y y} (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-(x+p_y)^2/2} H_n(x + p_y) \quad (6)$$

Отметим, что характерным размером волнового пакета частицы в магнитном поле является магнитная длина. Ее и выберем в качестве единицы длины. Для электрона состояния

$$|n, p, \uparrow\rangle = \Psi_{n,p} | \uparrow \rangle \text{ и } |n, p, \downarrow\rangle = \Psi_{n,p} | \downarrow \rangle \quad (7)$$

образуют полный ортогональный базис и разложение волновой функции в этом базисе имеет вид

$$\Psi = \sum_{n,p} a_{n,p} |n, p, \downarrow\rangle + b_{n,p} |n, p, \uparrow\rangle \quad (8)$$

2 Экситонное представление

2.1 Кулоновская энергия

Чтобы приблизиться к рассмотрению многочастичной задачи, изучим вклад кулоновской энергии взаимодействия электронов в гамильтониан

$$H_{coul} = \frac{1}{2} \left\langle \Psi(r_1)\Psi(r_2) \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| \Psi(r_2)\Psi(r_1) \right\rangle \quad (9)$$

Мы пренебрегаем краевыми эффектами, поэтому интегралы по пластинке берутся в бесконечных пределах.

Пусть \hat{a} и \hat{b} - фермиевские понижающие операторы для состояний $| \uparrow \rangle$ и $| \downarrow \rangle$ соответственно.

Вторично-квантованный гамильтониан получается из (9) подстановкой

$$\hat{\Psi} = \sum_{n,p} \hat{a}_{n,p} \Psi_{n,p} | \downarrow \rangle + \hat{b}_{n,p} \Psi_{n,p} | \uparrow \rangle \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_{Coul} = & \frac{1}{2L^2} \sum_{121'2'} \iint \mathbf{dr}_1 \mathbf{dr}_2 \{ \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_2' \hat{a}_1' + 2\hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ \hat{b}_2' \hat{a}_1' + \hat{b}_1^+ \hat{b}_2^+ \hat{b}_2' \hat{b}_1' \} \times \\ & \times e^{-ip_1 y_1} e^{-ip_2 y_2} e^{ip_2' y_2} e^{ip_1' y_1} \varphi_{n_1}(x_1 + p_1) \varphi_{n_2}(x_2 + p_2) \varphi_{n_2'}(x_2 + p_2') \varphi_{n_1'}(x_1 + p_1') \times \\ & \times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь сокращение \hat{a}_1 означает $\hat{a}_{p_1 n_1}$, а суммирование идет по $p_1 p_2 p_1' p_2'$ и $n_1 n_2 n_1' n_2'$.

Интегрирование по y_1, y_2 дает:

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2L^2} \sum_{121'2'} \iint dx_1 dx_2 \int d\mathbf{q} (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_{2'} \hat{a}_{1'} + 2\hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ \hat{b}_{2'} \hat{a}_{1'} + \hat{b}_1^+ \hat{b}_2^+ \hat{b}_{2'} \hat{b}_{1'}) \times \\ \times \varphi_{n_1}(x_1+p_1) \varphi_{n_2}(x_2+p_2) \varphi_{n'_2}(x_2+p'_2) \varphi_{n'_1}(x_1+p'_1) U(\mathbf{q}) e^{iq_x(x_1-x_2)} \delta(p'_1-p_1+q_y) \delta(p'_2-p_2+q_y)$$

Интегрируя по p'_1 и p'_2 и используя обозначение

$$\Phi_{mn}(\mathbf{q}) = \int \varphi_m(x + \frac{q_y}{2}) \varphi_n(x - \frac{q_y}{2}) e^{iq_x x} dx \quad (12)$$

преобразуем (11) к виду:

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \sum_{n_1 n_2 n'_1 n'_2} \int d\mathbf{q} \left\{ \sum_{p_1} \hat{c}_{p_1+q_y/2}^+ \hat{c}_{p_1-q_y/2} e^{-iq_x p_1} \right\} \left\{ \sum_{p_2} \hat{d}_{p_2+q_y/2}^+ \hat{d}_{p_2-q_y/2} e^{iq_x p_2} \right\} * \\ * \Phi_{1,1'}(\mathbf{q}) \Phi_{2,2'}(-\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) \delta_{\sigma_c, \sigma_{c'}} \delta_{\sigma_d, \sigma_{d'}} \quad (13)$$

