ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 1, стр. 1–20

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАССИВНОГО СКАЛЯРА В РАСПАДНОЙ ЗАДАЧЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТИ

С. С. Вергелес*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 октября 2005 г.

Рассмотрена статистика пассивного скаляра, переносимого турбулентным полем скорости, в распадном случае. Диффузия скаляра κ предполагается слабой (мало число Прандтля (Шмидта) ν/κ, где ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости). Изучается режим, когда корреляционная длина скаляра остается меньше длины корреляции скорости. Найдены одновременные корреляционные функции скаляра. Они изменяются по степенному закону и обладают угловыми особенностями, отражающими локально-слоистое распределение скаляра в пространстве.

PACS: 05.20.Jj, 47.27.Gs, 47.27.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование статистических свойств переноса пассивного скаляра ϑ турбулентным потоком жидкости является одной из основных задач в проблеме турбулентности. Скаляром является, например, отклонение концентрации примеси или температуры от их среднего значения. Пассивность скаляра означает, что обратное влияние изменений скаляра на поток пренебрежимо мало. В приведенных примерах это соответствует тому, что можно пренебречь изменением скорости жидкости из-за флуктуаций концентрации примеси или термического расширения. В настоящей работе исследуется распадная задача, в которой при заданном начальном распределении скаляра в пространстве определяется статистика поля скаляра в последующие моменты времени.

В настоящей работе рассматриваются трехмерные ($d = 3$) и двумерные ($d = 2$) турбулентные течения. Дадим краткое описание развитого трехмерного турбулентного течения с числом Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg 1$, см., например, [1, 2]. Внешние источники возбуждают вихри с приблизительным размером L, передавая в среднем жидкости энергию ϵ_v в единицу времени на единицу массы. Вязкостью жидкости можно пренебречь на масштабах расстояний, много больших «вязкой» длины

$$\eta \approx (\nu^3/\epsilon_v)^{1/4},$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. В инерционном интервале $\eta \ll r \ll L$ устанавливается передача (каскад) кинетической энергии с более крупных масштабов расстояний на более мелкие. В этом интервале для мгновенной разности скоростей в точках, разделенных расстоянием r, имеется колмогоровская оценка [3]

$$\delta v(r) \approx (\epsilon_v r)^{1/3}.$$

Каскад приводит к передаче энергии самым маленьким вихрям размером порядка вязкой длины η. На масштабе η вязкость становится существенной и кинетическая энергия диссипирует в тепло. К колмогоровской оценке имеются поправки, связанные с перемежаемостью [4], которыми при грубых рассмотрениях можно пренебречь.

Двумерная турбулентность [5–7] отличается от трехмерной тем, что в случае идеальной жидкости кроме кинетической энергии имеется еще одна сохраняющаяся величина — энстрофия

$$\Omega = \int d^2 r\, \omega^2,$$

*E-mail: ssver@itp.ac.ru

где $\omega = \operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ — завихренность жидкости. Это приводит к тому, что в развитом турбулентном состоянии существуют два каскада, начинающиеся с масштаба накачки. Вниз по масштабам передается энстрофия, а вверх — кинетическая энергия. Каскад энстрофии заканчивается на «вязком» масштабе

$$\eta \approx \sqrt{\nu L/V} \ll L,$$

где V — скорость жидкости на масштабе накачки L. Каскад энергии заканчивается на больших масштабах, когда становится существенным трение жидкости о дно или стенки сосуда.

Мы ограничимся рассмотрением процесса переноса пассивного скаляра ϑ турбулентным потоком на масштабах, меньших вязкой длины η. На таких расстояниях мгновенная разность скоростей $\delta v(r) \propto r$, т. е. течение, происходит в режиме Бэтчелора [8]. В бэтчелоровском течении лагранжевы траектории жидкости расходятся по экспоненциальному закону. Средняя логарифмическая скорость расхождения лагранжевых траекторий λ называется экспонентой Ляпунова, она определяет характерное значение градиента скорости. Мы считаем статистику скорости изотропной, исходя из обычного представления о том, что турбулентное течение на масштабах, много меньших масштаба накачки, статистически изотропно, даже если сама накачка не является таковой.

Мы полагаем диффузию (термодиффузию) слабой, т. е. большим является число Прандтля Pr (равное отношению вязкости жидкости ν к коэффициенту диффузии) или число Шмидта Sc (равное отношению вязкости жидкости ν к коэффициенту термодиффузии). Мы будем использовать обозначение κ как для коэффициента диффузии, так и для коэффициента термодиффузии, т. е. большим считается отношение ν/κ. В турбулентном потоке, переносящем скаляр, можно определить диффузионный масштаб r_d, на расстояниях меньше которого диффузия сглаживает неоднородности в распределении скаляра. Поскольку число Прандтля (Шмидта) велико, диффузионный масштаб r_d оценивается как

$$r_d \approx \sqrt{\kappa/\lambda}.$$

Вязкий масштаб, соответственно, равен

$$\eta \approx \sqrt{\nu/\lambda},$$

поэтому $r_d \ll \eta$.

Режим Бэтчелора со случайным полем скорости моделирует также так называемую эластическую турбулентность [9]. Эластическая турбулентность возникает в растворах полимеров при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ и числах Вайссенберга $\mathrm{Wi} \sim 1$. Число Вайссенберга определяется как отношение обратного времени релаксации μ полимера к характерному градиенту скорости,

$$\mathrm{Wi} = \mu L_0/V,$$

где V — характерное значение скорости, а L_0 — размер системы (сосуда). В режиме эластической турбулентности основной вклад в градиент скорости вносят вихри размером порядка размера системы L_0. Поэтому приближение $\delta v(r) \propto r$ справедливо вплоть до самых больших масштабов, а ляпуновская экспонента потока оценивается как

$$\lambda \approx V/L_0.$$

Мы считаем статистику скорости изотропной на масштабе L_0. Мы предполагаем, что в случае эластической турбулентности диффузия скаляра также является слабой, так что диффузионный масштаб r_d оказывается много меньше размера системы L_0. Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = L_0 V/\nu,$$

поэтому отношение двух масштабов равно

$$r_d/L_0 \sim \sqrt{\kappa/\,\mathrm{Re}\,\nu}.$$

Таким образом, неравенство $r_d \ll L_0$ выполняется, когда для отношения коэффициентов вязкости и диффузии (т. е. для числа Прандтля) выполняется соотношение

$$\mathrm{Pr} = \nu/\kappa \gg \mathrm{Re}^{-1}\,.$$

Начальное распределение $\vartheta_0(\mathbf{r})$ скаляра в пространстве мы предполагаем статистически однородным и изотропным, а размер l неоднородностей в распределении ϑ_0 — находящимся между диффузионным и вязким масштабами, $r_d \ll l \ll \eta$. В случае эластической турбулентности мы предполагаем, что $r_d \ll l \ll L_0$.

В последнее время достигнуты значительные успехи в теории переноса пассивного скаляра случайным полем скорости. Эти успехи связаны в основном с использованием модели Крайчнана [10], в которой скорость считается δ-коррелированной во времени. В работе [10] Крайчнан считал поле скорости гладким в пространстве. Впоследствии эта модель была распространена на поля скорости, обладающие мультискейлинговым поведением. По-видимому, одним из первых, кто это сделал, был Казанцев [11], изучавший эволюцию слабого магнитного поля в турбулентном потоке скорости. В модели Крайчнана оказывается возможным получить замкнутые уравнения для одновременных корреляционных функций пассивного скаляра. Выясняется, что многие корреляционные функции зависят только от интегральных характеристик поля скорости. Поэтому качественно ответы в модели Крайчнана остаются верными и для поля скорости с произвольным конечным временем корреляции. Промежуточные итоги развития теории переноса пассивного скаляра подведены в обзоре [12].

Распадная задача в бэтчелоровском режиме исследовалась теоретически в работах [13–15]. В работе [13] изучалась одновременная парная корреляционная функция скаляра $F(r)$ в модели Крайчнана в ситуации, когда парная корреляционная функция скорости имеет две пространственные асимптотики. Ниже вязкого масштаба скорость предполагается гладкой, $\delta v(\mathbf{r}) \propto r$, а выше него закон скейлинга меняется на

$$\langle (\delta v(\mathbf{r}))^2 \rangle \propto r^{2-\gamma}.$$

Согласно [13], корреляционная длина пассивного скаляра растет экспоненциально со временем:

$$r_+ \propto l e^{\lambda t}.$$

После достижения вязкой длины закон роста корреляционной длины сменяется на степенной:

$$r_+ \propto t^{1/\gamma} \gg \eta.$$

На таких временах масштаб характерных флуктуаций лежит в инерционном интервале. Эти масштабы служат резервуаром для «субвязких» масштабов. На субвязких масштабах происходит каскад скаляра вниз до диффузионного масштаба r_d. Это объясняет то, что в интервале волновых векторов

$$\eta^{-1} \ll k \ll r_d^{-1}$$

спектральная функция изменяется как

$$k^{d-1} F(k) \propto 1/k.$$

Такое же поведение спектральная функция имеет в случае непрерывного создания новых неоднородностей в распределении пассивного скаляра на больших масштабах [8, 10, 16]. Высшие корреляционные функции скаляра в пределе $\eta \to 0$ исследовались в работе [14]. Начальная стадия распада изучалась в работе [15], где исследовалась одноточечная статистика скаляра при произвольной статистике скорости с конечным временем корреляции.

Приведем качественное описание этой начальной стадии, когда корреляционная длина скаляра еще не достигла вязкого масштаба η [13, 15]. Для того чтобы описать эволюцию произвольного распределения скаляра с начальным размером неоднородностей l, воспользуемся тем, что любое начальное распределение скаляра с масштабом неоднородностей l можно представить как суперпозицию сгустков размера l. Сгустком размера l мы называем частный вид начального распределения, когда величина ϑ_0 отлична от нуля только в области размера l. Поле скорости потока жидкости обладает ненулевым градиентом, поэтому оно вытягивает сгусток по одному направлению и сжимает по другому. Растяжение и сжатие происходят во времени по экспоненциальному закону. Диффузия останавливает убывание меньшего размера сгустка, когда тот достигает значения $r \sim r_d$, и не влияет на больший размер. После того как меньший размер сгустка становится равным r_d, объем, занимаемый сгустком, начинает увеличиваться, а характерное значение скаляра в сгустке — уменьшаться. Статистически однородное и изотропное начальное распределение скаляра можно представить как суперпозицию многих сгустков, хаотично разбросанных в пространстве. Сгустки, которые находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем η, растягиваются полем скорости, обладающим на этих расстояниях одним и тем же градиентом. Поэтому эти сгустки деформируются одинаковым образом и имеют одну и ту же ориентацию в пространстве. Таким образом, с течением времени поток жидкости делает локальное распределение скаляра сильно анизотропным. Когда меньший размер сгустков достигает диффузионного масштаба r_d, сгустки начинают перекрываться, а сила флуктуаций в объеме — экспоненциально уменьшаться со временем. При этом в потоке остаются области с существенно большим отклонением концентрации от средней. В этих областях с начального момента времени до момента наблюдения t градиент скорости остается значительно меньше, чем в среднем по объему. Доля таких областей во всем объеме мала, поскольку мала вероятность таких флуктуаций скорости.

