Письма в ЖЭТФ, том 79, вып. 9, с. 515 – 521

Образование конденсата и возникновение вихрей в бозе-газе при охлаждении

Е. А. Бренер, С. В. Иорданский[+], *Р. Б. Сапцов*[+]

Institut für Festkörperforschung, Forshungzentrum Jülich, 52425 Jülich, Germany

[+] *Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2004 г.

После переработки 8 апреля 2004 г.

Рассмотрен механизм перехода бозе-газа в сверхтекучее состояние путем тепловых флуктуаций в условиях внешнего охлаждения при температуре, выше температуры перехода. Вычислена вероятность образования таких критических флуктуаций – инстантонов, возрастающая по мере приближения к температуре перехода. Показано, что развитие отдельного инстантона невозможно без образования вихрей в его сверхтекучей части.

PACS: 3.75.Nt, 67.40.Vs

Представления о кинетике фазовых переходов развиты достаточно подробно для фазовых переходов первого рода и связаны с существованием как самой метастабильной фазы, так и равновесного критического зародыша. Соответствующая теория была развита в работах [1, 2] и подробно изложена в обзоре [3]. В то же время, теоретические представления о кинетике фазовых переходов второго рода, где оба эти факта не имеют места, мало развиты. В работе Лифшица [4] предложена некоторая специальная модель возникновения упорядоченной фазы после быстрой стадии фазового перехода в "ближнем" порядке при наличии только двух типов упорядочения.

В последнее время возник интерес к проблеме фазового перехода при быстром изменении внешних параметров (например, температуры) в связи с космологическими представлениями о "Большом взрыве", когда быстро расширяющаяся Вселенная должна охлаждаться и может пройти через серию фазовых превращений с изменением симметрии вакуума [5]. Предполагается, что кинетика превращения может быть смоделирована в конденсированных средах [6].

В работах Зурека, подробно изложенных в обзоре [7], была развита теория фазового перехода второго рода при быстром изменении температуры в жидком He_4. Основным в предложенном механизме является предположение о "критическом замедлении" всех процессов в окрестности температуры перехода и "быстром" возникновении очагов новой фазы при достаточном последующем охлаждении. В результате получалось возникновение огромного количества дефектов, порядка числа флуктуаций далеко выше точки перехода.

Экспериментально, однако, никаких задержек в образовании новой фазы неизвестно, а критическое замедление связано с длительностью процесса установления равновесия на макроскопических расстояниях, что является несущественным при неоднородном процессе образования новой фазы.

В настоящей работе рассмотрен переход в новую фазу путем развития флуктуаций на масштабах, значительно меньших длины корреляции, который может происходить достаточно быстро и вблизи критической температуры. При этом кинетика перехода оказывается связанной непосредственно с самим процессом охлаждения. Мы рассмотрим процесс образования конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа, включающей внешнее охлаждение, и покажем существование некоторой аналогии с фазовыми переходами первого рода.

Стандартная теория слабонеидеального бозе-газа имеет дело с гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p + \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m} \sum_p a^+{}_{p_4} a^+{}_{p_3} a_{p_2} a_{p_1}, \quad (1)$$

где a_0 – амплитуда рассеяния, имеющая атомную величину, m – масса атома. Свойства такого газа при малой плотности n (малость определяется газовым параметром $\eta = na_0{}^3 \ll 1$) близки к свойствам идеального бозе-газа с температурой перехода [8]:

$$T_c = \frac{3.31}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m}. \quad (2)$$

Идеальный бозе-газ при температурах, ниже перехода, имеет давление, зависящее только от температуры:

$$p_{id} = 0.0851\frac{m^{3/2}T^{5/2}}{\hbar^3}, \tag{3}$$

что соответствует нулевой изотермической скорости звука.

С учетом ненулевой амплитуды рассеяния можно написать качественное уравнение состояния ниже точки перехода:

$$P = p_{id}(T) + \frac{\hbar^2 a_0 n^2}{m}. \tag{4}$$

Мы опустили несущественный постоянный множитель во втором члене.

