

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Диплом

на тему «Распад турбулентного каскада в системе
капиллярных волн на поверхности жидкого гелия»

студент 122 группы
Абдурахимов Леонид

Руководитель:
А. А. Левченко,
доктор физико-математических наук

Содержание.

1. Введение	3
2. Современное состояние теории и экспериментальных исследований капиллярной турбулентности.	3
3. Методика измерений и обработки результатов.	5
4. Спектр малых колебаний заряженной поверхности жидкости, собственные колебания поверхности.	7
5. Экспериментальная установка.	9
6. Заключение	11
7. Список литературы	12

1. Введение.

Изучение динамики волн, а также турбулентности на поверхности и в объеме жидкости представляет большой интерес, как для фундаментальной нелинейной физики, так и с точки зрения практических приложений. Развитая турбулентность (developed turbulence) – это нелинейная система с большим числом одновременно возбужденных степеней свободы. Турбулентный режим характеризуется сильным нелинейным взаимодействием степеней свободы и значительной диссипацией энергии. Согласно теории слабой турбулентности [1], существует степенная зависимость (так называемый колмогоровский спектр) для распределения энергии капиллярных волн по волновым векторам в инерционном интервале, ограниченном со стороны низких частот областью, в которой энергия накачивается в систему, а со стороны высоких частот – областью, где происходит переход к вязкому затуханию. Теория также предсказывает, что установление турбулентного каскада и его распад (релаксация) происходят в автомодельном режиме. Распад турбулентного каскада наблюдался в экспериментах по изучению капиллярной турбулентности на поверхности водорода [2],[3]. Эксперименты показали, что на водороде затухание каскада начинается с высокочастотной стороны спектра, а время затухания каскада совпадает со временем вязкого затухания на частоте накачки. Это находится в противоречии с автомодельной теорией, которая предсказывает, что затухание должно начинаться с низкочастотной стороны спектра, а изменение амплитуды колебаний на частоте накачки должно определяться некоторым нелинейным временем. Противоречие эксперимента с теорией объясняется ограниченностью инерционного интервала конечной вязкостью жидкого водорода. Поэтому можно ожидать, что автомодельное решение удастся наблюдать на поверхности жидкости с вязкостью меньшей, чем у водорода. Хорошей системой для проверки этого предположения является система капиллярных волн на поверхности сверхтекучего гелия.

Таким образом, основная цель исследований – изучение динамики распада турбулентного каскада в системе капиллярных волн на поверхности жидкого гелия. В этой работе описана методика возбуждения волн на заряженной поверхности жидкого гелия и измерений частотной зависимости корреляционной функции отклонений поверхности от равновесия, которая будет использоваться нами в экспериментах по изучению волновой турбулентности на поверхности жидкого гелия. Далее приведены описание современного состояния теории, методика планируемых измерений и схема экспериментальной установки.

2. Современное состояние теории и экспериментальных исследований капиллярной турбулентности.

Как уже упоминалось во введении, развитой турбулентностью называется высоковозбужденное состояние системы со многими степенями свободы, которая при этом находится вдали от своего термодинамического равновесия. Такая система в общем случае сложна для теоретического описания. Однако теория турбулентности продвинулась довольно далеко в области развитой слабой турбулентности [1]. В приближении слабой турбулентности (weak turbulence) произвольные волновые движения представляются в виде разложения по линейным волнам, которые нелинейно взаимодействуют друг с другом. Интерес представляет статистическое распределение “чисел заполнения” n_{ω} , которое может быть описано в рамках кинетического уравнения, аналогичного уравнению Больцмана газовой динамики. Закон дисперсии капиллярных волн $\omega_k = (\sigma / \rho)^{1/2} k^{3/2}$ является распадным, и, следовательно, основной вклад во взаимодействие волн вносят трехволновые процессы – распад волны на две с сохранением

суммарного волнового вектора и суммарной частоты (т.е. импульса и энергии), а также обратный ему процесс слияния двух волн в одну.

В теории развитой турбулентности волн существует понятие инерционного интервала. Это частотный интервал, ограничиваемый снизу частотой накачки (область накачки энергии), а на высоких частотах – вязким затуханием (область диссипации энергии). В инерционном интервале наблюдается степенная зависимость в распределении энергии по частоте волн. Теория однородной капиллярной турбулентности [4] предсказывает квазистационарный закон распределения чисел заполнения при широкополосном возмущении низкочастотным шумом:

$$n(k) = c p^{1/2} k^{-17/4}; E = \int \omega(k)n(k)kdk$$

где k – волновой вектор, p – поток энергии, направленный от низкочастотных волн к высокочастотным.