Последний множитель учитывает, что кулоновское взаимодействие не зависит от спина. Удобно ввести обозначения для операторов в фигурных скобках:

$$Q_{cd\mathbf{q}}^+ = N_{\Phi}^{-1/2} \sum_p \hat{d}_{p+q_y/2}^+ \hat{c}_{p-q_y/2} e^{-iq_x p} \quad (14)$$

Переходя к этим обозначениям, и подставив во вторые фигурные скобки $Q_{ba-\mathbf{p}} = Q_{ab\mathbf{p}}^+$, находим

$$H_{\text{Coul}} = \frac{N_{\Phi}}{2(2\pi)^2} \sum \int d\mathbf{q} Q_{cc'\mathbf{q}}^+ Q_{dd'-\mathbf{q}}^+ \Phi_{1,1'}(\mathbf{q}) \Phi_{2,2}(-\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) \delta_{\sigma_c, \sigma_{c'}} \delta_{\sigma_d, \sigma_{d'}} \quad (15)$$

здесь сумма берется по парам частиц с одинаковыми спинами

2.2 Операторы экситонного представления

Как было показано в предыдущем разделе, выражение для кулоновского гамильтониана упрощается при использовании операторов $Q_{\mathbf{q}}$. Эти операторы были впервые введены в работах Бычкова и Рашба [1]. Дальнейшее развитие эта техника получила в работах [2], [3]. Коммутационные

соотношения для операторов (14) получаются непосредственно с помощью правил коомутации фермиевских операторов,

$$[Q_{ab\mathbf{p}}^+, Q_{cd\mathbf{q}}^+] = N_{\Phi}^{-1/2} (\delta_{ad} Q_{cb\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{-i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2} - \delta_{bc} Q_{ad\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2}) \quad (16)$$

$$Q_{\mathbf{p}} = Q_{ab\mathbf{p}}, \quad [Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}] = [Q_{\mathbf{p}}^+, Q_{\mathbf{q}}^+] = 0 \quad (17)$$

$$[Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}^+] = N_{\Phi}^{-1/2} (A_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{i[p\times q]/2} - B_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{-i[p\times q]/2}) \quad (18)$$

$$(19)$$

Здесь удобства вычислений вслед за авторами [?] введены операторы

$$A_q^+ = N_{\Phi}^{-1/2} Q_{aa\mathbf{q}}^+, \quad B_q^+ = N_{\Phi}^{-1/2} Q_{bb\mathbf{q}}^+ \quad (20)$$

Для них легко получить правила действия на основное состояние

$$A_q^+ |0\rangle = \delta_{q,0} |0\rangle, \quad B_q^+ |0\rangle = 0 \quad (21)$$

а также коммутационные соотношения

$$[Q_{\mathbf{q}}, A_p] = -N_{\Phi}^{-1} Q_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} e^{i[q\times p]_z/2} \quad (22)$$

$$[Q_{\mathbf{q}}, B_p] = N_{\Phi}^{-1} Q_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} e^{-i[q\times p]_z/2} \quad (23)$$

2.3 Гладкий случайный потенциал

Рассмотрим поведение двумерных электронов при наличии внешнего поля $\hat{\varphi}(r)$. Вклад в энергию от этого поля выражается

$$H_{\varphi} = \langle \Psi | \hat{\varphi}(r) | \Psi \rangle$$

Подставляя Ψ из (10) и проводя вычисления аналогично тому, как это сделано для H_{Coul} в первой части, получаем

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= \int dx dy e^{-ipy} \varphi_n(x+p) (a_p^+ \chi_{\downarrow} + b_p^+ \chi_{\uparrow}) \times \\ &\quad \left[\int \frac{dq}{(2\pi)^2} \varphi(q) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] e^{ip'y} \varphi_n(x+p') (a_{p'}^+ \chi_{\downarrow} + b_{p'}^+ \chi_{\uparrow}) = \\ &= L \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) (a_p^+ a_{p-q_y} + b_p^+ b_{p-q_y}) \\ &e^{-iq_x(p-q_y/2)} \int dy e^{iq_x(x+p-q_y/2)} \varphi((x+p-q_y/2) + q_y/2) \varphi((x+p-q_y/2) - q_y/2) \\ &= \boxed{N_{\Phi}^{1/2} (2\pi)^{-3/2} \sum_{n,n'} \int d\mathbf{q} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \Phi_{n,n'}(\mathbf{q}) (\hat{A}_{\mathbf{q}} + \hat{B}_{\mathbf{q}})} \quad (24) \end{aligned}$$