Вся кинетика существенно зависит от механизма охлаждения бозе-газа. Мы рассмотрим наиболее простую модель, когда бозе-газ находится в матрице некоторого твердого тела, с которой он слабо взаимодействует. Такая ситуация может возникнуть, например, для газа экситонов в кристалле. Кристалл может быть быстро охлажден до низкой температуры, и в этом случае охлаждение бозе-газа будет происходить путем излучения фононов. Считая теплоемкость кристалла большой по сравнению с теплоемкостью бозе-газа, можно пренебречь наличием тепловых фононов в кристалле и их влиянием на бозе-газ. В результате мы будем иметь однородный механизм потерь энергии, описываемый феноменологически величиной $-T/\tau_{ph}$. Другие модели охлаждения приводят к необходимости рассматривать передачу тепла на границах образца, что существенно сложнее. Скорость потерь $1/\tau_{ph}$ определяется столкновениями частиц между собой и взаимодействием с фононами, которое мы будем считать слабым:

$$1/\tau_{ph} \ll 1/\tau_{tr},$$

что в силу того, что $1/\tau_{ph} \sim n v_T \sigma_{ph}$, $1/\tau_{tr} \sim n v_T {a_0}^2$ (v_T – тепловая скорость), означает

$$\sigma_{ph} \ll {a_0}^2,$$

где σ_{ph} – сечение рассеяния с излучением фононов, что соответствует слабости взаимодействия бозе-газа с кристаллом.

Ввиду малости величины $1/\tau_{ph}$ эволюция бозе-системы будет медленной, в частности, мы будем считать, что длина звуковой волны $c\tau_{ph} \sim v_T\tau_{ph}$ будет велика по сравнению с характерными расстояниями $\sim \sqrt{\chi\tau_{ph}}$, где χ – коэффициент температуропроводности:

$$\frac{\sqrt{\chi\tau_{ph}}}{v_T\tau_{ph}} \sim \sqrt{\frac{l^2}{{v_T}^2\tau_{tr}\tau_{ph}}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{tr}}{\tau_{ph}}} \ll 1$$

(через l обозначена длина свободного пробега). Это обстоятельство позволяет считать, что эволюция флуктуации происходит при постоянном давлении, совпадающем с термодинамически равновесным.

При этом изменение плотности δn в области флуктуации, как следует из (4), связано с изменением температуры:

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta T}{T}\frac{1}{\eta^{1/3}}. \tag{5}$$

Относительная флуктуация плотности велика по сравнению с относительной флуктуацией температуры в области $T < T_c$. Это обстоятельство приводит к быстрому росту обратного фононного времени:

$$\delta\frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T}\frac{1}{\eta^{1/3}}\frac{1}{{\tau_{ph}}^0} \tag{6}$$

(где $1/{\tau_{ph}}^0 = n v_T \sigma_{ph}$) с падением температуры и усилением охлаждения в области флуктуации. В связи с этим мы будем пренебрегать излучением фононов в области вне развитой флуктуации, полагая

$$\frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T_c}\frac{1}{\eta^{1/3}}\frac{1}{{\tau_{ph}}^0}U(T_c - T), \tag{7}$$

где $U(T_c - T) = 1$ при $\delta T = T - T_c < 0$ и $U(T_c - T) = 0$ при $T - T_c > 0$.

Это позволяет рассматривать задачу о кинетике флуктуации в рамках теории гидродинамических флуктуаций с добавлением в уравнения гидродинамики потока энергии, уносимого излучением фононов:

$$\frac{T}{{\tau_{ph}}^0}\frac{\delta n}{n} = -\frac{T_c - T}{\tau_{ph}}U(T_c - T), \tag{8}$$

где $1/\tau_{ph} = (1/{\tau_{ph}}^0)(1/\eta^{1/3})$. Ввиду постоянства давления, эволюция флуктуации температуры будет описываться уравнением теплопроводности:

$$nc_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T\right) = \nabla(\kappa\nabla T) + \frac{T - T_c}{\tau_{ph}}nc_p U(T_c - T), \tag{9}$$