Или в терминах частоты

$$n(\omega) = c1 p^{1/2} \omega^{-15/6}; E = \int \omega n(\omega)d\omega.$$

Для такого распределения корреляционная функция для отклонений поверхности от плоского состояния $I(\tau) = \langle \eta(r, t + \tau)\eta(r, t) \rangle$ (здесь $\eta(r, t)$ величина отклонения поверхности от плоского состояния) в Фурье-представлении $I_\omega = \langle |\eta_\omega|^2 \rangle$ равна

$$I(\omega) \sim \frac{\omega n(\omega)}{k^2} = \omega^{-1/3} n(\omega) \sim \omega^{-17/6}$$

Одна из целей эксперимента при изучении стационарных явлений на поверхности жидкого гелия – определить показатель степенной зависимости $I(\omega)$ и сравнить результат с предсказаниями теории.

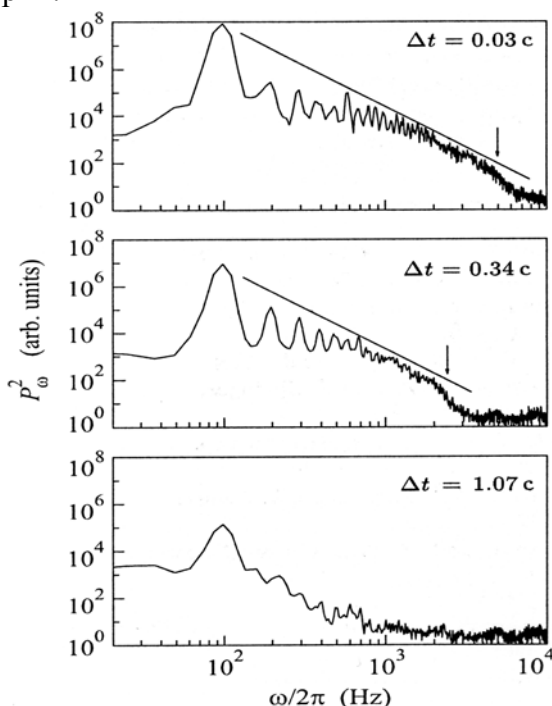


Рис. 2 Спектры колебаний поверхности жидкого водорода в большой ячейке в различные моменты времени после выключения накачки. Стрелка указывает положение высокочастотного края инерционного интервала.

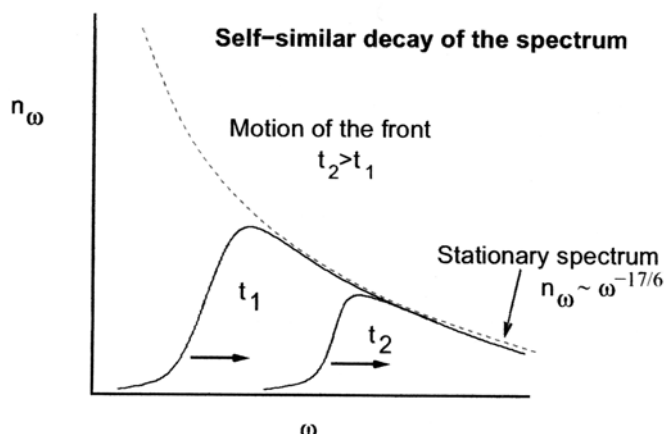


Рис. 1 Предполагаемая в теории картина автомодельного распада стационарного распределения

Мы упоминали во введении, что теория [1] предсказывает, что релаксация турбулентного каскада при включении или выключении внешней накачки происходит в автомодельном режиме. При этом на частотах много больше частоты возмущения система не знает никаких других масштабов, кроме самой этой частоты (т.к. частота возбуждения намного ниже, а вязкая частота намного выше). Поэтому эволюция

распределения со временем должна идти самоподобным образом и описываться некоторой универсальной функцией одной переменной (такая переменная, если она существует, называется автомодельной).

Характерной особенностью

автомодельного режима распада турбулентного каскада является то, что, начиная с некоторого момента времени, амплитуда колебаний на частоте накачки становится меньше амплитуды колебаний на более высоких частотах. При этом энергосодержащая область (расположенная в области максимума распределения волн) смещается в сторону высоких частот (см. рис. 1). Изменение со временем амплитуды колебаний на частоте накачки определяется некоторым нелинейным временем взаимодействия капиллярных волн. На поверхности водорода автомодельное решение наблюдать не удалось [2],[3].