Для вычисления одноточечных моментов скаляра в работе [15] использовался метод поиска оптимальной флуктуации скорости, когда достигается компромисс между силой флуктуации концентрации скаляра и статистическим весом флуктуации скорости. Для моментов разных порядков оптимальные флуктуации оказываются различными, что приводит к сильной перемежаемости в статистике скаляра. Мы изучаем ту же начальную стадию распада скаляра и используем тот же метод, но исследуем одновременные корреляционные функции скаляра. Мы демонстрируем, что результаты для парных корреляций, полученные в работе [13] для δ-коррелированного поля скорости, остаются качественно верными для распада скаляра при произвольной корреляции скорости во времени. Поскольку парная корреляционная функция скаляра не дает достаточного понимания того, как устроено пространственное распределение скаляра, мы исследуем высшие корреляционные функции. В результате устанавливается вид корреляционных функций для произвольной статистики скорости с конечным временем корреляции. Как и парная корреляционная функция [13], высшие корреляционные функции также обладают скейлинговым поведением. В соответствии с общей картиной растяжения и сжатия сгустков потоком оказывается, что корреляционные функции высоких порядков обладают степенными угловыми особенностями. Существование такого рода особенностей не зависит от конкретного вида статистики скорости, однако от нее зависит показатель степени угловых особенностей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Эволюцию пассивного скаляра ϑ в движущейся жидкости описывает уравнение переноса с диффузией:

$$\partial_t \vartheta + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\vartheta = \kappa\Delta\vartheta. \tag{1}$$

Если скаляром является концентрация примеси, то уравнение (1) записывается в предположении, что инерционностью частичек примеси можно пренебречь. Мы считаем скаляр пассивным, т. е. скорость потока $\mathbf{v}$ не чувствительна к полю ϑ и, соответственно, поле скорости обладает независимой статистикой.

Мы предполагаем, что отношение коэффициента кинематической вязкости жидкости ν к коэффициенту диффузии скаляра κ велико. Если скаляром является примесь, то это отношение называется числом Прандтля Pr. Если скаляром является температура, то κ представляет собой коэффициент термодиффузии, а отношение ν/κ называется числом Шмидта Sc. В нашей задаче эти два параметра играют одну и ту же роль. Мы будем пользоваться обозначением

$$\nu/\kappa = \mathrm{Pr} \gg 1.$$

Определим диффузионную длину r_d как масштаб, на котором сравниваются переносной и диффузионный члены в уравнении (1):

$$r_d = 2\sqrt{\kappa/\lambda}. \tag{2}$$

Здесь λ — ляпуновская экспонента потока жидкости, которая определяется как средняя логарифмическая скорость разбегания двух близких лагранжевых траекторий: если $r(t)$ — расстояние между двумя лагранжевыми частицами, то

$$\lambda = \left\langle \frac{d\ln r}{dt} \right\rangle.$$

На масштабах, много больших r_d, можно пренебречь правой частью уравнения (1), и мы получаем просто уравнение переноса. Ниже диффузионного масштаба диффузия играет основную роль, сглаживая неоднородности в распределении скаляра. В турбулентном потоке имеет место вязкий масштаб $\eta \sim \sqrt{\nu/\lambda}$, поэтому неравенство $\mathrm{Pr} \gg 1$ означает, что при этом $\eta \gg r_d$.

В эластической турбулентности течение происходит при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$. Если L_0 — характерный размер сосуда, в котором происходит течение, а V — характерная скорость на этом масштабе, то

$$\mathrm{Re} = L_0 V/\nu.$$

В градиент скорости основной вклад дают вихри размером порядка размера системы L_0. Поэтому ляпуновская экспонента

$$\lambda \approx \mathrm{Re}/\nu L_0^2.$$

Мы предполагаем, что диффузионный масштаб $r_d \ll L_0$, что подразумевает неравенство

$$\mathrm{Pr} \gg \mathrm{Re}^{-1}.$$

Мы предполагаем, что размер неоднородностей l в начальном распределении скаляра $\vartheta_0(\mathbf{r})$ находится между вязким и диффузионным масштабами, $\eta \gg l \gg r_d$. В частности, число Пекле

$$\mathrm{Pe} = l/r_d \gg 1.$$

Статистику ϑ_0 мы предполагаем однородной и изотропной в пространстве с парной корреляционной функцией

$$F_0(R) = \langle \vartheta_0(0)\vartheta_0(\mathbf{R})\rangle,$$

достаточно быстро убывающей при росте r, начиная с расстояния $r \approx l$.

Распределение ϑ_0 можно представить как суперпозицию большого количества хаотически разбросанных в пространстве сгустков скаляра размера l:

$$\vartheta_0(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \Theta_0(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|/l). \tag{3}$$

Функция распределения скаляра в сгустке в начальный момент времени $\Theta_0(|\mathbf{r}'|/l)$ предполагается сферически-симметричной и убывающей, начиная с расстояния порядка l. Для определенности мы считаем, что полное количество скаляра в сгустке

$$\int d\mathbf{r}' \Theta_0(r'/l) = l^d,$$

где d — размерность пространства. Векторы $\mathbf{r}_i$ задают случайные положения сгустков, а a_i — некоторые случайные весовые множители, определяющие амплитуду флуктуаций скаляра. Мы считаем сгустки равномерно заполняющими пространство, тогда концентрация сгустков равна

$$D^{-d} = N/\mathcal{V},$$

где $\mathcal{V}$ — объем всей системы. Среднее расстояние между сгустками равно

$$D = (\mathcal{V}/N)^{1/d},$$

где $d = 2, 3$.

Мы рассматриваем два предела статистики распределения ϑ_0. В первом пределе, который мы обозначаем ϑ_0^g, мы считаем сгустки сильно перекрывающимися, т.е. $D \ll l$. В этом случае статистику скаляра можно считать гауссовой. Мы исключаем из рассмотрения среднее по пространству значение скаляра, т.е. инвариант Коррсина $\int d\mathbf{r}\, \vartheta^g$ считается нулевым. Другими словами,

$$\sum_i a_i = 0.$$

Усредняя (3) по случайным положениям сгустков $\mathbf{r}_i$, получаем парную корреляционную функцию

$$F_0(R) = \frac{1}{\mathcal{V}}\left[-\frac{l^{2d}}{\mathcal{V}} + \int d\mathbf{r}' \Theta(|\mathbf{R}+\mathbf{r}'|/l)\Theta(r'/l)\right] \times$$
$$\times \sum_i a_i^2 = C_2 \int \frac{d\mathbf{r}'}{l^d} \Theta_0(|\mathbf{r}'+\mathbf{R}/2|)\,\Theta_0(|\mathbf{r}'-\mathbf{R}/2|)\,, \quad (4)$$

где

$$C_2 = \frac{(l/D)^d}{N} \sum_i a_i^2. \quad (5)$$

Здесь мы устремили объем системы к бесконечности, $\mathcal{V} \to \infty$. Условие $D \ll l$ обусловливает гауссовость статистики: например,

$$\frac{\langle \vartheta_0^4 \rangle}{6 \langle \vartheta_0^2 \rangle^2} - 1 \propto (D/l)^3 \ll 1.$$

В разд. 6 будет показано, что если расстояние между сгустками $D \approx l$, то корреляционные функции пассивного скаляра на больших временах оказываются пропорциональными корреляционным функциям в случае гауссовой статистики.

Второй предел, который мы будем обозначать как ϑ_0^p, описывает обратную ситуацию, когда характерное расстояние между случайно расположенными сгустками велико, $D \gg l$. Мы предполагаем, что знак скаляра в них один и тот же: все $a_i > 0$. В пределе ϑ_0^p статистика распределения скаляра любого порядка набирается только тогда, когда все точки корреляционной функции накрывает один сгусток. При вычислении корреляционных функций скаляра по $\mathbf{r}_i$ в формуле (3) должно быть проведено усреднение. В частности, парная корреляционная функция определяется выражением (4), а одноточечные моменты

$$\langle (\vartheta_0^p)^n \rangle = C_n \int \frac{d\mathbf{r}'}{l^d} \Theta_0^n(r'/l) \approx$$
$$\approx \frac{l^d}{D^d} \left(\frac{\sum_i a_i}{N} \Theta_0(0) \right)^n, \quad (6)$$

где

$$C_n = \frac{(l/D)^d}{N} \sum_i a_i^n.$$

Нас интересует, какова будет статистика распределения скаляра в последующие моменты времени, когда поле скаляра деформируется потоком жидкости. Статистические свойства распределения определяются одновременными корреляционными функциями

$$\mathcal{F}_n(\{\mathbf{r}_j\}, t) = \left\langle \prod_{j=1}^n \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{r}_j, t) \right\rangle. \quad (7)$$

Угловые скобки предполагают усреднение по пространству:

$$\mathcal{F}_n(\{\mathbf{r}_j\}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{r} \prod_i \vartheta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i).$$

Мы интересуемся масштабами, много меньшими η. Поскольку объем всей системы $\mathcal{V} \gg \eta^d$, усреднение в (7) соответствует отдельным усреднениям по начальному распределению скаляра и по статистике градиента скорости.

В случае эластической турбулентности усреднение в (7) надо интерпретировать несколько иначе. Например, в эксперименте [9] течение происходит в трубке с поперечным размером порядка L_0. Поэтому усреднение в (7) представляет собой совокупность двух усреднений: по поперечному сечению трубки и по времени. Усреднение по времени соответствует усреднению по статистике градиента скорости в случае обычной турбулентности.

3. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Перейдем в систему отсчета, начало которой движется вместе с некоторой лагранжевой частицей жидкости. Мы ограничимся рассмотрением масштабов, меньших вязкой длины η, а в случае эластической турбулентности — меньших масштаба системы L_0. На таких расстояниях поле скорости гладкое и полностью определяется его матрицей градиентов $\hat{\sigma}$:

$$\mathbf{v} = \hat{\sigma}\mathbf{r}. \tag{8}$$

Поскольку течение несжимаемо, имеем

$$\operatorname{tr}\hat{\sigma} = 0.$$

В турбулентных течениях, а также в случае эластической турбулентности время корреляции процесса $\hat{\sigma}$ конечно, но конкретный вид статистики $\hat{\sigma}$ неизвестен. В развитом турбулентном потоке время корреляции сравнимо со временем оборота самых маленьких вихрей, размер которых порядка η. Мы предполагаем, что статистика $\hat{\sigma}$ изотропна. Этого достаточно, для того чтобы сделать ряд заключений о характере движения жидкости и переносимого ею скаляра.

В нашей системе отсчета лагранжева траектория жидкости $\mathbf{r}(t)$ в d-мерном пространстве описывается линейным преобразованием

$$\mathbf{r}(t) = \hat{W}(t)\mathbf{r}(0), \quad \frac{d\hat{W}}{dt} = \hat{\sigma}\hat{W}. \tag{9}$$

Приближение (9) верно то тех пор, пока $r \ll \eta$, а в случае эластической турбулентности, пока $r \ll L_0$. Таким образом, небольшой элемент жидкости с течением времени деформируется под действием аффинного преобразования $\hat{W}$. Из несжимаемости течения следует, что

$$\det \hat{W} = 1.$$

Элемент жидкости растягивается и сжимается вдоль некоторых осей и, кроме того, вращается. Для того чтобы выделить растяжение и вращение, представим линейное преобразование в виде

$$\hat{W} = \hat{N}\hat{D}\hat{\mathcal{O}}. \tag{10}$$

Матрицы $\hat{N}$ и $\hat{\mathcal{O}}$ — ортогональные, а $\hat{D}$ — диагональная.