3 Заполнение $\nu = 1$: энергия спин-экситонов

Вычислим Φ при $\nu = 1$:

$$n = n' = 0, \quad \varphi_0 = \pi^{-1/4} e^{-(x+py)^2/2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(\mathbf{q}) &= \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{qy}{2})^2/2} e^{-(x-\frac{qy}{2})^2/2} e^{iq_x x} dx = \\ &= \pi^{-1/2} e^{-q_y^2/4} \int e^{-x^2} e^{iq_x x} dx = \pi^{-1/2} e^{-q_y^2/4} \int e^{-(x-iq_x/2)^2} e^{-q_x^2/4} dx = e^{-\mathbf{q}^2/4} \end{aligned} \quad (26)$$

при $\nu = 1$ в обозначениях $A_q^+ = N_\Phi^{-1/2} Q_{aaq}^+$, $B_q^+ = N_\Phi^{-1/2} Q_{bbq}^+$ гамильтониан приобретает вид

$$\begin{aligned} H_{\text{Coul}} &= \frac{N_\Phi}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \Phi_{0,0}(\mathbf{q}) \Phi_{0,0}(-\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) (Q_{aaq}^+ Q_{aaq} + 2Q_{aaq}^+ Q_{bbq} + Q_{bbq}^+ Q_{bbq}) = \\ &= \frac{N_\Phi^2}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) (A_q^+ A_q + 2A_q^+ B_q + B_q^+ B_q) \end{aligned} \quad (27)$$

Используя (72), выполним прямые вычисления...

$$\begin{aligned} [H_{\text{Coul}}, Q_p^+] |0\rangle &= \frac{N_\Phi^2}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) [A_q^+ A_q + 2A_q^+ B_q + B_q^+ B_q, Q_p^+] = \\ &= \frac{N_\Phi}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) (-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q - A_q^+ Q_{p-q}^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ Q_{p-q}^+ e^{i\Theta} + B_q^+ Q_{p-q}^+ e^{i\Theta}) |0\rangle = \\ &\quad \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) (-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q + [-A_q^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ e^{i\Theta} + B_q^+ e^{i\Theta}, Q_{p-q}^+] + \\ &\quad \quad \quad Q_{p-q}^+ (-A_q^+ e^{-i\Theta} + 2A_q^+ e^{i\Theta} + B_q^+ e^{i\Theta})) |0\rangle = \\ &\quad \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) \left(-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} A_q + \frac{1}{N_\Phi} (-Q_p^+ e^{i\Theta} (-e^{-i\Theta} + 2e^{i\Theta}) + Q_p^+ e^{-i\Theta} e^{i\Theta}) + \right. \\ &\quad \quad \quad \left. Q_{p-q}^+ (-A_q^+ (e^{-i\Theta} + 2e^{i\Theta}) + B_q^+ e^{i\Theta}) \right) |0\rangle = \\ &\quad \int d\mathbf{q} e^{-\mathbf{q}^2/2} U(\mathbf{q}) (-Q_{p+q}^+ e^{i\Theta} \delta_{0,q} + Q_p^+ (2 - 2e^{2i\Theta}) + Q_p^+ \delta_{0,q}) |0\rangle = \\ &\quad \quad \quad V(0) (-1 + 1) Q_{p-q}^+ |0\rangle + \int d\mathbf{q} (1 - e^{2i\Theta}) Q_p^+ |0\rangle \end{aligned}$$

Учитываем $2\Theta = [\mathbf{q}, \mathbf{p}] = qp \sin \alpha$

$$\int d\mathbf{q} V(q) e^{i\Theta} = \int_0^\infty q dq V(q) \int_{-\pi}^\pi d\alpha e^{iqp \sin \alpha} = \int_0^\infty q dq V(q) 2\pi J_0(pq) \quad (28)$$

В этом преобразовании использовано интегральное представление функции Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{iz \sin \xi - in\xi} d\xi \quad (29)$$