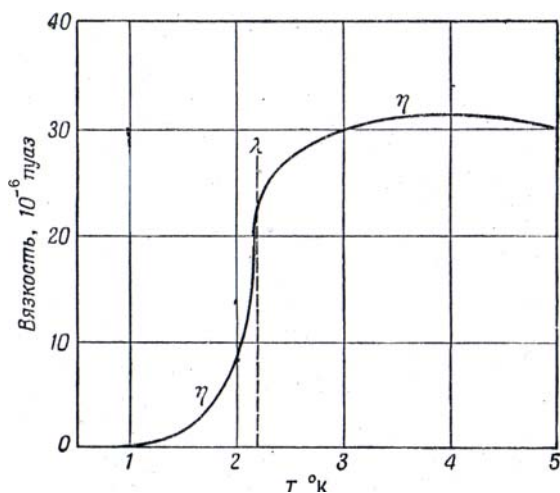


Рис. 3 Зависимость полной вязкости гелия от температуры.

А именно, в экспериментах с жидким водородом [2],[3] было обнаружено, что затухание каскада начинается с высокочастотной стороны спектра колебаний и происходит за время, близкое к времени вязкого затухания волны на частоте накачки $\tau_\omega = \gamma_\omega^{-1} = (2\nu k^2)^{-1} \sim \omega^{-4/3}$, где γ_ω - коэффициент вязкого затухания, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость, η - динамическая вязкость, ρ - плотность (см. рис.2). Такой сценарий реализуется в системе капиллярных волн в силу ограничения инерционного интервала конечной вязкостью жидкого водорода.

Именно поэтому эксперименты со сверхтекучим гелием представляют большой интерес. Вследствие малой вязкости (см. рис.3) мы сможем отодвинуть далеко край инерционного интервала и тем самым удовлетворить условию теории, что нелинейное время меньше вязкого $\tau_\omega = \gamma_\omega^{-1} = (2\nu k^2)^{-1} \sim \nu^{-1}$. Кроме того, к достоинствам гелия относится и то, что достаточно велик коэффициент нелинейности $V \sim \left(\frac{\sigma}{\rho^3}\right)^{1/4}$ ($V_{water} \approx 2,9 < V_{He} \approx 3.2 < V_H \approx 8,8$), и поэтому наблюдение турбулентного каскада в системе капиллярных волн на поверхности жидкого гелия возможно.

3. Методика измерений и обработки результатов.

Схема измерений спектра поверхностных колебаний приведена на рис. 4.

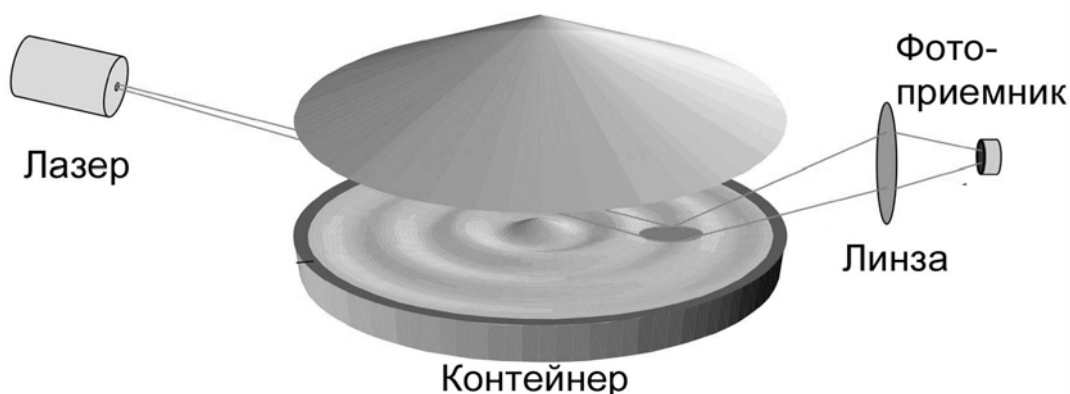


Рис. 4 Схема измерений поверхностных колебаний.