где добавлен поток энергии, уносимой фононами, κ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость на одну частицу при постоянном давлении. В этом уравнении имеется сносовый член с массовой скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, возникающий из-за большей плотности в ядре флуктуации. В дальнейшем он будет опущен как член более высокого порядка по величине флуктуации. Нас интересуют флуктуации поля T и их развитие во времени. Для рассмотрения флуктуаций необходимо ввести случайные потоки тепла $\mathbf{q}$ [3, 9], то есть ланжевеновский член $\nabla\mathbf{q}$. Эти потоки дельта-коррелированы (то есть коррелированы на расстояниях и временах малых, по сравнению с гидродинамическими масштабами). В данном случае это обеспечивается большой величиной времени τ_{ph} и расстояния $\sqrt{\chi\tau_{ph}}$ (χ – коэффициент температуропроводности) по сравнению с микроскопическими характеристиками. Хорошо известно, что в этом случае вероятность реализации $W_t(T(r))$ заданной конфигурации флуктуационного поля $T(r)$ в момент времени t подчиняется уравнению Фоккера–Планка в вариационных производных [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = -\int \frac{\delta}{\delta T(r)}\left[\frac{\chi {T_\infty}^2}{nc_p}\nabla^2\frac{\delta}{\delta T(r)}W + \right.$$
$$\left. + \left[\chi\nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}}\right]W\right]d^3r. \qquad (10)$$

При отсутствии взаимодействия с фононами стационарное решение этого уравнения дает результат, совпадающий с результатом термодинамической теории флуктуаций. Величина

$$\chi\nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (11)$$

дает скорость изменения температуры при ее отклонении от средней: $T = T_\infty$.

Мы считаем, что флуктуация происходит при некотором фиксированном $T_\infty > T_c$. Флуктуации с $\triangle T = T - T_\infty \ll T_\infty$ происходят достаточно часто и имеют некоторое, фактически стационарное распределение в пространстве, которое определяет величину $P_t(T)$. Последняя, в силу нормировки, дает число небольших флуктуаций в единице объема. Однако иногда происходят редкие флуктуации достаточно большой амплитуды $\triangle T \sim T_c - T_\infty$, $T < T_c$, при которых начинается эффективное охлаждение фононами и флуктуация оказывается необратимой, возникает очаг новой фазы. Нашей целью является вычисление вероятности таких флуктуаций в единице объема и времени. Поскольку эти флуктуации редки и распределение в области малых $T_\infty - T$ стационарно, можно использовать метод характеристик для отыскания экспоненциально малой вероятности образования такого зародыша – инстантона для уравнения Фоккера–Планка. Существенное отличие от теории образования зародышей в фазовых переходах первого рода состоит в том,что вероятность образования инстантона в данном случае определяется самим процессом охлаждения.

Рассмотрим с целью разъяснения ситуацию с отысканием инстантонного решения в случае одной степени свободы, когда уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial W}{\partial x} - vW\right), \qquad (12)$$

где D – постоянный коэффициент диффузии, $v(x)$ – макроскопическая скорость изменения величины x с учетом процесса релаксации при отклонении ее от равновесного значения, а также внешнего воздействия (аналога излучения фононов). Полагая $W = e^S$ и считая, что по модулю S и его первая производная велики, получим, оставляя главные члены, уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - v\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (13)$$

Это уравнение Гамильтона–Якоби с гамильтонианом ($\partial S/\partial x = p$)

$$H(\frac{\partial S}{\partial x}, x) = -Dp^2 + pv + \frac{\partial v}{\partial x},$$

уравнения Гамильтона являются характеристиками этого уравнения в частных производных:

$$\frac{dx}{dt} = -2Dp + v,$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dx}p - \frac{d^2v}{d^2x}.$$

Вклад дивергенции скорости в гамильтониан существенен только вблизи точки, где $v = 0$. Нас интересует специальное решение, которое проходит через точку равновесия $p = 0$, $v = 0$. В одномерном уравнении Фоккера–Планка с помощью замены можно избавиться от члена с первой производной, при этом получается аналогия с квантовой механикой, и можно использовать известные результаты. Мы, однако, будем использовать в окрестности $v = 0$ непосредственные оценки.