Энергия возбужденных состояний из гамильтониана (27):

$$E = 2\pi N_\Phi^2 \int_0^\infty q V(q) (1 - J_0(pq)) dq \quad (30)$$

Подставляя $V(q) = \frac{q^2}{\varkappa q}$ и воспользовавшись

$$\int_0^\infty e^{-a^2 t^2} I_\nu(bt) dt = \frac{\pi^{1/2}}{2a} e^{b^2/8a^2} I_{\nu/2} \left(\frac{b^2}{8a^2} \right), \quad (\text{Re } \nu > -1, \text{Re } a^2 > 0) \quad (31)$$

получаем

$$E(p) = 2^{3/2} \pi^{5/2} N_\Phi^2 \frac{e^2}{\varkappa} \left(1 - e^{-p^2/4} I_0 \left(\frac{p^2}{4} \right) \right) \quad (32)$$

Этот результат впервые был получен в работе [4].

4 Учет спин-орбитального взаимодействия

До сих пор мы не учитывали спин частиц. Однако, в присутствии магнитного поля наличие спина у частицы приводит к появлению вклада в энергию от спин-орбитального взаимодействия, который мы сейчас и рассмотрим.

Как было отмечено в части 1, энергия электронов с учетом спина имеет вид (ср.(5))

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{g\mu_B\sigma}{s}, \quad \frac{\mu}{s} = -\frac{|e|\hbar}{mc} \Rightarrow E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \sigma \right) \quad (33)$$

С учетом эффективной массы электрона

$$\omega = \frac{eB}{0.07mc}$$

В полупроводниковой гетероструктуре GaAs/AlGaAs фактор Ланде равен не -2 , $g = -0.44$, поэтому нет вырождения, характерного для уединенного электрона, и спектр имеет вид, представленный на Рис. 1.

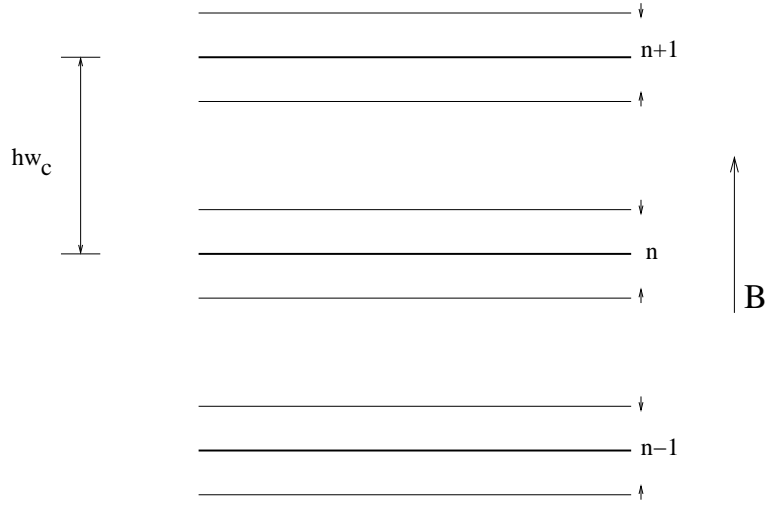


Рис. 1: Схема энергетических зон

Спин-орбитальный гамильтониан

$$H_{so} = -\frac{l_B}{\sqrt{2}}(\alpha[k \times \sigma] + \beta(k_y \sigma_y - k_x \sigma_x))$$

через k_{\pm} имеет вид

$$H_{so} = \alpha(k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-) + i\beta(k_+ \sigma_- + k_- \sigma_+) \quad (34)$$

где

$$k_{\pm} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(k_x \pm ik_y), \quad k = -i\nabla + \frac{e}{hc}A$$

Используя формулы

$$\partial_x H_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

получаем

$$k_+|np\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$k_-|np\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Матричные элементы

$$\langle np \downarrow | H_{so} | mq \uparrow \rangle = -l_B \langle np | (\alpha \sqrt{m+1} |m+1, q\rangle - i\beta \sqrt{m} |m-1, q\rangle) \quad (35)$$

$$\langle np \uparrow | H_{so} | mq \downarrow \rangle = -l_B \langle np | (\alpha \sqrt{m} |m-1, q\rangle + i\beta \sqrt{m+1} |m+1, q\rangle) \quad (36)$$