На дне контейнера расположена радиоактивная мишень - пластина из молибдена, покрытая слоем тритид титана. Радиоактивная мишень излучает β -электроны со средней энергией 5 кэВ и максимальной 18 кэВ, которые ионизируют тонкий слой жидкости (около 10 мк) вблизи мишени пластины. При этом электроны в гелии создают пузырьки, локализуясь внутри сферической полости радиусом $R_- \sim 18A$ (при этом эффективная масса пузырька $m_- \sim 240m_{He}$), а вокруг положительных ионов образуются сферы твердого гелия радиусом $R_+ \sim 7A, m_+ \sim 50m_{He}$ [5]. Полярность напряжения выбирается таким образом, чтобы положительные заряды образовывали квазидвумерный слой под поверхностью жидкости. Выбор положительных зарядов определяется тем фактом, что время жизни положительно заряженных кластеров под поверхностью жидкого гелия значительно превосходит (на 2-3 порядка) время жизни электронных пузырьков (~ 10 с). Таким образом, в эксперименте изучаются колебания положительно заряженной поверхности. При этом внешняя сила действует непосредственно на поверхность жидкости, практически не возмущая объем. Положительно заряженные стенки контейнера препятствуют уходу зарядов из-под поверхности, поэтому можно считать, что плотность зарядов в слое пропорциональна приложенному напряжению и электрическое поле в объеме жидкости близко к нулю.

Колебания поверхности жидкого гелия возбуждаются с помощью переменного напряжения, прикладываемого к контейнеру в дополнение к постоянному напряжению. Амплитуда переменного напряжения много меньше постоянного. Колебания поверхности жидкости регистрируются с помощью лазерного луча, отражающегося от поверхности.

Отраженный от колеблющейся поверхности жидкости луч с помощью линзы фокусируется на фотоприемник. Затем измеряется полная мощность отраженного лазерного луча.

Для получения информации о состоянии поверхности из результатов измерения мощности лазерного луча $P(t)$ можно применять различные методы обработки. Выбор метода зависит, во-первых, от соотношения между линейным размером пятна a , образованного лучом на поверхности жидкости вдоль диаметра ячейки, и длиной капиллярной волны на поверхности жидкости λ , а во-вторых, от соотношения между углом падения лазерного луча α и максимальным углом отклонения поверхности от плоского состояния φ_{\max} .

1. Если $a \ll \lambda$ ($ka \ll \pi$, тонкий луч), то отраженная мощность пропорциональна коэффициенту отражения в точке падения луча:

$$P(t) = \text{const} \cdot R(\alpha + \varphi(t)),$$

где $R(\theta)$ - коэффициент отражения. При выполнении условия $\varphi_{\max} \ll \alpha$ функцию $R(\theta)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности α и пренебречь членами выше первого порядка малости

$$P(t) \sim R(\alpha + \varphi(t)) \approx R(\alpha) + \text{const} \cdot \varphi(t),$$

т.е. переменная составляющая мощности луча прямо пропорциональна угловому отклонению поверхности жидкости в точке падения луча. В этом случае для Фурье-компонент

$$\varphi_{\omega}^2 \sim P_{\omega}^2. \quad (1)$$

2. Если $a \gg \lambda$ ($ka \gg \pi$, широкий луч) при выполнении условия $\varphi_{\max} \ll \alpha$, то $P(t)$ является интегральной характеристикой формы поверхности - усредненным по площади пятна коэффициентом отражения:

$$P(t) \sim \int R(\alpha + \varphi(x, t)) ds = \int R(\alpha) ds + \text{const} \int \varphi(x, t) ds = C_1 + C_2 \int \varphi(x, t) ds,$$

где C_1 и C_2 - некоторые константы. Тогда для фурье-компонент

$$\varphi_\omega^2 \sim P_\omega^2 / \Phi(\omega),$$

где $\Phi(\omega)$ - аппаратная функция, вид которой зависит от положения пятна на поверхности.

Пример частотной зависимости $\Phi(\omega)$, полученной расчетом для идеализированного случая, когда пространственные фазы всех волн совпадают в центре пятна, показан на рис.5.