Введем величины

$$\rho_i = \ln D_{ii}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Из формул (9) и (10) получаем, что уравнения для ρ_i имеют следующий вид:

$$\dot{\rho}_i = \bar{\sigma}_{ii}, \quad \hat{\bar{\sigma}} = \hat{N}^T\hat{\sigma}\hat{N}. \tag{11}$$

Поскольку $\det \hat{W} = 1$, имеем

$$\sum_i \rho_i = 0.$$

Выпишем уравнения для ортогональных матриц в произведении (10). Определим скорости вращения

$$\Omega^n = \hat{N}^T\partial_t\hat{N}, \quad \Omega^o = \partial_t\hat{\mathcal{O}}\hat{\mathcal{O}}^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega^n_{ij} &= \frac{\bar{\sigma}_{ij}\exp(\rho_j - \rho_i) + \bar{\sigma}_{ji}\exp(\rho_i - \rho_j)}{2\operatorname{sh}(\rho_j - \rho_i)}, \\ \Omega^o_{ij} &= \frac{\bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ji}}{2\operatorname{sh}(\rho_i - \rho_j)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Очень быстро, на временах $t \gtrsim \lambda^{-1}$, достигается предел, в котором все размеры элемента жидкости сильно отличаются друг от друга. Для определенности мы считаем, что в этом пределе

$$e^{\rho_1} \gg \ldots \gg e^{\rho_d}.$$

Из выражений (12) следует, что в этом пределе статистика $\hat{\bar{\sigma}}$ не зависит от ρ_i. Средние логарифмические скорости растяжения или сжатия в разных направлениях

$$\lambda_i = \langle\bar{\sigma}_{ii}\rangle \tag{13}$$

называются ляпуновскими характеристическими показателями потока жидкости. Они того же порядка, что и обратное время корреляции процесса $\hat{\sigma}$. В силу несжимаемости жидкости их сумма равна нулю:

$$\sum_i \lambda_i = 0.$$

Мы считаем, что ляпуновские экспоненты расположены в порядке убывания,

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_d.$$

Введенная ранее средняя логарифмическая скорость удаления двух близко расположенных лагранжевых траекторий $\lambda = \lambda_1$. Из выражений (11) следует, что на временах, много больших времени корреляции процесса $\bar{\sigma}$, ρ_i оказывается суммой большого числа (пропорционального λt) случайных одинаково распределенных независимых величин. Поэтому вероятность отклонений скорости роста ρ_i от средних скоростей (13) на таких временах дается функцией распределения

$$\mathcal{P}(\rho_2,\rho_3) \approx \frac{C}{t}\exp\left[-tS(x_2,x_3)\right], \quad x_i = \frac{\rho_i}{t} - \lambda_i, \quad (14)$$

где C — нормировочная константа, а S — так называемая функция Крамера (см., например, [17]). Относительные поправки в (14) оказываются порядка $1/\lambda t$. Функция Крамера S выпуклая и имеет минимум в нуле. Она может быть точно вычислена в модели Крайчнана, где поле скорости считается коротко коррелированным во времени, см. Приложение. В реальных турбулентных течениях статистика $\hat{\sigma}$ неизвестна, поэтому неизвестна функция S. Мы предполагаем, что вторая производная S в нуле порядка λ^{-1}, поскольку в турбулентных течениях на вязких масштабах нет других характерных времен. В дальнейшем мы будем интересоваться только экспоненциальной частью зависимости корреляционных функций от времени, поэтому множитель t в выражении (14) для нас будет несуществен.

В трехмерном течении в модели Крайчнана средний характеристический показатель $\lambda_2 = 0$. Для развитой трехмерной турбулентности, подчиняющейся уравнению Навье–Стокса, для определения λ_2 существуют только численные эксперименты, см., например, [18]. В этой работе моделировалась турбулентность с периодическими условиями со случайной внешней силой на больших масштабах. Для второй ляпуновской экспоненты было найдено, что $\lambda_2 \approx 0.2\lambda_1$.

Как будет показано, корреляционные функции скаляра зависят от статистики скорости через функцию S, которую мы вводим феноменологически. В итоге мы получим возможные виды корреляционных функций пассивного скаляра в зависимости от функции S. Наоборот, если корреляционные функции экспериментально известны, с помощью полученных результатов можно получить информацию о функции S.

Матрица $\hat{\mathcal{O}}$, задающая направления, по которым происходит сжатие и растяжение элемента жидкости, формируется в первые моменты времени $t \approx 1/\lambda$. Из выражений (12) следует, что она перестает изменяться, когда растяжение становится существенным, т. е. при

$$e^{\rho_1} \gg \ldots \gg e^{\rho_d}$$

(см. [19]). Вследствие изотропии ее возможные значения распределены равномерно на группе $O(d)$. Ортогональная матрица $\hat{N}$ заметно изменяется за время λ^{-1}, становится на таких временах декоррелированной с $\hat{\mathcal{O}}$ и также имеет функцию распределения, равномерную на группе $O(d)$.

4. УСРЕДНЕНИЕ ПО НАЧАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СКАЛЯРА

Для произвольного начального распределения $\vartheta_0(\mathbf{r})$ возможно в явном виде выписать решение уравнения (1) при условии (8). В представлении Фурье решение $\tilde{\vartheta}(\mathbf{k},t)$ имеет вид

$$\tilde{\vartheta}(\mathbf{k},t) = \\ = \tilde{\vartheta}_0(\hat{W}^T\mathbf{k})\exp\left[-\frac{1}{(2\mathrm{Pe})^2}\mathbf{k}(\hat{W}\hat{\Lambda}\hat{W}^T)\mathbf{k}\right], \quad (15)$$

$$\hat{\Lambda} = \int_0^t \lambda dt'\, \hat{W}^{-1}(t')\hat{W}^{-1,T}(t'). \quad (16)$$

4.1. Эволюция отдельной неоднородности

Исследуем поведение отдельного сгустка скаляра. Для этого

$$\vartheta_0(\mathbf{r}) = \Theta_0(r).$$

Используя выражение (15), получим, что распределение скаляра в сгустке имеет вид

$$\Theta(\mathbf{r},t) = \int \frac{d\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^d}\tilde{\Theta}_0\left(l\sqrt{\mathbf{k}\hat{W}\hat{W}^T\mathbf{k}}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{l^2}{(2\mathrm{Pe})^2}\,\mathbf{k}(\hat{W}\hat{\Lambda}\hat{W}^T)\mathbf{k}\right\}. \quad (17)$$

Не конкретизируя функцию $\Theta_0(r)$, удобно описывать форму сгустка с помощью матрицы $\hat{I}$ его моментов инерции

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\int \vartheta(\mathbf{r})r^\alpha r^\beta dr}{l^2\int\vartheta(\mathbf{r})\,dr}. \quad (18)$$

Подставляя в выражение (18) уравнение (1), с учетом условия (8) получаем уравнение

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\sigma}\hat{I} + \hat{I}\hat{\sigma}^T + 4\kappa. \quad (19)$$

Мы полагаем, что l определено так, что начальные условия имеют вид

$$\hat{I}(t=0) = \hat{1}.$$

Связь матриц $\hat{I}$ и $\hat{W}$ оказывается нелокальной по времени:

$$\hat{I} = \hat{W}\left[1 + \frac{\hat{\Lambda}}{\mathrm{Pe}^2}\right]\hat{W}^T. \qquad (20)$$

Сравнивая выражения (20) и (17), мы видим, что интеграл по $\mathbf{k}$ (17) имеет существенное значение при

$$\mathbf{k}\hat{I}\mathbf{k} \lesssim 1.$$

Вклад от области интегрирования, в которой

$$\mathbf{k}\hat{I}\mathbf{k} \gg 1,$$

пренебрежимо мал. Таким образом, матрица $\hat{I}$ задает форму сгустка $\Theta(\mathbf{r}, t)$. Мы будем говорить, что вектор $\mathbf{R}$ умещается в сгустке $\Theta(t)$, если

$$\mathbf{R}\hat{I}^{-1}\mathbf{R} \lesssim 1,$$

и не помещается в нем, если

$$\mathbf{R}\hat{I}^{-1}\mathbf{R} \gg 1.$$

Диагонализуем матрицу $\hat{I}$:

$$\hat{I} = \hat{R}\hat{\mathcal{M}}\hat{R}^T, \qquad (21)$$

где $\hat{R}$ — ортогональная, а $\hat{\mathcal{M}}$ — диагональная матрицы. С течением времени сгусток превращается в вытянутый эллипсоид. Его размеры равны в порядке убывания $e^{m_1}, e^{m_2}, e^{m_3}$, где $e^{2m_i} = M_{ii}$. Направления главных осей эллипсоида хаотически вращаются со временем и задаются матрицей $\hat{R}$, значения которой равномерно распределены по группе $O(3)$.

Из выражения (19) получаем уравнения для логарифмов m_i размеров сгустка $\Theta(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \dot{m}_i &= \tilde{\sigma}_{ii} + \lambda\exp(-2(p + m_i)), \\ \tilde{\sigma} &= \hat{R}^T\hat{\sigma}\hat{R}, \quad p = \ln\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Pe}\right). \end{aligned} \qquad (22)$$

Скорость вращения

$$\Omega^r = \hat{R}^T\partial_t\hat{R}$$

сгустка определяется выражением

$$\Omega^r_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}\exp(m_j - m_i) + \tilde{\sigma}_{ji}\exp(m_i - m_j)}{2\,\mathrm{sh}(m_j - m_i)}. \qquad (23)$$

Сравнивая выражения (23) и (12), мы видим, что если есть сильное различие между размерами сгустка,

$$e^{m_1} \gg e^{m_2} \gg e^{m_3},$$

то статистика $\hat{\tilde{\sigma}}$ не зависит от поворота $\hat{R}$ и совпадает со статистикой $\bar{\sigma}$ (11) в пределе

$$e^{\rho_1} \gg e^{\rho_2} \gg e^{\rho_3}.$$

Пока диффузией можно пренебречь, скаляр в сгустке просто переносится жидкостью и его деформация описывается той же матрицей $\hat{W}$. В этом случае

$$\hat{I} = \hat{W}\hat{W}^T,$$

и

$$m_i = \rho_i.$$

Диффузия оказывается существенной в динамике m_i при $m_i + p \lesssim 1$, поскольку $\tilde{\sigma} \approx \lambda$. Она ограничивает сжатие сгустка на диффузионном масштабе, который, как следует из выражения (14), достигается на временах

$$t_d \approx \lambda^{-1}\ln\mathrm{Pe}. \qquad (24)$$

После того как диффузионный масштаб достигнут, больший размер сгустка продолжает расти с прежней скоростью, а меньший останавливается на значении r_d. Это означает, что со временем начинается экспоненциальный рост объема сгустка

$$V = \frac{l^d}{\Theta(\mathbf{r} = 0, t)}$$

и, соответственно, экспоненциальное уменьшение в нем характерного значения скаляра. Из выражения (17) следует, что

$$V \propto l^d[\det\hat{I}]^{1/2} = l^d\exp\sum_i m_i. \qquad (25)$$

4.2. Случай гауссовой статистики

Рассмотрим задачу с начальным условием $\vartheta_0^g(\mathbf{r})$, обладающим гауссовой статистикой. Проведем усреднение корреляционных функций скаляра (7) по статистике ϑ_0^g при фиксированной реализации процесса $\hat{\sigma}$. Используя представление начального условия в виде (3) и то, что уравнение (1) линейно относительно ϑ, получим, что статистика распределения скаляра остается однородной в пространстве и гауссовой, но уже не является изотропной. Парная корреляционная функция

$$G_2(\mathbf{R}, t) = C_2\int\frac{d\mathbf{r}'}{l^d}\Theta(\mathbf{r}' + \mathbf{R}/2, t)\Theta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}/2, t) \quad (26)$$

не является сферически-симметричной. Выделим в корреляционной функции (26) пространственно-зависимую и временную части:

$$G_2(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{R}, t)G_2(0, t). \qquad (27)$$

Множитель $U(\mathbf{R},t)\sim 1$, когда $\mathbf{R}$ умещается в сгустке $\Theta(t)$, и быстро убывает, когда $\mathbf{R}$ не попадает в него. Функция $G_2(0,t)$ имеет вид

$$G_2(0,t) = C_2[\det \hat{I}]^{-1/2}\Theta_0^2(0)$$

с точностью до множителя порядка единицы, зависящего от деталей распределения скаляра в сгустке.