По теории возмущений для поправки первого порядка к собственным функциям имеем

$$|np \uparrow\rangle^{(1)} = \frac{l_B}{\hbar\omega_c} \left(\alpha \sqrt{n+1} |n+1, p \downarrow\rangle + i\beta \sqrt{n} |n-1, p \downarrow\rangle \right) \quad (37)$$

$$|np \downarrow\rangle^{(1)} = \frac{l_B}{\hbar\omega_c} \left(-\alpha \sqrt{n} |n-1, p \uparrow\rangle + i\beta \sqrt{n+1} |n+1, p \uparrow\rangle \right) \quad (38)$$

Индекс n в волновых функциях $|np\sigma\rangle = |np\sigma\rangle^{(0)} + |np\sigma\rangle^{(1)}$ называется *спиральностью*.

4.1 Кулоновская энергия

Нашей следующей задачей является вычисление кулоновской энергии состояний с заданной спиральностью.

По аналогии с вычислением в первой части, сохраняя только члены первого порядка по малым $\alpha, \beta \ll \hbar\omega_c$, вычисляем

$$H_{Coul} = \frac{1}{2} \left\langle \Psi(r_1)\Psi(r_2) \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| \Psi(r_2)\Psi(r_1) \right\rangle \quad (39)$$

Указанное вычисление проделано в [5], и приводит к результату

$$H_{Coul}^{(1)} = \sqrt{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} (iuq_+ - vq_-) U(q) (A_q^+ + B_q^+) Q_q + H.C. \quad (40)$$

4.2 Гладкий случайный потенциал

В обозначениях $v = \frac{\alpha l_b}{\hbar\omega_c}$, $u = \frac{\beta l_b}{\hbar\omega_c}$, собственные функции принимают вид

$$\hat{\Psi} = \frac{e^{ipy}}{\sqrt{L}} \left[\hat{a}_{np} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ v\xi_{n+1} + iu\xi_{n-1} \end{pmatrix} + \hat{b}_{np} \begin{pmatrix} -v\xi_{n-1} + iu\xi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \right] \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
H_\varphi^{(1)} &= \int d\mathbf{r} \sum_{p,p',\mathbf{q}} L^{-1} a_p^+ b_{p'} \varphi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(p'-p)y} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ v\xi_{n+1} + iu\xi_{n-1} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} -v\xi_{n-1} + iu\xi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) a_{p+q_y/2}^+ b_{p-q_y/2} e^{-iq_x p} \times \\
&\times (-v\sqrt{n}\Phi_{n,n'-1}(\mathbf{q}) + iu\sqrt{n+1}\Phi_{n,n'+1} + v\sqrt{n+1}\Phi_{n+1,n'}(\mathbf{q}) - iu\sqrt{n}\Phi_{n-1,n'}(\mathbf{q})) = \\
&= \sqrt{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) Q_{ba\mathbf{q}} \times \\
&\times (-v\sqrt{n'}\Phi_{n,n'-1}(\mathbf{q}) + iu\sqrt{n'+1}\Phi_{n,n'+1} + v\sqrt{n'+1}\Phi_{n+1,n'}(\mathbf{q}) - iu\sqrt{n'}\Phi_{n-1,n'}(\mathbf{q})) \tag{42}
\end{aligned}$$

Для $n = n' = 0$

$$\Phi_{10}(\mathbf{q}) = e^{-q^2/4} q_-, \quad \Phi_{01}(\mathbf{q}) = -e^{-q^2/4} q_+ \tag{43}$$

и мы получаем спин-орбитальную поправку к гамильтониану SRP:

$$H_\varphi^{(1)} = \sqrt{N_\Phi} \sum_{\mathbf{q}} (iuq_+ - vq_-) Q_{\mathbf{q}} + h.c. \tag{44}$$

5 Спиновая релаксация за счет гладкого случайного потенциала

Интерес представляет вычисление характерного времени, за которое приходит к равновесному значению спин двумерной системы электронов. Такое время называется *временем спиновой релаксации*. Вклад в него дают различные механизмы, в частности, в работах [6] и [5] найден вклад в обратное время релаксации от кулоновского взаимодействия. Мы рассчитаем вклад, обусловленный наличием гладкого случайного потенциала (SRP, Smooth Random Potential). В реальной системе такой потенциал создают ионы, отдавшие электроны в двумерный электронный газ, и корреляционный радиус потенциала определяется расстоянием от электронного газа до этих ионов. Гамильтониан взаимодействия с SRP дается