Энергия сохраняется в силу уравнений Гамильтона, что в ввиду малости дивергентного члена дает $H = -Dp^2 + pv = 0$, откуда $p = v/D$ и

$$S = -\int \frac{v^2}{D}dt = \int\limits_0^{x^*} \frac{v}{D}dx.$$

Мы считаем, что скорость $v(x)$представляет собой выпуклую вниз функцию с двумя нулями – устойчивым в нуле и неустойчивым при x^*. Такая форма функции $v(x)$ обеспечивается всем процессом охлаждения, включая излучение фононов. При $x > x^*$ решение уходит в сторону больших x, а действие набирается от нуля до x^*, где $v < 0$. В окрестности x^*

необходимо учитывать величину dv/dx . При больших x можно пренебречь p^2, что дает $p \approx -\frac{dv}{dx}/v$, поэтому

$$S \sim S_0 - \ln(v/v_0),$$

где v_0 – эффективная скорость в области, где происходит сшивка решений для $x < x^*$ и $x > x^*$. Само решение имеет вид $e^S \approx (v_0/v)e^{S_0}$ и ток $j \approx v_0 e^{S_0}$. Оценку v_0 можно получить, полагая, что все члены в гамильтониане H одного порядка:

$$Dp^2 \sim vp \sim \frac{dv}{dx} \sim \frac{v_{\max}}{x^*},$$

что дает

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{D|v_{\max}|}{x^*}} \sim \frac{|v_{\max}|}{\sqrt{|S_0|}}. \tag{14}$$

В многомерном случае ситуация сохраняется:

$$\frac{dx^i}{dt} = -2D^{ij}p_j + v^i,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial v^k}{\partial x^i}p_k - \frac{\partial(\mathrm{div}\mathbf{v})}{\partial x^i},$$

причем в начале $p = 0$ и $p \to 0$ в конце траектории. Поэтому $|p|$ достигает где-то на траектории максимума. В этой точке матрица $\partial v_i/\partial x_k$ имеет одно нулевое собственное значение и $\mathbf{p}$ касается соответствующего собственного вектора, а дальше траектория уходит в окрестность точки с нулевой скоростью $\mathbf{v}$. Это дает определение критической флуктуации-инстантона как решения, проходящего через точку $\mathbf{x} = \mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{p} \to 0$, при $|x| \to \infty$ как $1/v$, сохраняя поток вероятности постоянным.

Можно проделать подобную процедуру и в полевом случае. Гамильтониан в этом случае имеет вид, согласно (10)

$$H = \int p(\mathbf{r})\left[\frac{\chi {T_\infty}^2}{nc_p}\nabla^2 p(\mathbf{r}) + \right.$$
$$\left. + \chi\nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}}\right] d^3r \tag{15}$$

с уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\chi {T_\infty}^2}{nc_p}\nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi\nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\chi\nabla^2 p - \frac{p}{\tau_{ph}}U(T_c - T). \tag{17}$$

Здесь $p = \delta S/\delta T(\mathbf{r})$. Уравнения (16), (17) определяют критическую флуктуацию и могут быть приведены к безразмерным переменным путем замен $\xi = r/\sqrt{\chi\tau_{ph}}$, $\tau = t/\tau_{ph}$,

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}, \quad p = \frac{nc_p(T_\infty - T_c)\Pi}{T^2{}_\infty},$$

где Θ, Π – новые безразмерные поля. Безразмерные уравнения при этом имеют вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \nabla^2\Theta + \Theta U(-\Theta) + 2\nabla^2\Pi, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} = -\nabla^2\Pi - \Pi U(-\Theta). \tag{19}$$

Решение должно быть найдено, исходя из условий $\Pi_{\xi\to\infty} \to 0$, $\Pi_{\tau\to-\infty} \to 0$, $\Theta_{\tau\to-\infty} \to 1$, $\Theta_{\xi\to\infty} \to 1$, и проходить через окрестность $\partial\Theta/\partial\tau \approx 0$, $\Pi \approx 0$ при $\tau \to \tau^*$, после чего $\partial\Theta/\partial\tau \approx \nabla^2\Theta + \Theta U(-\Theta)$ и флуктуация развивается путем охлаждения, а случайными потоками можно пренебречь. Поскольку $H = 0$, то действие

$$S = \int p\frac{\partial T}{\partial t}d^3r dt \approx$$
$$\approx \int\limits_{-\infty}^{\tau^*} \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2\Pi}{T^2{}_\infty}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}(\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3 d\tau d^3\xi =$$
$$= s_0\frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2}{T^2{}_\infty}(\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3. \tag{20}$$