Высшие корреляционные функции порядка $2n$ (7) при усреднении по статистике ϑ_0^g по теореме Вика распадаются на $(2n-1)!!$ вкладов. Каждый вклад соответствует некоторому разбиению $2n$ точек $\{\mathbf{r}_j\}$ корреляционной функции на пары. Пусть в i-й паре точки разнесены на вектор $\mathbf{R}_i$. Тогда для полностью усредненных вкладов имеем

$$F_{2n}^g = \left\langle \prod_{j=1}^{n} G_2(\mathbf{R}_i,t)\right\rangle_\sigma . \tag{28}$$

Индекс σ означает усреднение по статистике градиента скорости $\hat{\sigma}$. Произведение $G_2(\mathbf{R}_i,t)$ в (28) под знаком усреднения по скорости означает, что существенный вклад в часть (28) корреляционной функции $\mathcal{F}_{2n}$ (7) дают такие реализации процесса $\hat{\sigma}$, при которых все векторы $\mathbf{R}_i$ помещаются в сгустке $\Theta(t)$ (17).

4.3. Случай редких неоднородностей

Теперь получим выражение для корреляционных функций скаляра, усредненных только по статистике начального распределения скаляра ϑ_0^p, т. е. в случае редко расположенных сгустков. Не ограничивая общности, можно считать, что одна из точек в (7), $\mathbf{r}_1$, находится в начале координат:

$$\mathbf{r}_1 = 0.$$

Тогда

$$G_n^p = C_n \int \frac{d\mathbf{r}'}{l^3}\Theta(\mathbf{r}',t)\prod_{k>1}\Theta(\mathbf{r}_k+\mathbf{r}',t). \tag{29}$$

Разделим в (29) пространственно-зависимую и временную части. Сначала заметим, что корреляционная функция (29) подавлена, если хотя бы один из векторов $\mathbf{r}_k$ не помещается в сгусток. Временная зависимость дается выражением

$$\frac{1}{l^3}\int d\mathbf{r}'\Theta^n(\mathbf{r}') \propto [\det \hat{I}]^{-(n-1)/2}.$$

Таким образом, сравнивая $\langle G_n^p\rangle_\sigma$ с выражением (28), получаем пропорциональность между вкладом (28) в корреляционную функцию $\mathcal{F}_{2n}^g$ (7) в задаче с начальным условием ϑ_0^g и корреляционной функцией $\mathcal{F}_{n+1}^p$ (7) в задаче с начальным условием ϑ_0^p. При этом векторы $\mathbf{r}_k$ в (29) соответствуют векторам $\mathbf{R}_i$ в (28). В дальнейшем, опираясь на это соответствие, мы будем иметь в виду только распределение ϑ^g и усреднение выражений (28). Отметим, что корреляционные функции второго порядка в обоих пределах распределения скаляра формально совпадают.

Мы видим, что корреляционные функции (7) для обоих случаев начального распределения ϑ_0^g и ϑ_0^p, введенных в разд. 2, до усреднения по статистике скорости зависят от реализации процесса $\hat{\sigma}$ только через матрицу $\hat{I}$. Это означает, что усреднение по статистике скорости можно представить как отдельные усреднения по ориентациям сгустка (17), т. е. по матрице $\hat{R}$, и по степени растяжения сгустка, т. е. по статистике матрицы $\hat{\mathcal{M}}$ в (21).

5. УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРАЩЕНИЯМ

Усреднение (28) по вращениям $\hat{R}$ (21) касается множителя $U(\mathbf{R})$. Для того чтобы описать схему усреднения, проделаем ее для парной корреляционной функции в пространстве с размерностью $d=3$. Если $R\lesssim r_d$, то $U(\mathbf{R})\sim 1$ для любых ориентаций сгустка (17), и поэтому усредненное значение $\langle U\rangle_a \sim 1$. При возрастании длины R вектор $\mathbf{R}$ перестает умещаться в сгустке при любых его ориентациях, поэтому $\langle U\rangle_a$ убывает. Если R находится между вторым и третьим размерами сгустка, то при усреднении по $\hat{R}$ нужно выбрать такие повороты, при которых вектор $\mathbf{R}$ помещается в пластину толщиной le^{m_3}. Таким образом, усреднение по $\hat{R}$ приводит к следующему значению множителя

$$\langle U(\mathbf{R})\rangle_a = \begin{cases} \dfrac{le^{m_3}}{R}, & e^{m_3}\ll \dfrac{R}{l}\ll e^{m_2}, & (30)\\[2ex] \dfrac{le^{m_2}}{R}\,\dfrac{le^{m_3}}{R}, & e^{m_2}\ll \dfrac{R}{l}\ll e^{m_1}. & (31)\end{cases}$$

Наконец, если $R>le^{m_1}$, т. е. R больше всех размеров сгустка, то $\langle U\rangle_a$ экспоненциально подавлено. Это означает, что на расстояниях $R>le^{m_1}$ все корреляционные функции пассивного скаляра обращаются в нуль. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что $R\ll le^{m_1}$. Формулы (30), (31) можно объединить в одну:

$$\begin{gathered}\langle U(\mathbf{R})\rangle_a = \exp\left\{-\chi(-m_2+y)-\chi(-m_3+y)\right\},\\ \chi(x) = \begin{cases} x, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\end{gathered} \tag{32}$$

где

$$y = \ln(R/l).$$

Поправки к подэкспоненциальному выражению имеют порядок $O(1)$. Полученное асимптотическое поведение $\langle U \rangle_a$ (32) можно получить и прямым вычислением, введя какую-либо параметризацию углами матрицы $\hat{R}$ и усредняя по ним $U(\mathbf{R})$.

Для четырехточечной корреляционной функции рассмотрим сначала такое взаимное расположение точек $\mathbf{r}_i$ в выражении (7), при котором в выражении (28) $\mathbf{R}_1 \perp \mathbf{R}_2$. Пусть для определенности $R_1 > R_2$. При усреднении произведения $U(\mathbf{R}_1)U(\mathbf{R}_2)$ в сгустке должен поместиться эллипс с осями R_1 и R_2. Это невозможно сделать, если второй размер сгустка $le^{m_2} < R_2$ и вклад от такой реализации матрицы $\hat{I}$ подавлен. В обратном случае после усреднения получаем

$$\langle U(\mathbf{R}_1)U(\mathbf{R}_2)\rangle_a = \exp\left[-\chi(-m_2 + y_1) - \chi(-m_3 + y_1) - \chi(-m_3 + y_2)\right], \quad (33)$$

где

$$y_{1,2} = \ln(R_{1,2}/l).$$

Случай общего положения сводится к этому, поскольку из произвольных $\mathbf{R}_{1,2}$ всегда можно составить их линейные комбинации $\tilde{\mathbf{R}}_{1,2}$, такие что с точностью до множителя порядка единицы

$$U(\tilde{\mathbf{R}}_1)U(\tilde{\mathbf{R}}_2) = U(\mathbf{R}_1)U(\mathbf{R}_2)$$

и $\tilde{\mathbf{R}}_1 \perp \tilde{\mathbf{R}}_2$. Таким образом, в правой части выражения (33) нужно заменить длины $R_{1,2}$ на $\tilde{R}_{1,2}$. Смысл этой линейной замены состоит в том, что если в сгустке умещается эллипс, построенный на ортогональных векторах $\tilde{\mathbf{R}}_{1,2}$, то в нем можно поместить и векторы $\mathbf{R}_{1,2}$.

Точно так же при рассмотрении шеститочечной корреляционной функции скаляра в выражении (28) достаточно взять три взаимно ортогональных вектора. Для определенности мы будем считать, что длины векторов расположены в порядке убывания:

$$R_1 > R_2 > R_3.$$

Ненулевые вклады в шеститочечную корреляционную функцию будут давать сгустки с размерами

$$le^{m_2} \gtrsim R_2$$

и

$$le^{m_3} \gtrsim R_3.$$

Если эти условия выполняются, то усредненное по углам произведение $\langle \prod_i U(\mathbf{R}_i)\rangle_a$ не зависит от меньшего расстояния R_3 и формально имеет тот же вид (33). Если в выражении (28) векторы произвольные, то нужно построить три взаимно ортогональных вектора $\tilde{\mathbf{R}}_i$, таких что

$$\prod_i U(\tilde{\mathbf{R}}_i) = \prod_i U(\mathbf{R}_i)$$

и подставить в (33) длины $\tilde{R}_i$ вместо R_i.

Для $n \geq 4$ в (28) можно снова выбрать три взаимно ортогональных вектора $\tilde{\mathbf{R}}_{1,2,3}$, такие что в построенном на них эллипсоиде умещаются все векторы $\mathbf{R}_i$ из (28):

$$\prod_{i=1}^{n} U(\mathbf{R}_i) \approx \prod_{k=1}^{3} U(\tilde{\mathbf{R}}_k).$$

Поэтому усреднение произведения более чем трех функций U всегда сводится к усреднению произведения трех U от некоторых взаимно ортогональных векторов.

6. ОДНОТОЧЕЧНАЯ СТАТИСТИКА СКАЛЯРА

Пусть расстояние между точками $\{\mathbf{r}_j\}$ в выражении (7) меньше диффузионного расстояния r_d. Тогда для каждого вклада (28) все множители $U(\mathbf{R}_i) \sim 1$ для любой реализации скорости, поэтому при усреднении по статистике скорости их можно опустить. Одноточечные моменты уже исследовались в работе [15]. Мы заново проведем усреднение одноточечных моментов, для того чтобы найти флуктуации поля скорости, которые дают наибольший вклад в момент. Это нам упростит вычисление корреляционных функций скаляра в несовпадающих точках. Согласно формуле (17), при начальном распределении ϑ_0^g

$$\mathcal{Z}_\alpha(t) = \langle|\vartheta^\alpha(0,t)|\rangle = \beta_\alpha C_2^\alpha \langle[\det \hat{I}]^{-\alpha/4}\rangle. \quad (34)$$

Последнее равенство в (34) написано с точностью до множителя порядка единицы, который зависит от деталей распределения скаляра в сгустке (17). Числовой множитель

$$\beta_\alpha = \Gamma[(\alpha+1)/2]2^{1+\alpha/2}/\sqrt{\pi}$$

в этом разделе мы будем опускать.

Поясним происхождение формулы (34) для $\alpha = 2$. Гауссовость статистики распределения ϑ_0^g означает, что обратный объем сгустка V^{-1} значительно меньше плотности сгустков D^{-d} в формуле (3).

Значение скаляра в отдельном сгустке пропорционально $1/V$, а знак скаляра может быть положительным или отрицательным. В одной точке перекрывается число сгустков, пропорциональное V. Поэтому средний квадрат концентрации скаляра определяется как сумма случайных величин,

$$\langle\vartheta^2\rangle \propto V^{-2}\cdot V \propto [\det I]^{-1/2}.$$

Предположим, что начальное распределение пассивного скаляра не обладало гауссовой статистикой. Пусть сначала концентрация сгустков в (3) была достаточно мала, $D\sim l$. После времен t_d (24) начинается диффузионное расширение сгустков, поэтому на временах t, таких что

$$\lambda(t-t_d)\gg 1,$$

мы приходим к пределу

$$D^{-d}\gg 1/V.$$

Следовательно, на таких временах статистику распределения скаляра при фиксированной реализации процесса $\hat\sigma$ можно считать гауссовой. В дальнейшем мы будем интересоваться именно этими временами, поскольку на них достигается универсальное поведение корреляционных функций скаляра.