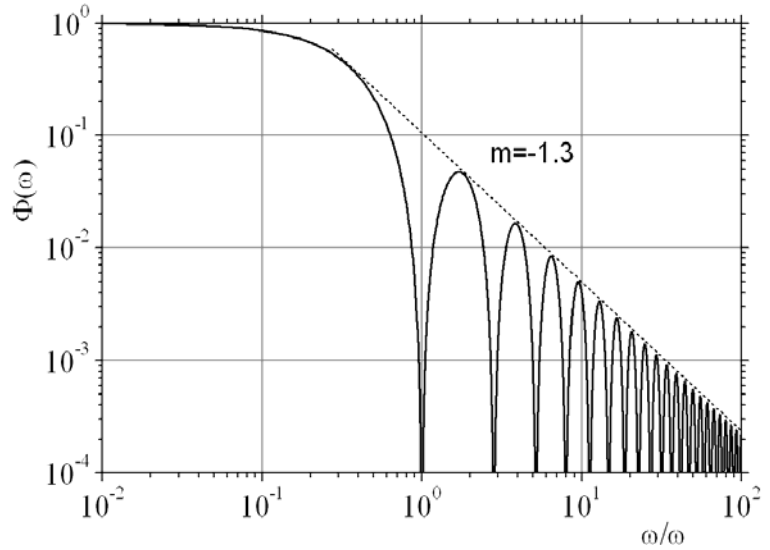


Рис. 5 Вид аппаратной функции $\Phi(\omega)$

Как видно из рисунка, в области $ka \ll \pi$ (или в частотном представлении $\omega \ll \omega_{cr}$, где $\omega_{cr} = \omega_{k=\pi/a}$), соответствующей пределу тонкого луча, функция $\Phi(\omega)$ близка к единице, что соответствует выражению (1). В области $ka \gg \pi$ (предел широкого луча, $\omega \gg \omega_{cr}$) аппаратная функция немонотонна, но ее относительные максимумы спадают по степенному закону с показателем степени, близким к -4.3: $\Phi(\omega) \sim \omega^{-4/3}$.

Поэтому для корреляционной функции I_ω получаем

$$I_\omega \sim \omega^{-4/3} \langle |\varphi_\omega|^2 \rangle \sim \omega^{-4/3} P_\omega^2 \quad \text{для } ka \ll \pi \quad (\omega \ll \omega_{cr});$$

$$I_\omega \sim \omega^{-4/3} \langle |\varphi_\omega|^2 \rangle \sim \omega^{-4/3} P_\omega^2 / \Phi(\omega) \sim P_\omega^2 \quad \text{для } ka \gg \pi \quad (\omega \gg \omega_{cr}).$$

4. Спектр малых колебаний заряженной поверхности жидкости, собственные колебания поверхности.

В поле силы тяжести спектр линейных колебаний заряженной поверхности жидкости в поле силы тяжести, помещенной между обкладками горизонтально расположенного плоского конденсатора, описывается выражением [6]:

$$\omega_k^2 = k \operatorname{th}(kh) \left[g + \frac{\sigma k^2}{\rho} - \frac{2kP}{\rho} \operatorname{cth}(kd) \right], \quad (2)$$

где ω_k - частота волны с волновым вектором k ; h - толщина слоя жидкости; σ - коэффициент поверхностного натяжения; d - расстояние от поверхности жидкости до верхней обкладки конденсатора; $P = (U/d)^2 / 8\pi$ - давление электрических сил на плоской невозмущенной поверхности; U - разность напряжений между обкладками конденсатора; g - ускорения свободного падения; ρ - плотность жидкости. В этой формуле предполагается, что электрическое поле полностью экранируется поверхностными зарядами. На рис.6 представлены графики $\omega_k(k)$ для жидкого гелия, рассчитанные по

формуле (2) для гелия при температуре $T = 1.8\text{ K}$ ($\rho = 0.145\text{ г/см}^3$; $\sigma = 0.32\text{ дин/см}$; $d = 2\text{ мм}$; $h = 1\text{ мм}$) для разных значений напряжения U .

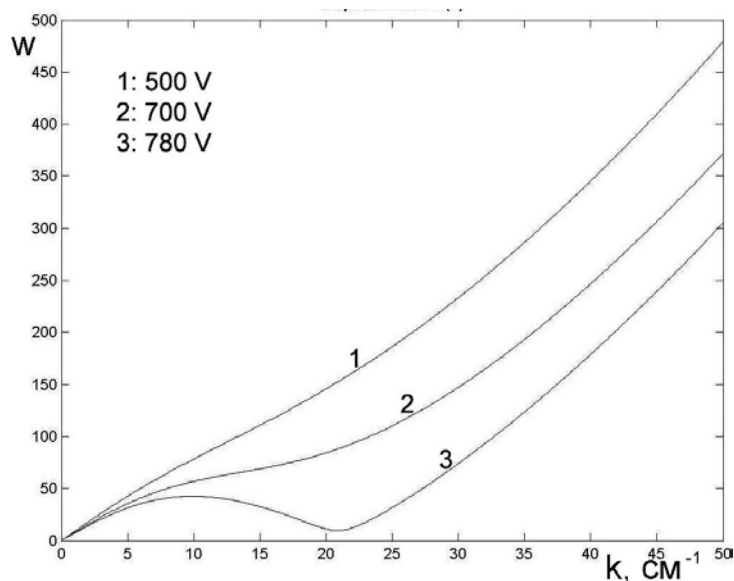


Рис. 6 Дисперсионная зависимость волн на заряженной поверхности гелия для разных напряжений, рассчитанная для гелия при температуре $T = 1.8\text{ K}$

При значении волнового вектора порядка обратной капиллярной длины $1/\lambda = \left(\frac{g\rho}{\sigma}\right)^{1/2}$ на зависимости (2) развивается локальный минимум. При критическом напряжении $U_c = (8\pi\sigma\lambda^{-1})^{1/2}d$ частота ω_k обращается в нуль. Это означает, что плоская заряженная поверхность при критическом напряжении теряет устойчивость [7].