формулами (24), (44). С помощью соотношений (72) вычисляем:

$$M(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}' | H_\varphi^{(1)} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = l_B N_\Phi^{1/2} \sum_{\mathbf{q}} \varphi(q) (iuq_+ - vq_-) \times \\ \times \left\{ \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_1} \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}_2} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_2} \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}_1} - \frac{2}{N_\Phi} \cos \left[\frac{\mathbf{q}' \times (\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + \mathbf{q} \times \mathbf{q}_1}{2} \right] \delta_{\mathbf{q}' + \mathbf{q}, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} \right\} \quad (45)$$

Вероятность единичного акта релаксации вычисляем согласно золотому правилу Ферми:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}')|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon') d\nu' \quad (46)$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon_q = \frac{q^2}{2M} + \epsilon$, $\epsilon = g\mu B$ - зеемановская щель. Закон сохранения энергии для единичного акта релаксации имеет вид:

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{2M} + 2\epsilon = \frac{q'^2}{2M} + \epsilon \quad (47)$$

Отсюда очевидно, что $q' > q_1, q_2$, и поэтому первые два члена в фигурных скобках в формуле (45) выпадают при интегрировании в (46). Кроме того, при достаточно низких температурах $q_1 l_B \ll 1$, что позволяет косинус в (45) положить в 1. Далее, зная вероятность акта релаксации, мы можем вычислить *темп релаксации*, или количество актов в единицу времени.

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} w(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \Xi(n_1, n_2, n'), \quad (48)$$

где

$$\Xi = [n_1 n_2 (1 + n') - (n_1 + 1)(n_2 + 1)n'] \quad (49)$$

В отсутствие взаимодействия с решеткой энергия электронного газа за каждый акт релаксации увеличивалась бы примерно на ϵ . Но за счет электрон-фононного взаимодействия экситоны быстро термализуются, поэтому процесс релаксации можно считать изотермическим. Учитывая огромное максимальное число заполнения для экситонов $\sim N_\Phi$, мы можем при небольших их количествах, в заключительной (и наиболее продолжительной) стадии релаксации считать их статистику Бозе-Эйнштейновской, и записать

$$n(q) = \frac{1}{\exp(q^2/2m + \epsilon - \mu) - 1}, \quad (50)$$

где через μ обозначен химический потенциал. Найдем его при помощи самосогласованной процедуры

$$N = \sum_q n(q) = \frac{N_\Phi}{2\pi} \int \int \frac{qd\theta dq}{\exp(q^2/2m + \epsilon - \mu) - 1} = -N_\Phi MT \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon - \mu}{T}} \right) \quad (51)$$

Отклонение числа частиц от равновесного дается выражением

$$\Delta N = -N_\Phi MT \ln \left(1 - \frac{\mu}{T} \frac{1}{e^{\epsilon/T} - 1} \right) = \frac{N_\Phi M \mu}{e^{\epsilon/T} - 1} \quad (52)$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\Delta N}{N_\Phi M} (e^{\epsilon/T} - 1) \quad (53)$$

Видим, что при малом отклонении от равновесного числа возбуждений μ мал; в равновесии $\Xi = 0$, поэтому Ξ можно разложить по μ , причем член при μ^0 должен быть равен нулю. Действительно, подсчет показывает, что

$$\Xi = \frac{\mu}{T} \frac{e^{\xi + \eta}}{(e^\xi - 1)(e^\eta - 1)(e^{\xi + \eta} - 1)} \quad (54)$$

Напомним, что количество актов релаксации равно изменению спина электронной системы. Подставляя (46) в (48) и пользуясь (45), производя переход к интегрированию $\sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}'} \sim \left(\frac{N_\Phi}{2\pi}\right)^3 \iiint q_1 dq_1 d\alpha_1 q_2 dq_2 d\alpha_2 q' dq' d\alpha'$, усредняем по углам квадрат матричного элемента:

$$|M|^2 = (u^2 + v^2) \left(\frac{q_1^2 + q_2^2}{2M} + \frac{\epsilon}{2} \right) |\varphi(0)|^2 \quad (55)$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{\epsilon}{T}, \quad T\xi = \frac{q_1^2}{2M} + \epsilon, \quad T\eta = \frac{q_2^2}{2M} + \epsilon \quad (56)$$