Для того чтобы найти, как $\mathcal{Z}_\alpha$ выражается через функцию S, необходимо провести усреднение по статистике растяжений в выражении (34). Как будет показано ниже, моменты $\mathcal{Z}_\alpha$ формируются при флуктуациях скорости, сильно отличающихся от типичных реализаций. Процесс, который дает наибольший вклад в корреляционную функцию с учетом его статистического веса, мы будем называть оптимальной флуктуацией.

Для того чтобы найти оптимальную флуктуацию, рассмотрим сначала произвольную флуктуацию. Наложим ограничение на процесс $\hat\sigma$: пусть в момент наблюдения $\rho_i(t)=\lambda_i' t$, все λ_i' порядка λ, но необязательно $\lambda_i'=\lambda_i$. Наибольший вклад в такой исход дают процессы, флуктуирующие около пути,

$$\rho_i(t')=\lambda_i' t',\quad 0<t'<t.$$

Величину флуктуаций можно оценить как

$$\delta\rho_i(t')\approx\sqrt{\lambda t'(t-t')/t}. \tag{35}$$

Эту оценку легко получить из выражения (14), представив $\rho_i(t)$ как результат последовательных перехода из нуля в $\rho_i(t')$ за время t' и перехода из $\rho_i(t')$ в $\rho_i(t)$ за время $t-t'$.

Теперь для такой реализации процесса $\hat\sigma$ свяжем $m_i(t)$ и $\rho_i(t)$. Сначала ограничимся временами $p\ll\lambda t\ll p^2$. На таких временах диффузионный предел оказываются уже достигнутым, т. е. для всех $\lambda_i'<0$ уже

$$\exp(-\lambda_i' t)\gg \mathrm{Pe}.$$

Типичные флуктуации $\delta\rho(t')\ll p$, поэтому по сравнению с p разбросом типичных путей $\rho(t')$, приводящих к результату $\rho_i(t)$, можно пренебречь. Переписав выражение (20) с учетом разложения (10), получаем

$$\begin{aligned}\hat I &= \hat N\hat D\times\\ &\times\left\{1+\mathrm{Pe}^{-2}\hat{\mathcal{O}}\left(\int\limits_0^t\lambda dt'[\hat{\mathcal{O}}^T\hat D^{-2}\hat{\mathcal{O}}](t')\right)\hat{\mathcal{O}}^T\right\}\hat D\hat N^T=\\ &=\hat R\hat{\mathcal{M}}\hat R^T. \end{aligned}\tag{36}$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^t\lambda dt'\exp(-2\lambda_i' t')=\frac{\lambda}{\lambda_i'}$$

формируется при $t'\approx\lambda^{-1}$, если $\lambda_i'>0$. Если $\lambda_i'<0$, то этот интеграл равен

$$J=(\lambda/|\lambda_i'|)\exp(2t\lambda_i')\gg\mathrm{Pe}^2$$

и формируется, когда $t-t'\approx\lambda$. Поэтому во втором слагаемом в фигурной скобке (36) не малы вклады, которые дают убывающие со временем элементы диагональной матрицы $\hat D(t')$.

Как нетрудно заметить, матрица $\hat I$ определяется значениями матрицы $\hat W$ в моменты t', такие что $t-t'\sim\lambda$. Для того чтобы оценить матричные элементы $\hat I$, представим матрицу $\hat{\mathcal{O}}$ в виде

$$\hat{\mathcal{O}}(t')\approx[1-(t-t')\Omega^o(t)]\hat{\mathcal{O}}(t).$$

Матричные элементы $\Omega^o(t)$ малы и оцениваются в соответствии с формулой (12). Пусть сначала $\lambda_2'>0$. Тогда получаем следующую оценку: $\hat R$ и $\hat N$ совпадают с точностью до Pe^{-2}. Два больших собственных значения совпадают, т. е. $m_{1,2}=\rho_{1,2}$, а для третьего собственного значения $\hat I$ имеем

$$m_3=-p+\ln[|\lambda_3'|/\lambda]/2.$$

Второе слагаемое в последнем равенстве является малой поправкой, которой мы будем пренебрегать. В обратном случае, при $\lambda_2'<0$, $\hat R^T\hat N$ представляет собой случайный поворот вокруг первой оси. Логарифм первого собственного значения $m_1=\rho_1$, а $m_{2,3} = -p$ с точностью до поправок порядка $\ln[|\lambda'_{2,3}|/\lambda]$. Таким образом, с интересующей нас точностью получаем

$$m_i = -p + \chi(\rho_i + p). \qquad (37)$$

Теперь с помощью связи (37) найдем $\mathcal{Z}_\alpha$. Сначала для определенности предположим, что при оптимальных флуктуациях по второму направлению сгусток растягивается, $\lambda_2^* > 0$. Воспользовавшись выражением (37), получаем, что

$$\mathcal{Z}_\alpha = \langle C_2^\alpha \mathrm{Pe}^{\alpha/2} \exp\{\alpha\rho_3/2\}\rangle.$$

Окончательно получаем

$$\mathcal{Z}_\alpha = C_2^\alpha \mathrm{Pe}^{\alpha/2} \int d\lambda'_2 d\lambda'_3 \exp\{-t(S - \alpha\lambda'_3/2)\} = \\ = C_2^\alpha \mathrm{Pe}^{\alpha/2} \exp(-\gamma_\alpha t), \qquad (38)$$

где

$$\gamma_\alpha = (S - \lambda'_3\alpha/2)_{min}.$$

Для краткости мы пишем просто S, подразумевая под этим $S(\lambda'_2 - \lambda_2, \lambda'_3 - \lambda_3)$. Перевальные значения в интеграле (38) $\lambda^*_{2,3}(\alpha)$ определяются равенствами

$$\partial_2 S = 0, \quad \partial_3 S = \alpha/2.$$

При вычислении может оказаться, что $\lambda_2^* < 0$. Это будет противоречить нашим исходным предположениям — при оптимальных флуктуациях сгусток на самом деле растягивается только по одному направлению. В таком случае надо использовать приближение

$$\mathcal{Z}_\alpha = C_2^\alpha \mathrm{Pe}^\alpha \langle \exp[\alpha(\rho_2 + \rho_3)/2]\rangle.$$

Таким образом, мы получаем, что если в точке, определяемой уравнениями

$$\lambda'_2 = 0, \quad \partial_3 S = \alpha/2, \qquad (39)$$

выполняется неравенство

$$\partial_2 S > \alpha/2,$$

то оптимальные флуктуации имеют $\lambda_2^* > 0$ и $\mathcal{Z}_\alpha$ дается формулой (38). Если $\partial_2 S < 0$, то оптимальными являются флуктуации с $\lambda_2^* < 0$, и

$$\mathcal{Z}_\alpha = (C_2 \mathrm{Pe})^\alpha e^{-\gamma_\alpha t} \qquad (40)$$

где

$$\gamma_\alpha = (S + \lambda'_1\alpha/2)_{min}.$$

Для варианта $0 < \partial_2 S < \alpha/2$ наибольший вклад дают события, когда диффузионный предел достигается второй ляпуновской экспонентой как раз в момент наблюдения. Поэтому на временах t', $0 < t' < t$, имеем

$$\rho_2(t') \approx -pt'/t. \qquad (41)$$

Асимптотически при $t \to \infty$ имеем $\lambda_2^* = 0$. Выражение для момента имеет вид

$$\mathcal{Z}_\alpha = C_2^\alpha \mathrm{Pe}^{\alpha/2 + \partial_2 S} \exp(-\gamma_\alpha t), \quad \gamma_\alpha = S - \lambda_3^*, \quad (42)$$

где значения S и λ_3^* берутся в точке, определяемой уравнением (39). Отметим, что показатель γ_α является выпуклой функцией α, $\gamma_{2\alpha} < 2\gamma_\alpha$. Поэтому статистика пассивного скаляра имеет сильную перемежаемость:

$$\langle|\vartheta|^{2\alpha}\rangle \gg \langle|\vartheta|^\alpha\rangle^2.$$

Для любой функции S, которая остается конечной при $\lambda'_i = 0$, существует критическое значение

$$\alpha_c = \partial_3 S(-\lambda_2, -\lambda_3),$$

после которого $\mathcal{Z}_\alpha$ будет зависеть от α только через C_2^α. При $\alpha > \alpha_c$ получаем

$$\gamma_\alpha = S(-\lambda_2, -\lambda_3).$$

Это означает, что оптимальные флуктуации для всех $\alpha > \alpha_c$ оказываются одними и теми же. При таких флуктуациях скорости размеры, по которым происходит сжатие, впервые достигают r_d в момент наблюдения t, и поэтому

$$\det \hat{I}(t) = 1.$$

Моменты $\mathcal{Z}_\alpha$ зависят от времени только через статистический вес этих флуктуаций.

Численное моделирование [18] показывает, что $\alpha_c \sim 10$. Невозможно сделать более точные заключения, поскольку представленные в работе [18] данные не позволяют полностью установить значение вторых производных функции S в минимуме.

Оценим, что будет на больших временах $t \gg p^2/\lambda$. Сразу заметим, что если $\alpha < \alpha_c$ и оптимальное значение λ_2^* не равно нулю, то все проведенные вычисления, приводящие, в частности, к (38), можно повторить для больших времен $t \gg p^2/\lambda$.

Теперь пусть $\alpha < \alpha_c$ и в точке (39) $0 < S_2 < \alpha/2$. Поскольку явный вид статистики для процессов $\tilde{\sigma}_{ii}$ (22) неизвестен, рассмотрим упрощенную задачу, моделирующую логарифм размера сгустка m_i. В качестве модели для m_i возьмем броуновскую частицу, которая может двигаться на прямой x и начинает свое движение из начала $x = 0$. Коэффициент диффузии возьмем $D = \lambda$. Броуновской частицей будем моделировать m_2. Оценим вклад в момент $\mathcal{Z}_\alpha$ от реализаций процесса $\hat{\sigma}$, при которых диффузия была существенна для m_2 только непосредственно перед моментом наблюдения на временах $t' \lesssim t - \lambda^{-1}$. Для этого во вспомогательной задаче введем поглощающую стенку при $x = -p$. Ограничение

$$\rho_2(t)/t = -p/t \ll 1$$

на процесс $\hat{\sigma}$ означает, что для нашей броуновской частицы не надо вводить дополнительный средний снос. На временах $t \gg p^2/t$ вероятность того, что броуновская частица не поглотится, уменьшается как $1/t$. Таким образом, мы можем заключить, что отношение веса траекторий, на которых выполнялось неравенство $\rho_2(t') > -p$ всегда, кроме момента наблюдения t, к весу всех траекторий, имеющих в конце $\rho_2(t) = -p$, пропорционально $1/t$. Следовательно, зависимость (42) на больших временах может приобрести дополнительную степень времени, но экспоненциальная зависимость останется той же самой. Таким образом, при $n < \alpha_c$ нет ограничения сверху по времени при вычислении моментов путем поиска оптимальной флуктуации. В частности, для $\mathcal{Z}_\alpha$ можно пользоваться связью (37).