Отрицательная постоянная s_0 может быть определена численным решением (18), (19) и является универсальным числом, дающим наибольшее действие S_0, и не зависит от значений физических постоянных и разности $T_\infty - T_c$.

Для оценки скорости изменения температуры можно взять

$$|v_{\max}| = \frac{T_\infty - T_c}{\tau_{ph}}(\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3 n,$$

тогда для потока вероятности в переходной области, согласно (14),

$$j \sim \frac{T_\infty\left(n\left(\sqrt{\chi\tau_{ph}}\right)^3\right)^{1/2}}{\tau_{ph}c_p}e^{S_0}\nu.$$

Оценка постоянной ν не может быть получена из теории гидродинамических флуктуаций [11].Эта величина дает число равновесных малых флуктуаций с $\delta T \ll T$ на атомных масштабах в единице объема. В качестве оценки можно использовать $\nu = n/T_\infty$.

Таким образом, число критических флуктуаций, образующихся в единицу времени в единице объема,

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{n\left(n\left(\sqrt{\chi\tau_{ph}}\right)^3\right)^{1/2}}{\tau_{ph}c_p}\exp(s_0\frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2}{T^2{}_\infty}(\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3).$$

Таким образом зародыши новой фазы интенсивно образуются по мере приближения T_∞ к T_c и быстро разрастаются. Мы рассматривали первоначальную фазу роста критической флуктуации и ограничились теплопередачей только посредством теплопроводности, пренебрегая эффектами сверхтекучести на этой стадии. Это приближение может быть оправдано тем, что большую часть вклада в действие дает область, далекая от области малых скоростей v, где $p(\mathbf{r}) = \delta S/\delta T(\mathbf{r})$ становится малым и можно пренебречь флуктуационным вкладом, полагая $W \sim v^{-1}e^{S_0}$.

Рассмотрение дальнейшего роста инстантона требует решений уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, так как образуется сверхтекучая сердцевина развивающейся флуктуации. Мы качественно рассмотрим возникающие при этом явления. Исходя из предположения о большой величине τ_{ph} , будем считать, что в этой области движение квазистационарно, подстраиваясь под медленный процесс охлаждения фононами. Воспользуемся уравнениями гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи точки перехода в форме, предложенной Халатниковым [12]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu + \mu_s\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_s v_s + \rho_n v_n) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_s v_s^i + \rho_n v_n^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\rho_n v_n^i v_n^k + \rho_s v_s^i v_s^k + P\delta^{ik}\right) = 0,$$

$$T\frac{\partial n\sigma}{\partial t} + T\mathrm{div} n\sigma\mathbf{v}_n =$$

$$= \frac{2\Lambda m}{\hbar}\left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2}\right]^2\rho_s - \frac{\rho_s c_p T}{m\tau_{ph}},$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathrm{div}\rho_s\mathbf{v}_s = -\frac{2\Lambda m}{\hbar}\left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2}\right]\rho_s.$$

Здесь σ – энтропия на одну частицу, n – число частиц на единицу объема, ρ – плотность. Индексы n, s относятся к нормальной и сверхтекучей компонентам, постоянная Λ является релаксационным параметром, и мы добавили унос энергии путем излучения фононов в уравнение для энтропии. Здесь μ_s – специфический химпотенциал для сверхтекучей плотности, который должен обеспечивать равновесную плотность конденсата, получаемую путем приравнивания релаксационной правой части уравнения для ρ_s к нулю. В нашей модели слабонеидеального бозе-газа можно феноменологически определить

$$\mu_s = -\frac{\hbar^2 a_0}{m^2}\left[(n - n(T))\right] + \frac{\hbar^2 a_0}{m^3}\rho_s,$$