Как обычно при малых q , мы используем квадратичное приближение с эффективной массой

$$\frac{1}{M} = l_B^2 \int_0^\infty \frac{q^3}{4\pi} V(q) e^{-q^2 l_B^2 / 2} dq, \quad (57)$$

Проводя вычисления, получаем для темпа релаксации выражение:

$$R = \Delta N e^{-\beta} (1 - e^{-\beta}) M^3 T^2 (u^2 + v^2) N_\Phi |\varphi(0)|^2 \frac{2\pi}{\hbar} F(\beta) \quad (58)$$

где введено обозначение

$$F(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{(\xi + \eta + \frac{\beta}{2})e^{\xi + \eta + 4\beta}}{(e^{\xi + \beta} - 1)(e^{\eta + \beta} - 1)(e^{\xi + \eta + 2\beta} - 1)} d\xi d\eta \quad (59)$$

По определению темпа релаксации имеем

$$\frac{d(N - N_0)}{dt} = -R = -\frac{N - N_0}{\tau}, \quad \Delta N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (60)$$

Здесь τ - искомое время релаксации.

$$\tau^{-1} = e^{-\beta}(1 - e^{-\beta})M^3 T^2 (u^2 + v^2) N_{\Phi} |\varphi(0)|^2 \frac{2\pi}{\hbar} F(\beta) \quad (61)$$

5.1 Низкие температуры

Рассмотрим случай $T \ll \epsilon$, что соответствует $\beta \rightarrow \infty$. Асимптотика (59) в этом случае легко вычисляется, и имеет вид

$$F(\beta) \approx (2 + \beta/2) \quad (62)$$

5.2 Высокие температуры

Здесь асимптотика также вычисляется:

$$F(\beta) \sim \ln^2 \beta \quad (63)$$

Эта асимптотика для функции $F(\beta)$ верна в интервале $\epsilon \ll T \ll M^{-1}$.

Напомним, что в гетероструктуре GaAs/AlGaAs $M^{-1} \sim 150K$.

6 Сравнение с экспериментальными результатами

Несмотря на значительный интерес число опубликованных работ в данной области невелико, что вероятно вызвано сложной экспериментальной ситуацией. Мы вычислим темп релаксации на SRP в условиях эксперимента [7] и сравним его с вкладом в темп, даваемым другими механизмами. В соответствии с экспериментальной работой [7], положим $B = 4.9$ Т, и учитывая оценку, сделанную в работе [8], $u^2 + v^2 = 2 \cdot 10^{-4}$, получаем

$$\tau^{-1} = 1.1 \cdot 10^5 T^2 F(3/T) c^{-1} \quad (64)$$

Здесь мы считали характерную амплитуду SRP равной 5K , а расстояние до спейсера $\sim 500\text{\AA}$. График этой функции представлен на рисунке 2

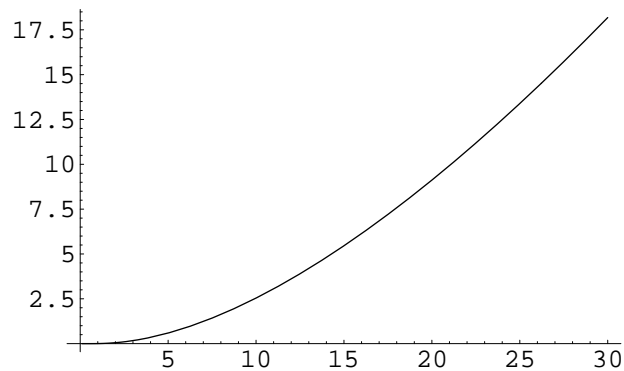


Рис. 2: $\tau_{SRP}(T)$, по оси X-Кельвин, по оси Y- 10^7 секунда $^{-1}$

В статье [8] построен график функции τT для обратного времени релаксации, определяемого кулоновским взаимодействием. Для сравнения приводим зависимость $\tau_{SRP}T$ в том же масштабе, что и в указанной работе.