Наконец рассмотрим случай $\alpha > \alpha_c$. Как было показано, на промежуточных временах $t \ll p^2/\lambda$ оптимальные флуктуации таковы, что диффузия в них вообще не играет роли и в момент наблюдения $\rho_3(t) \approx -p$. Оценим вклад траекторий с такими же ограничениями на временах $t \gg p^2/\lambda$. Броуновской частицей будем моделировать m_3. В силу несжимаемости имеется ограничение $\rho_3 < 0$, следовательно, кроме поглощающей стенки в точке $x = -p$ надо ввести отражающую стенку в точке $x = 0$. Тогда вероятность того, что броуновская частица не поглотится при $t \gg p^2/\lambda$, пропорциональна $\exp\left[-\pi^2 \lambda t / 4p^2\right]$. Таким образом, на больших временах весомый вклад в момент $\mathcal{Z}_\alpha$ будут давать траектории, для которых диффузия играет существенную роль на всех $t' < t$. Капля несколько раз растягивается и потом снова сжимается по меньшему расстоянию до r_d. Поэтому моменты очень больших порядков на больших временах не могут быть найдены с помощью определения оптимальной флуктуации. Для их вычисления, по-видимому, необходимо полностью знать статистику процесса $\tilde{\sigma}$.

Вычисляя корреляционные функции (28) порядка $2n$, мы будем предполагать, что $2n < \alpha_c$.

7. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим двумерные течения. Напомним, что мы анализируем случай распределения ϑ^g, когда начальное распределение ϑ_0^g имеет гауссову статистику, см. разд. 2. Мы предполагаем, что время $t \gg p/\lambda$.

Для двумерного случая анализ, аналогичный проведенному в разд. 6, оказывается намного проще, поскольку нет средней ляпуновской экспоненты. При $\alpha < \alpha_c$

$$\mathcal{Z}_\alpha = C_2 \mathrm{P} e^{\alpha/2} \exp(-\gamma_\alpha t), \qquad (43)$$

где

$$\gamma_\alpha = (S - \lambda_2' \alpha)_{min}.$$

Повторяя рассуждения разд. 5, выпишем результаты усреднения по углам для двумерного случая. Для парной корреляционной функции (27) усреднение по углам дает

$$\langle U(\mathbf{R}) \rangle_a = \exp\left[-\chi(-m_2 + y)\right], \quad y = \ln(R/l). \qquad (44)$$

Ненулевой вклад в четырехточечный коррелятор вносят конфигурации, когда ортогональные векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ попадают в один сгусток, т. е. когда

$$R_2 \le l e^{m_2}.$$

При этом

$$\begin{gathered} \langle U(\mathbf{R}_1) U(\mathbf{R}_2) \rangle_a = \exp\left[-\chi(-m_2 + y_1)\right], \\ y_i = \ln(R_i/l). \end{gathered} \qquad (45)$$

Приступая к вычислению корреляционных функций, отметим, что для них оптимальные флуктуации можно найти, основываясь на найденных оптимальных флуктуациях для одноточечных моментов $\mathcal{Z}_n$. Получим выражение для парной корреляционной функции. Из выражения (37) следует, что

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{R}) = C_2 \int d\rho_2 \times \\ \times \exp\left[-tS(x_2) - \chi(-m_2 + y) - (m_1 + m_2 - p)\right]. \qquad (46)$$

Интегрируя по ρ_2, мы получаем следующий закон скейлинга для парной корреляционной функции:

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{R}) = C_2 e^{-y} \int d\rho_2 \exp\left[-tS(x_2) + \rho_2\right] = \\ = \frac{l}{R} \exp(-\gamma_2 t). \qquad (47)$$

Таким образом, оптимальные флуктуации для парной корреляционной функции в двумерном случае совпадают с оптимальными флуктуациями для $\mathcal{Z}_2$.

Множитель $1/R$ в выражении (47) возникает исключительно вследствие усреднения по вращениям, см. разд. 5, поскольку при релевантных флуктуациях второй размер сгустка порядка диффузионного расстояния r_d.

Теперь вычислим четырехточечную корреляционную функцию, точнее один из шести вкладов (28). Для того чтобы получить ненулевой вклад, надо, чтобы второй размер сгустка $le^{m_2(t)}$ в момент времени t был не меньше R_2:

$$F_{2n} = C_2^n \left\langle \frac{R_1}{le^{m_2}} \exp\left[-\frac{n(m_1+m_2)}{2}\right]\right\rangle_{le^{m_2}>R_2}, \quad n=2. \tag{48}$$

Для того чтобы найти оптимальную флуктуацию, рассмотрим следующий класс реализаций процесса $\hat{\sigma}$. Сначала больший размер сгустка растет,

$$m_1(t') = -\lambda_2'(t'),$$

где

$$0 < t' < t-\tau, \quad 0 > \lambda_2' \sim \lambda.$$

При этом меньший размер за время $t_d' \approx -p/\lambda_2'$ достигает размера r_d, $t_d' < t'$. На временах $t' > t-\tau$, наоборот, растет меньший размер, так что в момент наблюдения

$$m_2(t) = r_d e^z.$$

Мы предполагаем, что z не очень велико, $1 \ll z \ll \lambda t$. При таком процессе объем сгустка (25) оказывается равным

$$V = \exp[-\lambda_2'(t-\tau) - p].$$

Поскольку при всех $t' \gtrsim \lambda^{-1}$ выполняется неравенство

$$e^{m_1} \gg e^{m_2},$$

статистика процесса $\tilde{\sigma}$ (22) такая же, как и у процесса $\bar{\sigma}$ (11). Для того чтобы не ограничиваться порядком $n=4$, будем искать вероятность этого процесса с дополнительным весом $V^{-\alpha/2}$ при $\alpha < \alpha_c$ в соответствии с выражением (34). Усредняя по λ_2', перевальное значение которого оказывается равным $\lambda_2^*(\alpha)$, получаем

$$\mathcal{P}_\alpha(z,\tau) = = \exp\{-\gamma_\alpha t - \tau[(S(z/\tau - \lambda_2) - \alpha z/2\tau) - \gamma_\alpha] - \alpha z/2 + \alpha p/2\}. \tag{49}$$

Теперь найдем оптимальное значение τ, при котором $\mathcal{P}_\alpha(z,\tau)$ достигает максимума. Для того чтобы провести вычисления до конца, в качестве иллюстрации возьмем квадратичную функцию S, такую что

$$S(x_2) = S_{22}x_2^2/2.$$

В этом случае получаем

$$\mathcal{P}_\alpha(z) \propto \mathrm{Pe}^{\alpha/2}\exp(-\gamma_\alpha t) \times \exp[-z(\alpha/2 + 2|\lambda_2^*|S_{22})]. \tag{50}$$

Найдем вклад в корреляционную функцию от рассмотренного типа флуктуаций. Для этого нужно подставить в выражение (48) $\mathcal{P}_4$ из (50) и усреднить по z:

$$F_{2n}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = = C_2^n \left\langle \frac{R_1}{r_d e^z}\mathcal{P}_{2n}(z)\right\rangle_{z \gtrsim \ln[R_2/r_d]} = \tag{51}$$

$$= C_2^n \mathrm{Pe}^{n-1} \times \exp(-\gamma_{2n}t)\frac{l}{R_1}\left(\frac{r_d}{R_2}\right)^{(n-1)+2|\lambda_2^*|S_{22}}, \tag{52}$$

где $n=2$. Отметим, что оптимальное значение z^* таково, что для оптимального второго размера мы имеем

$$le^{m_2(t)} \approx R_2.$$

Мы приравняли вклад (51) ко всей корреляционной функции вследствие того, что вклады других типов флуктуаций оказываются подавленными. Например, оказывается подавленным вклад процесса (равный $\exp(-\gamma_{\alpha_c}t)$) с линейным изменением меньшего размера до $r_d e^z$, когда

$$m(t') = (z-p)t/t.$$

Конечно, равенство (51) нельзя считать строго математически доказанным.

Вычисление вкладов (28) в корреляционные функции (7) более высокого порядка $2n$, $6 \le 2n < \alpha_c$, проводится так же, как и вычисления F_4 (51) по следующей причине. Как было установлено в разд. 5, усреднение по вращениям нужно проводить над произведением $U(\tilde{\mathbf{R}}_1)U(\tilde{\mathbf{R}}_2)$ некоторых ортогональных векторов $\tilde{\mathbf{R}}_{1,2}$. В эллипс, построенный на этих векторах, должны помещаться все векторы из (28). В процессе усреднения по степени растяжения мы получим те же формулы (48)-(51) с соответствующим n. Таким образом, вклад (28) с $n \ge 3$ также дается выражением (51) с длинами $\tilde{R}_{1,2}$ вместо длин $R_{1,2}$.

7.1. Течения в пленках

Двумерные течения наблюдаются в тонких пленках, где пассивным скаляром может быть толщина пленки h [20, 21]. Аналогия с обычным скаляром типа флуктуации температуры оказывается не буквальной, поскольку в уравнении для h вместо диффузии присутствует гипердиффузия:

$$\partial_t h + (v\partial)h = -\tilde{\kappa}\Delta^2 h. \tag{53}$$

Переходя к фурье-представлению и беря скорость в виде (8), получаем решение (53) для сгустка начальным условием $\Theta_0(r/l)$:

$$\tilde{\Theta}(\mathbf{k},t) = \tilde{\Theta}_0\left(l\sqrt{\mathbf{k}\hat{W}^T\hat{W}^T\mathbf{k}}\right)\exp\left\{-\frac{l^4}{\mathrm{Pe}^4}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^t dt'\left[\mathbf{k}(\hat{W}(\hat{W}^T\hat{W})^{-1}(t')\hat{W}^T)\mathbf{k}\right]^2\right\}. \tag{54}$$

Число Пекле снова определено как

$$\mathrm{Pe} = l/r_d,$$

а диффузионный масштаб — как

$$r_d = (\tilde{\kappa}/\lambda)^{1/4}.$$

Разрешенные волновые векторы $\mathbf{k}$ в (54) определяются неравенством

$$\mathbf{k}\hat{I}\mathbf{k} \lesssim 1,$$

так же, как и в (17). Следовательно, усреднение по статистике скорости произведения n функций $G_2(\mathbf{R}_i,t)$ (26) можно проводить по той же процедуре, которая описана в разд. 5 и 7.

8. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В трехмерном случае возможные варианты для корреляционных функций пассивного скаляра будут классифицироваться по значению $\partial_2 S$ в точке (39) с соответствующим α. Мы будем интересоваться временами $t \gg p/\lambda$. Напомним, что мы анализируем случай начального распределения ϑ_0^g, см. разд. 2.

Снова начнем с парной корреляционной функции. Воспользовавшись выражением (37), заметим, что анализ оказывается таким же, как и для одноточечного момента (34) второго порядка с заменой $p \to -y$. Возможные случаи классифицируются значением производной $\partial_2 S$ в точке (39) с $\alpha = 2$. Если $S_2 < 0$, то оптимальные флуктуации не будут зависеть от R — второй размер сгустка будет много больше, чем R. Следовательно, мы получаем следующий закон скейлинга:

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{R},t) = C_2\exp(-\gamma_2 t)\frac{l}{R}. \tag{55}$$

Оптимальные флуктуации не будут зависеть от R и в случае, когда в точке (39) $S_2 > 1$. Тогда второй размер сгустка при оптимальных флуктуациях оказывается порядка диффузионного, поэтому

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{R},t) = C_2\exp(-\gamma_2 t)\frac{l^2}{R^2}. \tag{56}$$

Если при оптимальных флуктуациях с $R = 0$ вторая ляпуновская экспонента достигает диффузионного предела как раз в момент наблюдения, т. е. $0 < S_2 < 1$, то при

$$\ln(R_2/r_d) \ll \lambda t$$

оптимальными будут флуктуации с историей

$$\rho_2(t') \approx (t'/t)\ln(R_2/l).$$

Раскладывая функцию S около точки (39) до второго порядка, получаем

$$\mathcal{F}_2(R,t) = C_2\exp(-\gamma_2 t)(R/l)^{-1-S_2}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\tilde{S}_{22}}{2t}(\ln(R/l))^2\right\}. \tag{57}$$

Здесь

$$\tilde{S}_{22} = S_{22} - S_{23}^2/S_{33}.$$

Отметим, что в модели Крайчнана реализуется как раз этот вариант. Подставляя известный вид (76) функции S для этой модели, получаем зависимость [13]

$$\mathcal{F}_2(R,t) = C_2\exp(-\lambda t/4)(R/l)^{-3/2}. \tag{58}$$

Мы взяли времена

$$\lambda t \gg [\ln(R/l)]^2,$$

на которых последняя экспонента в (57) близка к единице. Отметим свойство корреляционной функции второго порядка: она не зависит от коэффициента диффузии, выражения (55)–(57) верны при $\kappa = 0$.