так, чтобы в равновесии $\rho_s = m(n - n(T)) = m\delta n$. Здесь $n(T)$ – число надконденсатных частиц. Мы будем считать, что величина $\Lambda m/\hbar$ достаточно велика и $T_c - T$ достаточно велико, чтобы выполнялось приближение $\mu_s + v_s^2/2 \approx 0$, пренебрегая величиной v_n по сравнению с v_s,что дает

$$\frac{\rho_s}{m} = \delta n - \frac{v_s^2 m^2}{2\hbar^2 a_0} = \delta n\left(1 - \frac{v_s^2 m^2}{2\hbar^2 a_0\delta n}\right). \qquad (21)$$

В этом случае из уравнений гидродинамики следует, что $\mu \approx \mu(p, T) = \mathrm{const}$:

$$T\frac{\partial n\sigma}{\partial t} + T\mathrm{div} n\sigma\mathbf{v}_n = -\frac{c_p T\rho_s}{m\tau_{ph}}.$$

Ввиду малости величины v_s по сравнению со скоростью звука, а также малостью ρ_s мы будем пренебрегать поправками к давлению $P \approx P_0$. В этом случае существенно только уравнение для энтропии. Считая производную $\partial n\sigma/\partial t$ малой, согласно предположению о квазистационарности (малая скорость изменения температуры $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau_{ph}}\frac{1}{\sqrt{n_0(\chi\tau_{ph})^{3/2}}}$) мы должны приближенно иметь выполнение стационарного режима $\mathrm{div} n\sigma\mathbf{v}_n = -c_p\rho_s/m\tau_{ph}$, и поток массы должен быть равен нулю $\rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n = 0$. Учитывая $\rho_n \approx \rho$, получаем уравнение

$$-\sigma\mathrm{div}\rho_s v_s = -\frac{c_p\rho_s}{\tau_{ph}},$$

где σ – энтропия на одну частицу. Это уравнение определяет теплопередачу в сверхтекучем ядре флуктуации. Используя уравнение (21), имеем

$$\sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2(1 - \frac{v_s^2}{u^2})v_s - (1 - \frac{v_s^2}{u^2})\frac{c_p}{\tau_{ph}} = 0,\ u^2 = \frac{2\hbar^2 a_0\delta n}{m^2}.$$

Вводя безразмерное расстояние $\xi = c_p r/\sigma u\tau_{ph}$,получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{(1 - v^2)(1 - \frac{2}{\xi}v)}{1 - 3v^2}. \qquad (22)$$

Особые точки этого дифференциального уравнения

$$\xi = 0,\ v = 0 \ \text{ и } \ \xi = \frac{2}{\sqrt{3}},\ v = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

причем последняя является фокусом с собственными числами $\lambda = 1 \pm i\sqrt{5}$. Так как скорость v должна обращаться в нуль при $\xi = 0$, то при малых ξ скорость $v \approx \frac{1}{3}\xi$ и растет быстрее, чем линейно, причем производная $d\xi/dv$ обращается в нуль при $v = 1/\sqrt{3}$ и некотором $\xi = \xi^*$, после чего становится отрицательной с дальнейшим ростом v. Таким образом, регулярное сверхтекучее движение не продолжается за точку ξ^* (постоянная порядка единицы и может быть найдена численно). Физическая длина

$$r^* \sim \frac{\sigma u \tau_{ph}}{c_p} = \frac{\sigma}{c_p}\sqrt{2\frac{\delta n}{n}\eta^{1/3}\frac{\tau_{ph}}{\tau_{tr}}}\sqrt{\chi\tau_{ph}}$$

может быть меньше, чем $\sqrt{\chi\tau_{ph}}$; отметим также, что $1 - v^2 > 0$, то есть особенность возникает в сверхтекучем ядре. Найденная особенность показывает,что при $\xi \gtrsim \xi^*$ условия квазистационарности будут нарушены и должно возникать сложное нестационарное сверхтекучее движение с интенсивным образованием вихрей внутри инстантона с переходом в нормальную жидкость при $T > T_c$. Похожие явления возникают в сверхтекучей жидкости в поле тяжести, когда T_c зависит от одной из координат (вертикальной) и имеется фиксированный поток тепла из сверхтекучей жидкости в нормальную [13]. У нас имеется аналогичная ситуация, возникающая из-за неоднородного процесса охлаждения по мере приближения к критической температуре внутри сверхтекучего зародыша. Численные расчеты [14] и экспериментальные данные [15, 16] показывают возникновение "вихревой" сверхтекучей фазы с большой, но конечной теплопроводностью , без сверхтекучего переноса. В настоящее время механизм возникновения вихрей и вихревая фаза подобного рода недостаточно изучены как теоретически, так и экспериментально.