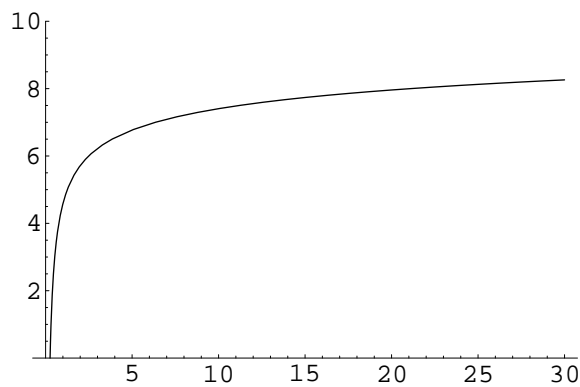


Рис. 3: $\ln \tau_{SRP}(T)$ при $B = 5 \text{ T}$

Из сравнения видно, что при температурах $\sim 5\text{K}$ имеется кроссовер, и при более высоких температурах время релаксации определяется в основном случайным потенциалом.

Список литературы

- [1] Э.И. Рашба Ю.А. Бычков. *ЖЭТФ*, 85:1826, 1983.
- [2] Ю.Е. Лозовик И.В. Лернер. *ЖЭТФ*, 78:1167, 1980.
- [3] С.В. Иорданский С.М. Дикман. *JETP Letters*, 70(8):543, 1996.
- [4] Г.М. Элиашберг Ю.А. Бычков, С.В. Иорданский. *Письма в ЖЭТФ*, 33(3):152, 1981.
- [5] S. M. Dickmann and S. V. Iordanskii. Contribution to the theory of spin-relaxation at finite temperatures in the odd-filling quantum hall effect regime. *JETP Letters*, 70(8):543, 2004.
- [6] S. Dickmann. Goldstone-mode relaxation in a quantized hall ferromagnet. *Physical Review Letters*, 93(20):206804, 2004.
- [7] А.И. Филин и др. В.Е. Житомирский, В.Е. Кирпичев. *Письма в ЖЭТФ*, 58(6):429, 1993.
- [8] С.В. Иорданский С.М. Дикман. *Письма в ЖЭТФ*, 70(8):531, 1999.

Основные формулы

$$k = \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \dots, \frac{L}{l_B^2} \text{ - проекция волнового вектора на ось } y \quad (65)$$

$$n = \frac{L^2}{2\pi l_B^2} \text{ - число электронов на одном спиновом подуровне Ландау} \quad (66)$$

$$\nu = N/n = 2\pi l_B^2 N/L^2 \text{ - число заполненных подуровней} \quad (67)$$

$$r_B = \hbar^2 \kappa / m_c e^2 \text{ - эффективный борковский радиус} \quad (68)$$

$$U = \frac{e^2}{\kappa l_B} < \hbar \omega_c < \frac{\hbar^2}{m_c d^2} \quad (69)$$

$$\Phi = N \Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\hbar c}{e} \text{ - магнитный поток} \quad (70)$$

$$Q_{ab\mathbf{q}}^+ = N_\Phi^{-1/2} \sum_p e^{-iq_x p} b_{p+q_y/2}^+ a_{p-q_y/2} \quad (71)$$

$$[Q_{ab\mathbf{p}}^+, Q_{cd\mathbf{q}}^+] = N_\Phi^{-1/2} (\delta_{ad} Q_{cb\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{-i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2} - \delta_{bc} Q_{ad\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ e^{i[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]_z/2}) \quad (72)$$

$$Q_{\mathbf{p}} = Q_{ab\mathbf{p}}, \quad [Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}] = [Q_{\mathbf{p}}^+, Q_{\mathbf{q}}^+] = 0 \quad (73)$$

$$[Q_{\mathbf{p}}, Q_{\mathbf{q}}^+] = N_\Phi^{-1/2} (A_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{i[p\times q]/2} - B_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} e^{-i[p\times q]/2}) \quad (74)$$

$$[H, Q_{\mathbf{p}}^+] |0\rangle = E(p) Q_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle \quad (75)$$

$$H_a = \sum_q V(\mathbf{q})(N_\Phi A_q^+ A_q - A_0) \quad (76)$$

$$H_{ab} = \sum_q V(\mathbf{q})(N_\Phi A_q^+ B_q + Q_q^+ Q_q - B_0) \quad (77)$$