В предельном случае, когда расстояние от поверхности жидкости до управляющей обкладки конденсатора мало, так что $kd \ll 1$, и

глубина велика, $kh \gg 1$, спектр заряженной поверхности жидкости может быть записан в виде

$$\omega_k^2 = k \left(G + \frac{\sigma k^2}{\rho} \right), \quad (2)$$

где величина $G = g - 2P/\rho d$ играет роль эффективного ускорения свободного падения.

При напряжениях вблизи критического значения для тонкой пленки $U_{c1} = (4\pi\rho g d^3)^{1/2}$, при котором поверхность теряет устойчивость, эффективное ускорение G стремится к нулю, при этом зависимость ω_k становится монотонной степенной функцией волнового вектора с показателем $3/2$, начиная с малых k :

$$\omega_k = (\sigma/\rho)^{1/2} k^{3/2}. \quad (3)$$

Поверхностные волны с таким спектром называются капиллярными.

В цилиндрической ячейке радиусом R стоячая волна на поверхности жидкости описывается уравнением

$$\zeta(r, t) = A_n J_0(k_n r) \cos(\omega_n t),$$

где J_0 - функция Бесселя нулевого порядка; A_n - амплитуда волны. Из граничных условий следует уравнение

$$J_1(k_n R) = 0,$$

где J_1 - функция Бесселя первого порядка. Это эквивалентно условию, что на диаметре ячейки $2R$ располагаются $2n$ узлов стоячей волны.

Частота переменного напряжения накачки выбирается из частот собственных колебаний.

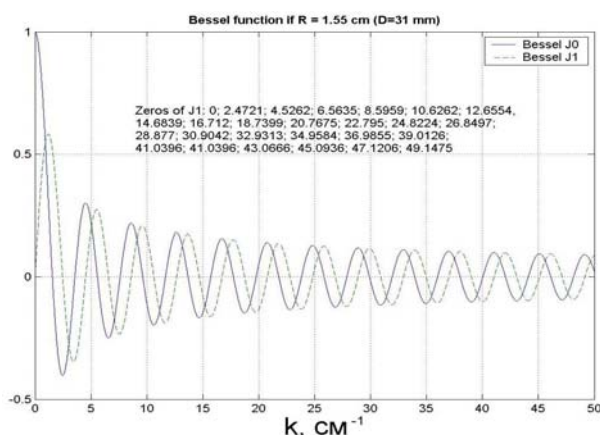


Рис. 7 Нули функции $J_1(k_n R)$ - волновые вектора собственных колебаний.

5. Экспериментальная установка.

В настоящее время сборка экспериментальной установки завершается. Планируется, что эксперименты будут проводиться в цилиндрической оптической ячейке, которая размещается в вакуумной полости гелиевого криостата откачки. Конструкция ячейки показана схематически на рис. 9. Внутренний диаметр и длина выточенной из стальной толстостенной трубы ячейки равны 42 мм. В качестве окон ячейки используются плоские диски диаметром 52 мм, изготовленные из кварцевого стекла толщиной 5 мм. Окна плотно прижимаются болтами к ячейке через индиевые уплотнения. Внутри ячейки установлен контейнер, который изготовлен в виде медного стакана диаметром 31 мм. Газообразный гелий через капилляр 7 попадает в ячейку и конденсируется в контейнере. Чтобы гелий не уходил по пленке из контейнера, верхние края контейнера сделаны острыми.