Таким образом, мы показали, что, в отличие от работы [7], переход в сверхтекучую фазу может происходить путем независимого роста критических флуктуаций-инстантонов при температурах выше критической $T > T_c$, непосредственно в процессе внешнего охлаждения. Эти флуктуации затем перерастают в макроскопические образования. При росте зародышей сверхтекучего состояния будут генерироваться вихри в его внешней части. Поэтому вихревые дефекты возникают как из-за независимого рождения зародышей с произвольной фазой при охлаждении (гипотеза Зельдовича–Киббла), так и непосредственно в процессе роста каждого сверхтекучего зародыша. Этот механизм рождения вихрей в процессе роста инстантона существенно отличается от найденного в работе [17], где предполагалось существование сверхтекучего течения, взаимодействующего с нагретыми нормальными областями. Работа [17] связана с попыткой объяснения результатов эксперимента [18],где производилось облучение ^{3}He нейтронами, которое вызывало появление областей, нагретых выше T_c; нагретые области охлаждались окружающим сверхтекучим ^{3}He, и регистрировалось образование вихрей. Таким образом, происходило неоднородное охлаждение, что сильно отличается от модели, принятой в настоящей работе. В рассмотренной нами критической флуктуации происходит ее нагревание за счет несверхтекучего окружения, поэтому флуктуации выгодно сохранять сферическую симметрию для уменьшения этого нагревания. В случае охлаждения нагретой области с сверхтекучим окружением [18], по-видимому, граница раздела фаз должна быть неустойчива относительно искажений ее формы, так как это приводит к более быстрому охлаждению. Однако требуется тщательное исследование как устойчивости, так и самого механизма фазового перехода в таких условиях, не связанных, в отличие от [17], с существованием внешнего сверхтекучего движения.

Настоящая работа поддержана грантом президента РФ # НШ-1715.2003.3 для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, программой президиума РАН "Квантовая Макрофизика" и госконтрактом # 40.020.1.1.1165 Минпромнауки РФ.

Авторы выражают благодарность В. В. Лебедеву за полезные обсуждения.

1. R. Becker and W. Doering, Ann. der Physik **24**, 719 (1935).
2. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **112**, 525 (1942).
3. J. S. Langer, Ann. of Physics **54** 258 (1962).
4. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **42**, 1354 (1962).
5. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь. ЖЭТФ **67**, 3 (1974).
6. T. W. Kibble, J. Phys. **A9**, 1387 (1976).
7. W. H. Zurek, *Cosmological experiments in condensed matter system*, Physics Reports 1996, p. 177-221.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, т. **5**, М.: Физматлит, 2002.
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, т. **9** М.: Физматлит, 2002, ч. 2. гл. 9.
10. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика*, М.: Физматлит, 2001.
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*,т. **X**, М.: Наука, 1979.

12. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, М.: Наука 1971, гл. 9.
13. Akira Onuki, J. Low Temp. Physics **50**, 433 (1982).
14. P. B. Weinman and J. Miller, J. Low Temp. Physics **119**, 155 (2000).
15. Feng Chuan Lui and Guenter Ahlers, PRL **76**, 8, 1300 (1996).
16. H. Baddar, G. Ahlers, K. Kuehn, and H. Fu, J. Low Temp. Physics **119**, 1 (2000).
17. I. S. Aranson, N. B. Kopnin, and V. M. Vinokur, PRL **83**, 2000 (1999)
18. V. H. M. Ruutu, V. B. Eltsov, A. J. Gill et al., Nature **382**, 334 (1996).