Из анализа, проведенного в разд. 5, следует, что во вкладе (28) в четырехточечную корреляционную функцию (7) достаточно рассмотреть такие векторы $\mathbf{R}_{1,2}$ в (28), что $\mathbf{R}_1 \perp \mathbf{R}_2$. В том же разделе было показано, что существенный вклад в корреляционную функцию дают процессы, при которых второй размер сгустка в момент наблюдения оказывается не менее R_2. Мы примем, что $R_1 \gg R_2$. В случае $S_2 < 0$ при оптимальных флуктуациях второй размер сгустка растет экспоненциально со временем, поэтому зависимость от $R_{1,2}$ появляется целиком вследствие усреднения по матрице $\hat{R}$ (21), и

$$F_4(R_1, R_2, t) = C_2^2 \exp(-\gamma_4 t)(R_1/l)^{-1}(R_2/l)^{-1}. \quad (59)$$

При $0 < S_2 < 1$ конечное значение ρ_2 становится равным $\ln(R_1/l)$, и в пределе

$$\lambda t \gg (\ln R_1])^2$$

получаем

$$F_4(R_1, R_2, t) = \\ = C_2^2 \exp(-\gamma_4 t)(R_1/l)^{-1-S_2}(R_2/l)^{-1}. \quad (60)$$

Если $1 < S_2 < 2$, то логарифм среднего размера ρ_2 линейно со временем достигает значения $\ln(R_2/l)$. При

$$\lambda t \gg [\ln(R_2/l)]^2$$

получаем

$$F_4(R_1, R_2, t) = \\ = C_2^2 \exp(-\gamma_4 t)(R_1/l)^{-2}(R_2/l)^{-S_2}. \quad (61)$$

Если $S_2 > 2$, то оптимальной флуктуацией является процесс, при котором средний размер сначала быстро, за время порядка t_d, достигает диффузионного предела r_d, а затем незадолго до момента наблюдения вырастает до величины R_2. Поиск оптимальной флуктуации для четырехточечной корреляционной функции проводится так же, как и в двумерном случае. Отличие состоит лишь в том, что есть убывающаяся величина ρ_3, по которой нужно также проводить усреднение. Пусть для примера снова

$$S = S_{ij} x_i x_j / 2.$$

Тогда

$$F_4(R_1, R_2, t) = C_2^2 \mathrm{Pe}^{3+2\tilde{S}_{22}|\lambda_2^*|} \times \\ \times \exp(-\gamma_4 t)(R_1/l)^{-2}(R_2/l)^{-1-2\tilde{S}_{22}|\lambda_2^*|}. \quad (62)$$

Здесь

$$\tilde{S}_{22} = S_{22} - (S_{23})^2/S_{33}, \quad \lambda_2^* = \lambda_2^*(4),$$

см. разд. 6. Если для функции S недостаточно квадратичного приближения, то степенная зависимость сохраняется только для большего масштаба R_1, а от R_2 появляется более сложная зависимость.

Наконец, найдем возможные пространственные зависимости для шеститочечной корреляционной функции. Возьмем в выражении (28) векторы $\mathbf{R}_i$ взаимно ортогональными и такими, что $R_1 \gg R_2 \gg \gg R_3$. Все окончательные ответы приводятся для функции

$$S = S_{ij} x_i x_j / 2.$$

При оптимальной флуктуации к моменту наблюдения t сгусток должен иметь второй размер не меньше R_2, а третий не меньше R_3. Когда в точке, определяемой уравнением (39) с $\alpha = 6$, $S_2 < 0$, оптимальное значение $\lambda_2^* > 0$. Первые два размера сгустка растут со временем, а третий — сначала убывает до размера r_d, а потом с момента $t-\tau$ до момента t вырастает до R_3. Время τ ищется так же, как в разд. 7 для четырехточечной корреляционной функции. Если $S_2 > 3$, то и второй, и третий размеры сгустка сначала убывают до величины r_d, а затем возрастают соответственно до значений R_2 и R_3. Окончательно получаем

$$F_{2n} = C_2^n \,\mathrm{Pe}^{n-2} \exp(-\gamma_{2n} t)(R_1/l)^{-1}(R_2/l)^{-1} \times \\ \times (r_d/R_3)^{(n-2)+2\tilde{S}_{33}|\lambda_3^*|}, \quad S_2 < 0, \quad (63)$$

$$F_{2n} = C_2^n \,\mathrm{Pe}^{2(n-2)} \exp(-\gamma_{2n} t)(R_1/l)^{-2} \times \\ \times \exp\left\{-nz_2 - (n-1)z_3 - S_{ij}|\lambda_i^*|z_j - \sqrt{\frac{S_{ij} z_i z_j}{S_{ij}\lambda_i^* \lambda_j^*}}\right\}, \\ S_2 > n, \quad (64)$$

где

$$n = 3,$$

$$z_i = \ln(R_i/r_d), \quad i = 2, 3, \quad \tilde{S}_{33} = S_{33} - (S_{23})^2/S_{22}.$$

Более сложным является вариант, когда $0 < S_2 < 3$. Наложим дополнительное условие на функцию S:

$$S_{23} > 0.$$

Это означает, что между малыми отклонениями $\delta\rho_2$ и $\delta\rho_3$ при релевантных флуктуациях существует антикорреляция (при дополнительном весе V^{-3}). В момент $t-\tau$ третий размер, уже достигший диффузионного масштаба, начинает расти и в момент наблюдения t достигает величины R_3. Средний размер при оптимальных флуктуациях не достигает значения r_d. При этом ρ_2 изменяется линейно со временем. После момента времени $t-\tau$ скорость $\dot{\rho}_2(t')$ претерпевает скачок вниз на временном масштабе $t \sim \lambda^{-1}$. При $0 < S_2 < 1$ получаем оптимальное значение

$$\rho_2^*(t) = \ln(R_1/l).$$

При $1 < S_2 < n$, $n = 3$ имеем

$$\rho_2^*(t) = \ln(R_2/l).$$

Для усреднения на больших временах получаем следующий результат:

$$F_{2n} = \mathrm{Pe}^{n-2}\exp(-\gamma_{2n}t)(R_1/l)^{-1-S_2}(R_2/l)^{-1} \times \\ \times (r_d/R_3)^{n-2+2\tilde{S}_{33}|\lambda_3^*|}, \quad 0 < S_2 < 1, \quad (65)$$

$$F_{2n} = \mathrm{Pe}^{n-2}\exp(-\gamma_{2n}t)(R_1/l)^{-2}(R_2/l)^{-S_2} \times \\ \times (r_d/R_3)^{n-2+2\tilde{S}_{33}|\lambda_3^*|}, \quad 1 < S_2 < n. \quad (66)$$

В выражениях (63)–(66)

$$\lambda_i^* = \lambda_i^*(2n).$$

Для того чтобы получить корреляционные функции более высоких порядков $2n$, $8 \le 2n < \alpha_c$, для каждого вклада (28) в корреляционную функцию (7) надо построить три взаимно ортогональных вектора $\tilde{\mathbf{R}}_i$, см. разд. 5. После этого все вычисления для F_{2n} проводятся так же, как и для F_6, и в итоге мы получим выражения (63)–(66) с соответствующим n.

8.1. Угловые особенности

Приведем в качестве иллюстрации полученных результатов явный вид корреляционных функций скаляра.

Рассмотрим сначала распределение ϑ^g, в котором расстояние между сгустками $D \ll l$. Поскольку начальное распределение ϑ_0^g обладает гауссовой статистикой с нулевым средним, все корреляционные функции скаляра нечетного порядка равны нулю (см. разд. 2). Получим выражение для корреляционной функции четвертого порядка. Пусть геометрия такова, что

$$\mathbf{r}_{12} \parallel \mathbf{r}_{43}, \quad r_{12} \gg r_{43} \gg r_d,$$

$$r_{32} = r_{34}, \quad \mathbf{r}_{32} \perp \mathbf{r}_{43},$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

Таким образом, точки $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$ находятся друг от друга на расстоянии порядка r_{34}, а первая точка $\mathbf{r}_1$ находится далеко от них на расстоянии r_{12}. Корреляционная функция

$$\mathcal{F}_4^g(\{\mathbf{r}_i\}, t) = C_2^n \langle [\det \hat{I}]^{-2}\{[U(\mathbf{r}_{14})U(\mathbf{r}_{32}) + \\ + U(\mathbf{r}_{13})U(\mathbf{r}_{12})] + U(\mathbf{r}_{12})U(\mathbf{r}_{43})\}\rangle. \quad (67)$$

Угловая особенность соответствует пределу $r_{34} \to 0$. Первые два слагаемых в квадратной скобке (67) дают одинаковый вклад, а последнее слагаемое в круглой скобке не зависит от меньшего расстояния r_{34}. Используя выражения (59)–(61), получаем

$$\mathcal{F}_4^g(\{\mathbf{r}_i\}, t) = \\ = C_2^2 \exp(-\gamma_4 t)\frac{1}{(r_{12})^a}\left[2\left(\frac{r_d}{r_{23}}\right)^b + 1\right], \quad (68)$$

где параметры a и b могут принимать значения

$$1 < a < 2, \quad b = 1 \quad \text{или} \quad a = 2, \quad b > 2 \quad (69)$$

в зависимости от статистики поля скорости.

Как было показано в разд. 4, в обратном пределе начального распределения ϑ^p, когда концентрация сгустков $c \ll 1$, каждому из трех вкладов в корреляционную функции четвертого порядка (67) можно поставить в соответствие корреляционную функцию третьего порядка. Возьмем уже описанную геометрию без четвертой точки $\mathbf{r}_4$. Тогда корреляционная функция

$$\mathcal{F}_3^p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; t) = C_4\langle [\det \hat{I}]^{-2} U(\mathbf{r}_{13})U(\mathbf{r}_{32})\rangle = \\ = C_4 \exp(-\gamma_4 t)\frac{1}{(r_{12})^a}\frac{1}{(r_{23})^b} \quad (70)$$

пропорциональна первому слагаемому в выражении (67).

Напомним, что выражения (67) и (70) применимы, когда диффузионный масштаб r_d оказывается уже достигнутым, т. е. на временах

$$t \gg \lambda^{-1}\ln \mathrm{Pe}.$$

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статистика распределения пассивного скаляра в распадной задаче сильно отличается от статистики распределения скаляра в присутствии непрерывной накачки [8, 10, 16]. Для того чтобы резюмировать результаты работы и описать пространственное распределение скаляра, воспользуемся приемом, описанном в разд. 2. А именно, представим начальное распределение $\vartheta_0(\mathbf{r})$, обладающее корреляционной длиной l, в виде хаотически разбросанных в пространстве шарообразных сгустков размером l. Напомним, что под шарообразным сгустком размера l мы понимаем частный вид распределения скаляра $\Theta_0(r/l)$, когда во всем пространстве $\vartheta = 0$, за исключением выделенной области размера l. Для того чтобы найти корреляционные функции скаляра, надо провести усреднение по начальному положению сгустков в пространстве и по статистике градиента скорости.