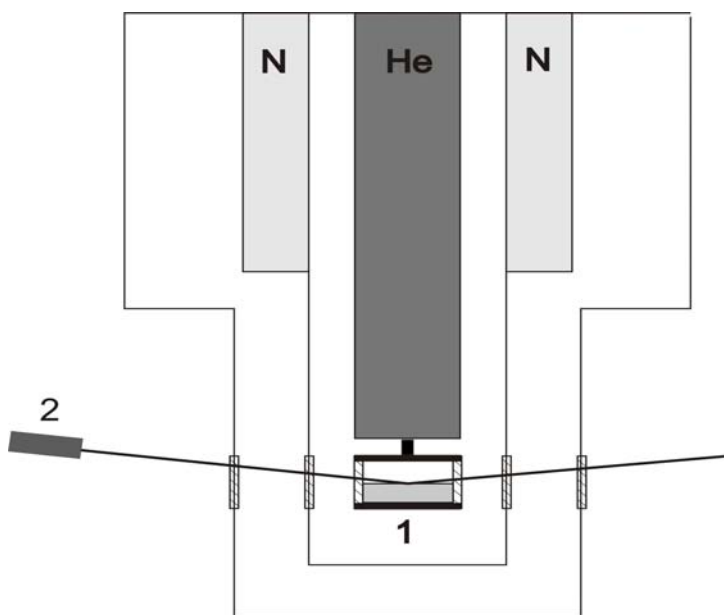


Рис. 8 Расположение ячейки в оптическом криостате. 1 – ячейка, 2 – лазер.

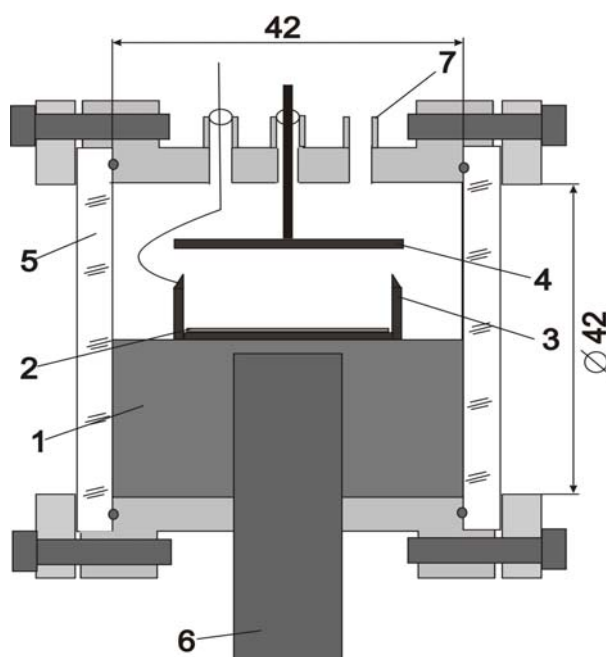


Рис. 9 Устройство экспериментальной ячейки. 1- текстолитовый брусок, 2- радиоактивная мишень, 3- медный контейнер, 4- верхняя обкладка конденсатора, 5- кварцевые окна, 6- медный холодопровод, 7- капилляр

Температура ячейки и нагревателя определяются по величине сопротивлений двух терморезисторов. Для установления зависимости сопротивления от температуры была проведена калибровка терморезисторов. Охлаждение терморезисторов, припаянных одним контактом к гелиевому «хвосту», до температуры 1,7К осуществлялось откачкой паров жидкого гелия. Температура определялась по шкале давления насыщенных паров гелия.

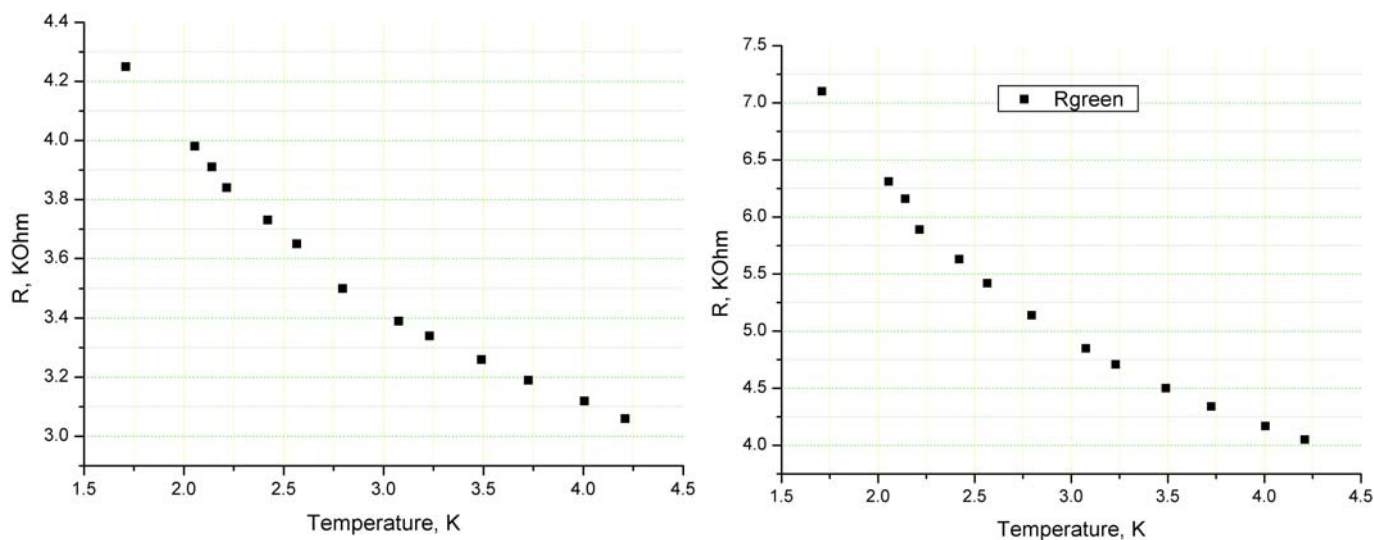


Рис. 10 Графики калибровки сопротивлений, используемых в качестве резистивных термометров

Чтобы устранить шумы, криостат помещен в деревянный каркас, установленный на демпферах. Таким образом устраняется связь криостата со зданием (Рис. 11).

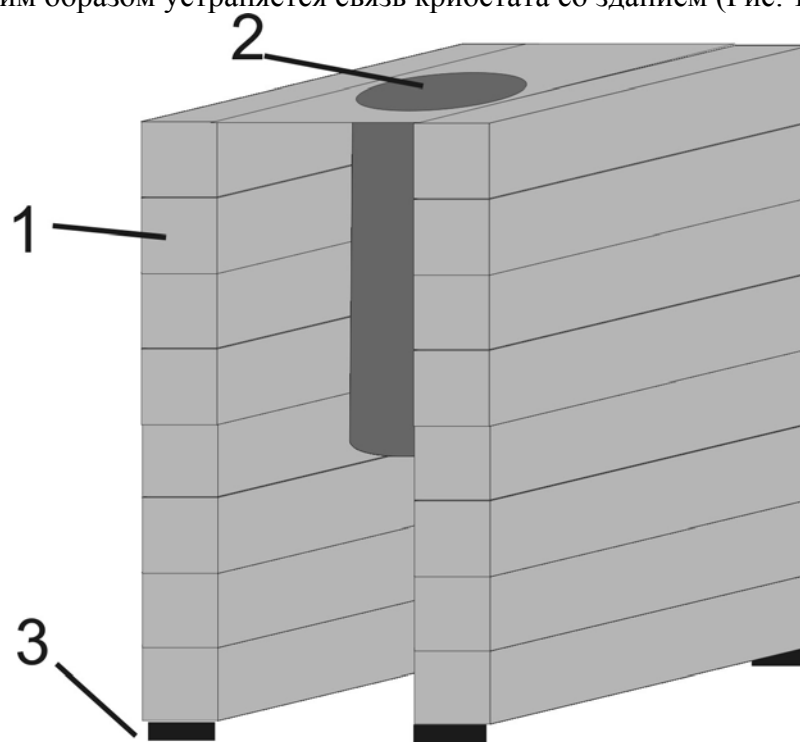


Рис. 11 1 – деревянный каркас; 2 – криостат; 3 – демпферы.

6. Заключение.

В процессе выполнения дипломной работы проведена подготовительная работа по экспериментальному изучению турбулентности в системе капиллярных волн. А именно:

- а) подготовлен обзор, посвященный результатам теории и экспериментальным исследованиям волновой турбулентности на поверхности жидкого водорода.
- б) завершается сборка оптического криостата для работы со сверхтекучим гелием до температур 1.5К;
- в) откалиброваны термометры по давлению насыщенных паров жидкого гелия (He I и He II);
- г) изготовлена оптическая ячейка;
- д) рассчитан спектр колебаний заряженной поверхности в электрическом поле;
- е) рассчитаны частоты собственных колебаний поверхности в ячейке;
- ж) изготовлен виброизолирующий каркас для установки криостата.

7. Список литературы.

1. V. Zakharov, V. Lvov, G. Falkovich *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (1992)
2. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, А. Н. Сильченко, Р. V. E. McClintock, *Письма в ЖЭТФ*, **80**(2),99 (2004)
3. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, *ФНТ*, **27**, 1183 (2001)
4. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, *Журн. Прикл. Мех. Техн. Физ.* **5**, 62 (1967)
5. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха *Двумерные заряженные системы в гелии*, Москва, Наука (1989)
6. Д. М. Черникова, *ФНТ*, **2**, 1374 (1976)
7. P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B20**, 4511 (1979)
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т.6, Гидродинамика*, Москва, Наука (1988)
9. M. Yu. Brazhnikov, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, L. P. Mezhev-Deglin, *Europhys. Lett.*, **58**(4), 510 (2002)
10. *Растворы квантовых жидкостей He3-He4*, Москва, Наука (1973)