Поток жидкости вытягивает сгустки. Сгустки, которые находятся друг от друга на расстоянии, меньшем вязкого масштаба η, вытягиваются одинаково и имеют одну и ту же ориентацию в пространстве. Меньший размер сгустка не может быть меньше диффузионной длины r_d, поэтому после достижения меньшим размером диффузионной длины объем отдельного сгустка начинает расти. Распределение скаляра в пространстве начинает сглаживаться — сила флуктуаций скаляра уменьшается со временем.

В потоке существуют редкие флуктуации скорости, которые не так сильно растягивают сгустки скаляра, тем самым оставляя в них повышенную амплитуду флуктуаций скаляра. Если сначала статистика скаляра была гауссовой, то после достижения диффузионного масштаба появляется сильная перемежаемость статистики скаляра, которая выражается, в частности, в том, что

$$\langle|\vartheta^{2\alpha}|\rangle \gg \langle|\vartheta^{\alpha}|^2\rangle.$$

На больших временах корреляционные функции скаляра обладают сильной угловой зависимостью. Поясним происхождение этих угловых особенностей на случае редко расположенных сгустков. Тогда в одновременные корреляционные функции скаляра вносят существенный вклад те области, в которых сразу все точки попадают в один из сгустков. В частности, одноточечная статистика распределения имеет вид

$$\langle(\vartheta^p)^n\rangle \approx \left(\frac{l}{D}\right)^3 [\Theta(\mathbf{r}=0,t)]^n,$$

где $\Theta(\mathbf{r},t)$ — распределение скаляра в сгустке, а D — расстояние между сгустками. Если точки корреляционной функции находятся на расстоянии порядка r_d друг от друга, то вклад в корреляционную функцию дает любой сгусток, когда при усреднении по его положению он накрывает хотя бы одну из точек корреляционной функции. Если расстояния между точками велики по сравнению с r_d, но лежат на одной прямой, то нужных сгустков оказывается намного меньше. Вклад в корреляционные функции дают только те области течения, где сгустки ориентированы в пространстве вдоль этой прямой. Еще труднее найти области в потоке с такими сгустками скаляра, которые накрывали бы все точки корреляционной функции, если эти точки лежат в одной плоскости на расстояниях, много больших r_d, друг от друга. Наконец, совсем мало сгустков, у которых все три размера заметно превышают диффузионный масштаб. В статье проведено детальное рассмотрение усреднения по ориентациям сгустков. Получена трехточечная корреляционная функция скаляра (см. разд. 7.1, формула (70)), а также общие выражения для двумерного (разд. 7) и трехмерного (разд. 8) случаев.

Другой пример рассмотренного нами начального распределения — распределение ϑ_0^g, обладающее гауссовой статистикой с нулевым средним. Его можно моделировать как суперпозицию хаотически разбросанных шарообразных сгустков с положительным и отрицательным значениями скаляра. Расстояние между сгустками мало, $D \ll l$. Поскольку картина распределения инвариантна относительно замены $\vartheta^g \to -\vartheta^g$, ненулевыми оказываются только корреляционные функции скаляра четного порядка $2n$. Корреляционная функция скаляра является суммой вкладов, в каждом из которых $2n$ точек корреляционной функции разбиваются некоторым способом на пары. При проведении усреднения по расположениям сгустков вклады имеют существенное значение при таком расположении сгустков, когда в каждой паре точки накрываются одним сгустком. Поскольку мы интересуемся масштабами $r \ll \eta$, каждую пару должны накрыть сгустки с одними и теми же формой и ориентацией в пространстве. Таким образом, получается ситуация, похожая на случай распределения ϑ^p — там одним сгустком надо было накрыть все точки. Корреляционная функция порядка $n+1$ в случае распределения ϑ^p пропорциональна описанному вкладу в корреляционную функцию порядка $2n$ в случае распределения ϑ^g. Имеется $(2n)!/[2^n n!]$ способов разбиения точек на пары, поэтому для распределения ϑ^g пространственная зависимость одновременных корреляционных функций скаляра оказывается более сложной. В работе получено полное выражение для четырехточечной корреляционной функции в случае специальной геометрии (см. разд. 8.1). Для корреляционных функций более высокого порядка мы не выписываем полных выражений из-за их громоздкости. В задаче с накачкой угловые особенности исследовались в работе [22] на масштабах $r \ll l$ и в работе [23] на масштабах $r \gg l$, где l — масштаб накачки.

Отметим особенность парной корреляционной функции скаляра $\mathcal{F}(R)$: при $R \gg r_d$ она не зависит от коэффициента диффузии при любой статистике скорости с $\alpha_c > 2$. Напомним, что при $\alpha > \alpha_c$ и начальном распределении ϑ^g, обладающим гауссовой статистикой, моменты $\langle|\vartheta^{\alpha}|\rangle$ формируются при одних и тех же флуктуациях скорости, в которых поток оказывается практически замороженным. Параметр α_c зависит только от статистики скорости на вязком масштабе. Высшие корреляционные функции скаляра в общем случае статистики скорости существенно зависят от коэффициента диффузии, хотя при некоторых законах статистики скорости с $\alpha_c > 4$ в трехмерном течении корреляционная функция скаляра четвертого порядка может и не зависеть от диффузии, см. выражения (59)–(61).

На временах

$$t_\eta \approx \lambda^{-1} \ln[\eta/r_d]$$

элемент жидкости, сначала имевший размер η, по одному из направлений сжимается до размера порядка r_d. Поэтому на таких временах приближение (9) становится неприменимым для всех расстояний $r \gtrsim r_d$, и, соответственно, полученные в работе результаты перестают быть справедливыми. Для эластической системы развитая теория перестает работать на временах

$$t_L \approx \lambda^{-1} \ln[L_0/r_d].$$

Отметим также, что в экспериментах по двумерному размешиванию скаляра [20, 21, 24] часто считается, что режим Бэтчелора не ограничивается вязкой длиной, а распространяется вплоть до масштабов накачки L. В работах [6, 7] было показано, что на масштабах прямого каскада скорость изменяется по закону

$$\delta v(r) \propto r[\ln(r/r_d)]^{1/3}.$$

Для получения конечных результатов в формуле (14) мы учитывали только экспоненциальную зависимость, поэтому, по-видимому, логарифмическая поправка к скорости оставляет наши результаты в силе. Тем не менее, чтобы получить окончательный ответ на этот вопрос, требуются дополнительные исследования.

Автор выражает благодарность В. В. Лебедеву за многочисленные советы, а также И. В. Колоколову и К. С. Турицину за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №04-02-16520-а) и фонда «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ

В модели Крайчнана процесс $\hat\sigma$ (8) является белым шумом с нулевым средним:

$$\begin{aligned}&\langle \sigma_{\alpha i}(t_1)\sigma_{\beta j}(t_2)\rangle = \\ &= \mathcal{D}[(d+1)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}]\delta(t_2-t_1),\end{aligned} \quad (71)$$

где d — размерность пространства. Процесс $\hat{\tilde\sigma}$ (10) имеет флуктуирующую часть, обладающую той же статистикой (71). Из-за того что матрица $\hat N(t)$ зависит от $\hat\sigma(t)$, у $\hat{\tilde\sigma}$ появляется ненулевое среднее. Для того чтобы вычислить $\langle\hat{\tilde\sigma}\rangle$, надо в этом среднем выделить контактные члены. А именно, представим матрицу поворота $\hat N(t)$ в виде

$$\hat N(t) = N(t-\delta t)\left[1 + \int\limits_{t-\delta t}^{t} dt' \hat\Omega^n(t')\right].$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\langle\hat{\tilde\sigma}\rangle = \Bigg\langle -\int\limits_{t-\delta t}^{t} dt' \hat\Omega^n(t')\hat N^T(t-\delta t)\hat\sigma(t)\hat N(t-\delta t) + \\ + \text{перестановочные члены}\Bigg\rangle.\end{aligned} \quad (72)$$

Используя выражение (12) и формулу

$$\int^{t} dt' \delta(t'-t) = \frac{1}{2},$$

устремляя $\delta t \to 0$, получаем, что у матрицы $\langle\hat{\tilde\sigma}\rangle$ ненулевыми являются только диагональные элементы. Таким образом,

$$\hat{\tilde\sigma}_{ii} = \frac{\mathcal{D}d}{2}\sum_{j\neq i}^{d} \operatorname{cth}[2(\rho_i-\rho_j)] + \xi_i. \quad (73)$$

Шум ξ_i имеет гауссову статистку с парой корреляционной функцией

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta(t-t')\mathcal{D}(d\delta_{ij}-1). \quad (74)$$

Выберем ρ_i так, что $\rho_1 > \ldots > \rho_d$. На временах $t \gg 1/\mathcal{D}$ совместная функция распределения величин ρ_i имеет вид

$$\mathcal{P} \propto t^{-1} e^{-tS}\, \delta\left(\sum\nolimits_i \rho_i\right), \quad (75)$$

где S — функция Крамера:

$$\begin{gathered} S = \frac{1}{2Dd}\sum_{i=1}^{d} x_i^2, \quad x_i = \frac{\rho_i}{t} - \lambda_i, \\ \lambda_i = \frac{d[(d+1)-2i]}{2}\mathcal{D}. \end{gathered} \quad (76)$$

Отметим, что если вместо параметризации матрицы $\hat W$ (10) использовать параметризацию

$$\hat W = \hat N \hat D \hat T,$$

где $\hat T$ — верхнетреугольная матрица с диагональными элементами $T_{ii} = 1$, то выражение (76) становится точным [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

2. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Гидрометеоиздат, Санкт-Петербург (1996).

3. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **32**, 16 (1941).

4. У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, Фазис, Москва (1998).

5. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 547 (1980).

6. R. H. Kraichnan, Phys. Pluids **7**, 1723, (1964); Adv. Math. **16**, 305 (1975).

7. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. E **50**, 3883 (1994); Phys. Rev. E **49**, 1800 (1994).

8. G. K. Batchelor, J. Fluid Mech. **5**, 113 (1959).

9. A. Groisman and V. Steinberg, Nature (London) **405**, 53 (2000).

10. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 945 (1968).

11. A. P. Kazantsev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **26**, 1031 (1968).

12. G. Falkovich, K. Gawedski, and M. Vergassola, Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).

13. M. Chertkov and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **90**, 034501 (2003).

14. M. Chaves, G. Eyink, U. Frish, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **86**, 2305 (2001).

15. E. Balkovsky and A. Fouxon, Phys. Rev. E **60**, 4164 (1999).

16. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov et al., Int. J. Mod. Phys. B **10**, 2273 (1996); Phys. Rev. E **51**, 5609 (1995).

17. R. Ellis, *Entropy, Large deiviations and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

18. S. S. Girimaji and S. B. Pope, J. Fluid Mech. **220**, 427 (1990).

19. I. Goldhirsch, P.-L. Sulem, and S. A. Orszag, Physica D **27**, 311 (1987); **405**, 53 (2000).

20. Y. Amarouchene and H. Kellay, Phys. Rev. Lett. **93**, 214504 (2004).

21. X-l. Wu, B.Martin, H. Kellay, and W. I. Goldburg, Phys. Rev. Lett. **75**, 236 (1994).

22. E. Balkovsky, M. Chertkov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **52**, 4924 (1995); Pis'ma v ZhETF **61**, 1012 (1995).

23. E. Balkovsky, G. Falkovich, V. Lebedev, and M. Lysiansky, Phys. Fluids **11**, 2269 (1999).

24. M.-C. Jullien, P. Castiglione, and P. Tabeling, Phys. Rev. Lett. **85**, 3636 (2000).

25. A. Gamba and I. V. Kolokolov, J. Stat. Phys. **94**, 759 (1999).